ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ
ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,

Эшмаматов И.А.,.Абдуқодирова П.Т.

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

Ўқув қўлланма

Чирчиқ-2020

Ушбу ўқув қўлланма 5110100 – Математика ўқитиш методикаси таълим йўналишларининг ўқув режасидаги математика фанлар блокига тегишли фанларнинг ўқув дастурлари талаблари асосида тайёрланган бўлиб, унда амалий машғулотларни ўз ичига олган маълумотлар берилган.

Ўқув режалардаги математика фанлар блокига тегишли фанларнинг хусусиятидан келиб чиқиб, қўлланмада “Алгебра ва сонлар назарияси” курсининг асосий тушунча ва тасдиқлари, масалалари келтирилган бўлиб, математик мазмуни тадбиқлари кўрсатилган. Мавзулар бўйича талабалар мустақил ечиши учун топшириқлар ва уларнинг ечиш усуллари ҳам берилган.

Қўлланма олий таълим муассасаларининг математика ўқитиш методикаси талабалари ва профессор ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Тақризчилар: ф.-м.ф.д., профессор А.А.Жалилов

ф.-м.ф.д. Э.М. Махкамов

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Чирчиқ давлат педагогика институти кенгашининг 2020 йил *** *** даги * - сонли қарорига асосан 5110100 – Математика ўқитиш методикаси таълим йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар ва профессор ўқитувчилари учун ўқув қўлланма сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

“Математикани билиш – бу фақат стандарт масалаларнигина эмас, балки фикр эркинлиги, соғлом мантиқ, оригиналлик, яратувчанликни талаб қиладиган масалаларни еча билишдир”.
Д. Пойа

СЎЗ БОШИ

Ватанимиз мустақиллиги даврида таълим тизимида рўй бераётган улкан ўзгаришлар иқтидорли ўқувчилар, талабаларга бўлган муносабатни ҳам тубдан ўзгартирди. Республикамизнинг жаҳон ривожланган мамалакатлари даражасида тараққий этиши шу жамият аъзоларининг, айниқса ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил ижодий фаолиятлари натижалари билан белгиланади.

Талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, малака ҳосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш ва математикавий маданиятини шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади.

Бу масалаларни ҳал килишда эса рақамлар билан ишлаш усулларини ўзлаштириш - айниқса фикрдаги ҳисоб-китоблар математика қонунларини яхшироқ тушунишга ёрдам беради. Шу билан бирга консентратциялаш қобилиятини оширади, хотирани мустаҳкамлайди ва бир вақтнинг ўзида бир нечта ғояларни хотирада ушлаб туриш малакасини ривожлантиради. Бундай ҳисоблаш усулларини ўрганадиган киши, у бир нечта фикрлаш тузилмалари билан бир вақтнинг ўзида ишлашни ўрганади.

Ушбу ўқув қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бўлган туб ва мураккаб сонлар, таққосламалар назарияси ва Диофант тенгламаларини ечишнинг бир неча усулларини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Унда Эротосфен ғалвири, Мерсен туб сонлари, Евклид алгоритми, Эйлер функцияси, Лежандр символи, Диофант тенгламалари ёритилган. Талабаларнинг ақлий фаолиятини мустаҳкамлаб, машғулот жараёнида вақтдан ютишига ёрдам берадиган, тезкор ҳисоблаш имкониятини берувчи усуллар ўрганилган. Бу ўқув қўлланмадан педагогика олий таълим муассасалари талабалари ва профессор ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Ўқув қўлланма уч бобдан иборат. **Биринчи бобда** туб ва мураккаб сонлар, туб сонлар тўпламининг чексизлиги, Эротесфен ғалвири, бўлиниш муносабати, энг катта умумий бўлувчи ва энг кичик умумий каррали, Евклид алгоритми, чекли занжир касрлар ва муносиб касрлар хоссалари, систематик сонлар ва улар устида амаллар ҳамда туб сонлар тарихи баён қилинган. **Иккинчи бобда** бутун сонлар халқасида таққосламалар, унинг хоссалари ва чегирмалар, синфи ҳалқаси, Эйлер функцияси, Эйлер ва Ферма теоремаси, биринчи даражали таққосламалар ва биринчи даражали таққосламалар системаси мисоллар ёрдамида тушунтирилган. **Учинчи бобда** Диофант тенгламалари, биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари, аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими, тенгламани ечишни соддалаштириш, Лежандр символи ва унинг хоссалари, туб модул бўйича юқори даражали таққосламалар, иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари, Соннинг кўрсаткичи, туб модул бўйича индекслар, икки ҳадли таққосламалар, иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар кенг ёритилган. Ҳар бир мавзу мисоллар билан баён қилинган ва мустақил ишлаш учун машқлар берилган.

Ўйлаймизки, ўқув қўлланма ўз ўқувчиларини топади ва бошқа мавжуд ўқув адабиётлари қаторида қизиқарли математика ва олимпиада масалалари курси бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Муаллифлар

I. БОБ

БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1.1-§. Туб ва мураккаб сонлар. Туб сонлар тўпламининг чексизлиги. Эратосфен ғалвири

Маълумки санаш учун 1, 2, ... натурал сонлар ишлатилади. $N = \{1,2,...\}$ тўплам эса *натурал сонлар тўплами* дейилади. Агар a ва b натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a = b \cdot q$ шарт бажарилса, у ҳолда a натурал сон b натурал сонга *бўлинади* деймиз, ва $a = l \cdot b$ кўринишда белгилаймиз.

Таъриф. Фақат иккита турли бўлувчига эга бўлган натурал сон *туб сон*, иккитадан кўп турли натурал бўлувчига эга бўлган натурал сон *мураккаб сон* дейилади.

Изоҳ. p туб сон 1 дан фарқли бўлиб, фақат 1 ва p га бўлинади.
m мураккаб соннинг 1 ва m бўлувчилардан фарқли камида яна битта бўлувчиси мавжуд. 1 сони на туб, на мураккаб сон ҳисобланади.

Масалан: 2, 3, 5, 7, 11, 13 –туб сонлар , 4, 6, 8, 9, 10, 12 – мураккаб сонлар.

Таъриф. 1 дан фарқли умумий бўлувчиларга эга бўлмаган иккита натурал сон *ўзаро туб* сонлар дейилади.

Теорема: *a-бирдан фарқли натурал сон бўлсин. У ҳолда унинг бирдан катта энг кичик натурал бўлувчиси туб сондир.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, агар $a \vdots m$ бўлиб, m мураккаб сон бўлса, m нинг p бўлувчиси бўлиб, $p < m$ ва $p \neq 1$. У ҳолда $a \vdots m$ ва $m \vdots p$ шартлардан $a \vdots p$ муносабат келиб чиқади. Бу эса m – бирдан катта энг кичик натурал бўлувчи деган шартга зид. Демак, m - туб сон.

Хулоса. Бу теоремадан, агар a мураккаб сон бўлса, a нинг албатта битта $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб бўлувчиси бор бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, a–мураккаб сон, p эса унинг бирдан катта энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. У ҳолда шундай q сон топилиб, $a = pq \geq p^2$ ёки $p \leq \sqrt{a}$ келиб чиқади.

Демак, бирдан катта a натурал сон туб сон бўлиши учун $p \leq \sqrt{a}$ туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаслиги етарли. Масалан, 101 туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш учун уни $\sqrt{101}$ дан кичик бўлган 2,3,5,7 туб сонларга бўлиб кўрамиз, 101 бу сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди, шунинг учун, 101 туб сон экан.

Мисол. 397,401,403,409,677,697,701 сонларидан бири мураккаб сон бўлишини кўрсатинг.

Арифметиканинг асосий теоремаси

Теорема: *Ҳар қандай натурал сон ёки бирга тенг, ёки туб сон, ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.*

Исбот. Математик индукция методи билан исбот қиламиз.

1-босқич. Индукция базиси n=1 бўлсин. У ҳолда теорема исбот бўлди.

2-босқич. Ҳар қандай $1 \leq k < n$ учун теорема тўғри бўлсин. Яъни, k = 1 га, ёки туб сон, ёки кўпайтувчилари тартибигача ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

3-босқич. Агар n туб сон бўлса, исбот тамом. Агар n мураккаб сон бўлса, у ҳолда $1<a<n$ ва $1<b<n$ шартларни қаноатлантирадиган шундай натурал сонлар мавжуд бўлиб, $n=a \cdot b$ индукция фаразига кўра a, b лар туб сонлар ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади. Агар a, b лар туб сонлар бўлса, исбот тугайди.

Акс ҳолда,

$$a = p_1, p_2, \dots p_k,\ b = p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m.$$

Энди бу ёйилма ягона эканлигини исбот қиламиз.

Фараз қилайлик, $n = q_1, \dots, q_s$ тенглик n нинг бошқа ёйилмаси бўлсин. Бундан, $n = p_1, p_2, \dots p_m = q_1, \dots, q_s$ келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонини p_1 га бўлайлик. У ҳолда, p_1 ва $q_1, \dots, q_s$ лар туб сонлар бўлганлиги учун $q_1, \dots, q_s$

лардан бири p_1 га тенг. Аниқлик учун p_1=q_1 бўлсин. У ҳолда, $p_2, \dots p_m$=$q_2, \dots, q_s$. Бу ёйилмалар n дан кичик сонларнинг ёйилмалари бўлганлиги учун, индукция фаразига кўра, кўпайтувчилари тартибигача ягона. n натурал сонни туб кўпайтувчиларга ёйганимизда, p_1 туб сон ёйилмада α_1 марта, p_2 туб сон α_2 марта ва ҳоказо, p_m туб сон α_m марта учрасин. У ҳолда $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots p_m^{\alpha_m}$ ифода n натурал соннинг *каноник ёйилмаси* дейилади. Каноник ёйилмада туб кўпайтувчиларни ўсиш тартибида жойлаштирсак, ёйилма ягона бўлиши аниқ.

1-масала. Қуйидагиларни исботланг:

а) Агар а сон p туб сонга бўлинмаса, у ҳолда a, p сонлар ўзаро туб бўлади.

b) Агар бир нечта сон кўпайтмаси p туб сонга бўлинса, у ҳолда уни ташкил қилган кўпайтувчилардан камида биттаси p га бўлинади.

Ечилиши. а) Тескарисини фараз қиламиз, яъни a сон берилган p туб сонга бўлинмасдан, у билан 1 дан фарқли умумий бўлувчига эга бўлсин.
p сон туб бўлганлиги боис бу умумий бўлувчи фақат p бўла олади, яъни a сон p туб сонга бўлинар экан. Зиддият.

b) Агар бир нечта сонларнинг кўпайтмаси p туб сонга бўлиниб, кўпайтувчилар барчаси p га бўлинмаса, а) хоссага кўра улар p туб сони билан ўзаро туб бўлади. Демак, берилган кўпайтма ҳам p туб сони билан ўзаро туб. Зиддият. ▲

2-масала. Геометрик прогрессияда биринчи, ўнинчи ва ўттизинчи ҳадлар натурал сонлар бўлса, унинг йигирманчи ҳади ҳам натурал сон бўлишини исботланг.

Ечилиши. $a_1, a_2, \dots, a_n,$ – берилган геометрик прогрессия, q–унинг махражи бўлсин. Масала шартига кўра, $a_1,\ a_{10} = a_1 q^9$ ва $a_{30} = a_1 q^{29}$ сонлар натурал сонлар бўлади. Шунинг учун q^9 ва q^{29}–мусбат рационал сонлар. Демак, $q^2 = q^{29}/(q^9)^3$ ва $q = q^9/(q^2)^4$ сонлар ҳам рационал сонлар бўлади. $q = m\ /\ n$ бўлсин, бу ерда m ва n натурал ўзаро туб сонлар.

$$a_{30} = a_1 m^{29}/n^{29}$$

натурал сон, m^{29} ва n^{29} ўзаро туб бўлгани учун a_1 сон n^{29} га бўлингани келиб чиқади. Демак, $a_{20} = a_1 q^{19} = a_1 m^{19}/n^{19}$ сон натурал сон бўлади. ▲

3-масала. $p > 3$ туб сон учун $24 \mid p^2 - 1$ муносабатни исботланг:

Ечилиши. $p-1, p+1$ кетма–кет жуфт сонлардан биттаси 4 га ва биттаси 3 га бўлинади. Демак, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ сон 24 га бўлинади.▲

4-масала. Маълумки, p, p+10, p+14 сонлар туб. p ни топинг.

Ечилиши. p, p+10, p+14 сонлардан камида биттаси 3 га бўлинади. Демак, p=3. ▲

5-масала. *a, b, c* натурал сонлар учун

$$p = b^c + a, \qquad q = a^b + c, \qquad r = c^a + b$$

сонлар туб бўлса, p, q, r сонлардан камида иккитаси ўзаро тенг бўлишини исботланг:

Ечилиши. *a, b, c* сонлардан камида иккитаси бир вақтда жуфт, ёки тоқ бўлади. Аниқлик учун бу сонлар a ва b бўлсин. У ҳолда $p = b^c + a$ туб сон жуфт бўлади, яъни p=2 ва a=b=1. Бундан q=1+c=r келиб чиқади.▲

6-масала. Маълумки, n натурал сон учун 2n+1 ва 3n+1 сонлар қандайдир сонларнинг квадратлари бўлади. 5n+3 сон мураккаб сон бўлишини исботланг:

Ечилиши. $2n + 1 = k^2, 3n + 1 = m^2$ бўлса,

$$5n + 3 = 4(2n + 1) - (3n + 1) = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$$

тенглик ўринли.

$2\,k - m \neq 1$ шарт бажарилишини исботлаш етарли.

Агар $2\,k - m = 1$ бўлса,

$$5\,n + 3 = 2\,m + 1$$

ва

$$(m - 1)^2 = m^2 - (2m + 1) + 2 = (3n + 1) - (5n + 3) + 2 = -2n < 0$$

бўлади. Зиддият. ▲

7-масала. Агар туб p, q сонлар учун $x^2 - px + q = 0$ квадрат тенглама иккита турли бутун ечимга эга бўлса, p, q лар топилсин.

Ечилиши. Тенгламанинг ечимлари $x_1 < x_2$ шартни қаноатлантирсин. Виет формулаларига кўра $p = x_1 + x_2,\ q = x_1 x_2$.

q–туб сон бўлгани учун охирги тенгликдан $x_1 = 1$ бўлади ва бундан $q = x_2,\ p = 1 + x_2$ – иккита кетма–кет туб сон эканлиги келиб чиқади. Бу эса фақат q=2, p=3 бўлгандагина ўринли. ▲

8-масала. Ихтиёрий олтита кетма-кет натурал сонлар учун улардан фақат биттасининг бўлувчиси бўладиган туб сон топилишини исботланг:

Ечилиши. Кетма–кет бўлган, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 сонларни оламиз. Агар n сони 5 га бўлинмаса, n+1, n+2, n+3, n+4 сонларидан фақат биттаси бешга бўлинади. Агар n сони 5 га бўлинса, n+5 ҳам 5 га бўлинади.
У ҳолда, 5 га бўлинмайдиган n+1, n+2, n+3, n+4 сонлардан иккитаси 2 га бўлинмайди. Шу иккита тоқ сонлардан бири албатта 3 га бўлинмайди. Демак, 2 га, 3 га ва 5 га бўлинмаган шу сон, 5 дан каттароқ туб сонга бўлинади.

n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 сонлари орасида шу туб сонга бўлинадиган сон ягона. ▲

9-масала. Қандай натурал n сонлар учун 3n-4, 4n-5, 5n-3 кўринишдаги учта сонлар барчаси туб бўлади?

Ечилиши. Бу сонларнинг (3n-4)+(4n-5)+(5n-3)=12n-12=12(n-1) − жуфт бўлгани учун, улардан камида биттаси албатта жуфт, яъни 2 га тенг бўлади. Аммо, 4n-5 тоқ бўлганлиги сабабли, қуйидаги ҳолларни қарашимиз етарли.

$$3n - 4 = 2 \iff n = 2 \text{ ёки } 5n - 3 = 2 \iff n = 1$$

Агар n=1 бўлса, 4n-5= –1.

Агар n=2 бўлса, 4n-5=3, 5n-3=7

Жавоб. n=2. ▲

10-масала. Нолдан фарқли ва турли, a, b ва c рақамлари учун $\overline{ab}$ сони c га, $\overline{bc}$ сони а га, $\overline{ca}$ сони b га бўлиниши мумкинми?

Ечилиши. Йўқ. Агар a, b, c рақамлардан биттасини жуфт ва масала шарти бажарилади деб фараз қилсак, у ҳолда, a, b ва c рақамларнинг барчаси жуфт бўлади ва $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ рақамлари учун ҳам масала шарти бажарилади. Лекин

$\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ сонлар бир вақтда жуфт рақамлар бўла олмайди. Демак, *a, b, c* рақамларнинг барчаси тоқ бўлган ҳолни қараш етарли. Агар *a*=5 десак, $a|\overline{bc}$ бўлгани учун *c*=5 бўлади.

Лекин, бу мумкин эмас. Демак, $a,\ b,\ c\ \in \{1, 3, 7, 9\}$. У ҳолда *a, b, c* рақамлардан биттаси 3 ёки 9 бўлиши зарур. Айтайлик, бу рақам *a* бўлсин. Унда $a|\overline{bc}$ муносабат фақат $\{b,\ c\} = \{3, 9\}$ бўлганда бажарилишини текшириб кўриш қийин эмас. Бу эса, *a, b, c* ларнинг турли рақамлар эканлигига зиддир. ▲

11-масала. Қайси натурал *n* сон учун $n^5 + n^4 + 1$ сон туб бўлади?

Ечилиши. *n*=1 бўлса, $n^5 + n^4 + 1 = 3$ – туб сон.

$$n^5 + n^4 + 1 = n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1 =$$
$$= n^3(n^2 + n + 1) - n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) =$$
$$= (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

муносабатлар ўринли.

Равшанки, *n* > 1 бўлганда $n^3 - n + 1 > 1, n^2 + n + 1 > 1$

бўлади. Демак, бу ҳолда $n^5 + n^4 + 1$ сон иккита бирдан катта натурал сонлар кўпайтмасига ёйилади, яъни у туб эмас.

Жавоб. *n*=1. ▲

12-масала. $a\,b + b\,c + a\,c > a\,b\,c$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча туб *a, b, c* сонларни топинг.

Ечилиши. Умумийликка зарар етказмасдан a ≤ b ≤ c деб фараз қиламиз.

Агар a≥3 бўлса, у ҳолда $a\,b + b\,c + a\,c\ \le 3\,b\,c\ \le a\,b\,c$. Бу эса, берилган тенгсизликка зид.

Демак, a<3. Бундан *a* туб бўлгани учун *a*=2 бўлади.

Бу ҳолда, $a\,b + b\,c + a\,c > abc$ тенгсизлик 2(b+c) > bc кўринишни олади.

Бундан,

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Маълумки, $b \ge 5$ бўлса, c ≥ 5 бўлиб

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{5}$$

зид тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Демак, $b < 5$ бўлади.

b туб сон бўлгани учун қўйидаги иккита ҳолни қараш етарли:

1) b=2. Бу ҳолда c сифатида ихтиёрий туб сонни олиш мумкин.

2) b=3. Бу ҳолда c=3 ёки c=5 .

Жавоб. 1) $a=2$, $b=2$, c – ихтиёрий туб сон.

2) $a=2$, $b=3$, $c=3$.

3) $a=2$, $b=3$, $c=5$.

Қолган ечимлар юқоридаги (a, b, c) учликни ўрин алмаштиришлар ёрдамида ҳосил бўлади. ▲

13-масала. $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўладиган барча натурал a, b сонлар топилсин.

Ечилиши.

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 =$$

$$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) = [(a + b)^2 + b^2][(a - b)^2 + b^2]$$

Равшанки, $(a + b)^2 + b^2 > 1$. Демак, $a^4 + 4b^4$ сон туб сон бўлиши учун

$$(a + b)^2 + b^2 = 1$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

Бу тенглик фақат a=b=1 бўлганда бажарилади. Бу сонлар эса масала шартини қаноатлантиради.

Жавоб. a=b=1. ▲

Изоҳ. Адабиётларда $a^4 + 4b^4 = [(a + b)^2 + b^2][(a - b)^2 + b^2]$ айният Софи Жермен[1] айнияти деб юритилади[1].

14-масала. $P(x)$–даражаси n га тенг бўлган натурал коэффициентли кўпҳад учун шундай бутун k сон топиладики, натижада P(k), $P(k+1)$, ..., $P(k+1996)$ сонлар барчаси мураккаб бўлади.

[1] Софи Жермен-француз математиги, файласуф ва механик.

Ечилиши. Коэффициентлар натурал бўлганлиги сабабли $N > M > 0$ ларда $P(N) > P(M)$ тенгсизлик бажарилади. Бундан ташқари, $N > 0$ бўлганда $P(M) > 1$.

Маълумки, агар $a \mid x - y$ бўлса, у ҳолда $a \mid P(x) - P(y)$.

(бу $x^{n} - y^{n} = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$) формуладан келиб чиқади).

$A = P(1)P(2)...P(1996)$

Белгилашни киритамиз. $P(k) \mid A$ дан $P(k) \mid P(A + k) - P(k)$ келиб чиқади, бу ерда

k=1, ..., 1996. Демак, $P(k) \mid P(A+k)$. Аммо $P(k)>1$ ва $P(A+k)>P(k)$. Бундан, $P(A + k)$ — мураккаб сон, k = 1, ..., 1996. ▲

15-масала. Агар p туб сон ва $0<k<p$ бўлса, у ҳолда,

$$C_p^k = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)p}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k)}$$

биномиал коэффициент p туб сонга бўлинади.

Ечилиши. Биномиал коэффициент бутун сон бўлгани боис, уни $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ сурати махражига бўлинади. $0 < k < p$ бўлгани учун

$$1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots (p-k-1)(p-k) = k!\,(p-k)!$$

сони p сон билан ўзаро туб. Шунинг учун $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ суратнинг фақат $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ кўпатувчиси махражга бўлиниб кетади. ▲

16-масала. Мураккаб a сонининг 1 дан фарқли энг кичик бўлувчиси $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сон бўлишини исботланг.

Ечилиши. Натурал сонларнинг тўплами қуйидан чегараганлигидан a сонининг 1 дан фарқли энг кичик бўлувчисини мавжуд бўлиши келиб чиқади ва биз уни b орқали белгилаймиз.

Дастлаб, b сонини туб сон бўлишини исботлаймиз. Агар биз уни мураккаб сон деб фараз қилсак, у ўзидан кичик бўлган натурал бўлувчига эга бўлганлиги келиб чиқади ва бу бўлувчи а сонини ҳам бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, b сони туб сон бўлади. $a=bq$ тенгликдан q бўлинма a сонини натурал бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Демак, b сонини таърифига кўра $q \ \geq b$ тенгсизлик бажарилади. Шу тенгсизликдан фойдаланиб, $a = bq \geq bb = b^2$ га эга бўламиз. ▲

Изоҳ. Бу масала a сонидан катта бўлмаган туб сонларни топишда Э*ратосфен ғалвири*[2] деб аталадиган оддий усулдан фойдаланишга имкон беради. Унинг моҳияти билан танишамиз.

1, 2, 3, …, *a* сонлар ичида 2, 3, 5, 7, …, туб сонлари ва уларга бўлинадиган сонлари кетма–кет ўчирилади. Бунда:

а) p туб сонига бўлинадиган сонларни ўчиришни p^2 дан бошлаш керак;

б) ўчириш жараёнини $\sqrt{a}$ сонидан катта бўлмаган туб сонлар учун ўтказиш етарли.

Натижада *a* сонидан катта бўлмаган туб сонлар ўчирилмай қолади.

17-масала. (Руминия, 2004 й). Ўзаро тенг бўлмаган туб p, q, r сонлар ва n натурал сон $p^n + q^n = r^2$ муносабатни қаноатлантирса, n=1 бўлишини исботланг:

Ечилиши. Маълумки, $p^n + q^n = r^2$ муносабат бажарилиши учун p, q, r лардан бирортаси 2 га тенг бўлиши керак. r=2 дан $p^n + q^n = 4$ келиб чиқади. Бу эса масала шартига зид. Умумийликка зарар етказмасдан, $p>q=2$ деб фараз қиламиз.

$n>1$ – тоқ бўлган ҳолини қараймиз. Бу ҳолда

$$(p + 2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2p^{n-3} - \cdots + 2^{n-1}) = r^2$$

Кўриниб турибдики,

$$p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2p^{n-3} - \cdots + 2^{n-1} = 2^{n-1} + (p - 2)(p^{n-2} + 2^2p^{n-4} + \cdots) > 1$$

ва $p+2 > 1$.

Демак,

$$(p + 2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2p^{n-3} - \cdots + 2^{n-1}) = r^2$$

тенглик

$$p + 2 = r, p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2p^{n-3} - \cdots + 2^{n-1} = r$$

[2] Эратосфен (м.а. 276-194 йиллар.) – қадимий юнонлик олим. Кубни иккилаш масаласини ечишга доир махсус қурилма (мезолябий)ни кашф қилган.

бўлгандагина бажарилади.

Бундан, $p^n + 2^n = (p+2)^2 = p^2 + 4p + 4$.

Бу эса $n \geq 3$ да бажарилмайди.

Энди $n>1$–жуфт бўлган ҳолини қараймиз. Бу ҳолда, $m \in N$ ва a, b – ўзаро туб сонлар топиладики, улар учун

$$n = 2m, p^m = a^2 - b^2, 2^m = ab, r = a^2 + b^2$$

тенгликлар бажарилади. Бу эса фақат $b = 1, a = 2^{m-1}$ бўлганда ўринли.

$p^m = 4^m - 1 < 4^m$ дан $p = 3$ тенглик келиб чиқади.

$3^m = 4^{m-1} - 1$ тенглик $m = 1$да бажарилади, ваҳоланки қолган $m \geq 2$лар учун индукция ёрдамида $3^m < 4^{m-1} - 1$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас.

Демак, $n=1$ ҳоли қаралиши қолди. Бу ҳолда $p=23$, $q=2$, $r=5$. ▲

18-масала. p – туб сон бўлсин.

а) p дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

б) p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар нечта?

Ечилиши. а) Барча р дан кичик натурал сонлар у билан ўзаро туб бўлади.

Уларнинг сони эса р–1 га тенг.

б) Барча p^2 дан кичик ва p га каррали бўлмаган натурал сонлар p^2 билан ўзаро туб бўлади.

p^2 дан кичик ва p га каррали сонлар $p, 2p, \ldots, (p-1)p$ кўринишга эга. Уларнинг сони p–1 га тенг. Демак, p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган сонлар

$$(p^2 - 1) - (p - 1) = p^2 - p$$

та бўлади.

Жавоб. а) $p-1$; б) p^2-p. ▲

19-масала. Маълумки, $p \neq 2$ туб сон $x^5 - y^5$ –кўринишига эга, бу ерда x, y натурал сонлар.

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}}=\frac{q^2+1}{2}$$

тенглик бажарилишини исботланг, бу ерда q–тоқ сон.

Ечилиши. $p=x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$ бўлгани учун x=y+1. Бундан, $t=y^2+y$ алмаштириш киритиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$p=(y+1)^5-y^5=5y^4+10y^3+10y^2+5y+1=$$
$$=5y(y^3+2y^2+2y+1)+1=5y(y+1)(y^2+y+1)+1=5t(t+1)+1$$
$$=5\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Бундан,

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}}=\sqrt{(2t+1)^2}=2y^2+2y+1=\frac{4y^2+4y+2}{2}=\frac{(2y+1)^2+1}{2}$$

Демак, q=$2y$+1 сон масала шартини қаноатлантиради. ▲

20-масала. (Руминия, 1999 й). Маълумки, нолмас *a, b, c* сонлар

$$a\neq c \text{ va } \frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$$

шартларни қаноатлантиради. $a^2+b^2+c^2$ сон мураккаб сон бўлишини исботланг.

Ечилиши. $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ тенглик $(a-c)(b^2-ac)=0$ тенгликка эквивалент. $a\neq c$ бўлгани учун $b^2=ac$. Бундан,

$3\leq a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b)$ муносабатларга эга бўламиз.

$a^2+b^2+c^2$ сон туб сон бўлса, қуйидаги 4 та ҳол вужудга келиши мумкин:

1) $a+c-b=1$ ва $a+c+b=a^2+b^2+c^2$

2) $a+c+b=1$ ва $a+c-b=a^2+b^2+c^2$

3) $a+c-b=-1$ ва $a+c+b=-(a^2+b^2+c^2)$

4) $a+c+b=-1$ ва $a+c-b=-(a^2+b^2+c^2)$

1) ва 2) ҳолларда $a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу эса $(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1$ тенгликка эквивалент. Бундан a=c=1 эканлиги келиб чиқади.

Бу эса масаланинг берилишига зид.

Қолган ҳолларда худди шундай $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Бундан a=c=−1 келиб чиқади. Бу ҳам масаланинг берилишига зид.

Демак, $a^2+b^2+c^2$ сон туб бўла олмайди. ▲

21-масала. (Евклид теоремаси)[3] . Туб сонлар чексиз кўпдир.

Ечилиши. Тескарисини фараз қиламиз, яъни фақат n та туб сонлар мавжуд бўлсин . $b=p_1p_2\dots p_n+1$ сонини олайлик. У барча $p_1,p_2,\dots,p_n$ туб сонлардан катта бўлгани учун мураккаб сон бўлади. Демак, унинг 1 дан фарқли энг кичик p натурал бўлувчиси туб сон бўлиб, у албатта $p_1,p_2,\dots,p_n$ лардан бирортаси билан устма-уст тушади, яъни b ва $p_1,p_2,\dots,p_n$ сонлар b га бир вақтда бўлинади.

Демак, $1=p_1p_2\dots p_n-b$ сони p га бўлинади. Зиддият. ▲

Изоҳ. 2006 йилда $2^{32582657}-1$ –сони туб сон бўлиши текширилди. Бу сон ҳозиргача энг катта маълум бўлган туб сон бўлиб, у ўнли позицион системада 9808358 та рақамдан иборат.

22-масала. $p_1,p_2,\dots,p_n$ туб сонлар учун $b=p_1p_2\dots p_n+1$ сони албатта туб сон бўладими?

Ечилиши. $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1=30031=59\cdot 509$. Йуқ, албатта туб сон бўлмайди. ▲

23-масала. $e_1=2,\ e_{\mathrm{n}}=e_1e_2\dots e_{\mathrm{n}-1}+1\ (n\geq 2)$ тенгликлар ёрдамида аниқланган кетма–кетлик фақат туб сонлардан иборат бўладими?

Ечилиши. Йўқ, $e_5=1807=13\cdot 139$. ▲

---

[3] Евклид (м.а. 356-300 йиллар.) – қадимий юнонлик олим. Геометрия фанининг асосчиларидан бири.

24-масала. Ихтиёрий натурал n учун n та кетма-кет мураккаб сонлар мавжудлигини кўрсатинг.

Ечилиши. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) + 2$ сон 2 га, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) + 2$,..., $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) + n + 1$ сон n+1 га бўлингани учун, бу сонлар масалани шартини қаноатлантиради. ▲

25-масала. 3, 7, 11, ... чексиз арифметик прогрессияда туб сонлар чексиз кўп бўлишини кўрсатинг.

Ечилиши. Тескарисини фараз қиламиз, яъни берилган прогрессияда фақат n та $p_1 = 3, p_2 = 7, \ldots, p_n$ туб сонлар мавжуд бўлсин. $b = 4p_2 \ldots p_n + 3$ сонини олайлик. У барча $p_1, p_2, \ldots, p_n$ туб сонлардан ҳеч қайсисига бўлинмасдан, 4k+3 кўринишдаги p натурал бўлувчига эга. Зиддият. ▲

26-масала. Фақат туб сонлардан иборат бўлган чексиз арифметик прогрессия мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ прогрессия барча ҳадлари туб сонлардан иборат бўлсин ва унинг айирмасини d орқали белгилаймиз.

Фаразимизга кўра, $p_{k+1} = p_1 + kd$ сон барча k натурал сонлар учун туб сон бўлади. k сон сифатида k=p_1 деб олсак $p_{k+1} = p_1(1+d)$ мураккаб сонни ҳосил қиламиз. Бу зиддият. ▲

Изоҳ. Туб сонлардан иборат бўлган чекли арифметик прогрессиялар мавжуд.

Масалан, 5, 11, 17, 23, 29 – бешта ҳаддан иборат бўлган арифметик прогрессия, 7, 37, 67, 97, 127, 157 – олтита ҳаддан иборат бўлган арифметик прогрессия.

27-масала. Коэффициентлари бутун сонлар бўлган

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

кўпҳад (n≥1, a≠0) берилган бўлсин. Барча $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ учун $P(x)$ кўпхад туб қийматларни қабул қилиши мумкинми?

Ечилиши. x=0 да берилган кўпҳад $a_0 = p$ туб қийматни қабул қилсин.

Маълумки, $x_1 = p, x_2 = p^2, x_3 = p^3, \dots$ лар учун $P(x_{\text{j}})$ қиймати p га бўлинади. Демак, $P(x_{\text{j}}) = p\ \ (j = 1,2,\dots)$, яъни P(x) чексиз кўп нуқталарда битта қийматни қабул қилади.

Бу эса фақат $P_{\text{n}}(x) = P_0(x) = a_0$ бўлгандагина бажарилиши мумкин. ▲

Изоҳ. Бевосита текшириш мумкинки, $P(n) = n^2 + n + 41$ кўпҳад n=0, 1,..., 39 ларда туб қийматларни қабул қилади. Аммо, n=40 ва n=41 ларда унинг қийматлари мураккаб сонлар бўлади (текширинг).

28-масала. Коэффицентлари натурал сонлар бўлган

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

кўпҳад (n≥1, a≠0) берилган бўлсин. Барча туб $x = 2,3,5,\dots$ сонлар учун учун $P(x)$ кўпхад фақат туб қийматларни қабул қилиши мумкинми?

Ечилиши. Агар $a_0 = 0$ бўлса,

$$P(x) = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1),$$

демак p туб сонда $P(p)$ сон p га бўлинади. Бошқа тарафдан, n≥2 бўлгани учун P (p) сон p дан катта. Шунинг учун P (p)–мураккаб сон.

Агар $a_0 \geq 2$ бўлса, p орқали a_0 нинг бирорта туб бўлувчисини белгилаймиз. Бу ҳолда $(p) = (a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \cdots + a_1)p + a_0$ сон p га бўлиниб, ундан катта бўлади. Шунинг учун $P(p)$ – мураккаб сон.

Шундай қилиб, $a_0 = 0$ ҳолни қаралиши етарли. Агар ихтиёрий p туб сон учун $P(p)$ туб бўлса, у ҳолда P (Р (x)) сон ҳам туб бўлади.

Демак, P (P (x)) кўпҳаднинг b_0 озод ҳади 1 га тенг бўлади. Аммо,

$$P(0) = a_0 = 1, P(P(0)) = b_0 = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + 1 > 1$$

Зиддият. ▲

29-масала. (*Арифметиканинг асосий теоремаси*). 1 дан катта ҳар қандай бутун сон туб сонлар кўпайтмасига ёйилади ва агар кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби назарга олинмаса, бу ёйилма ягонадир.

Ечилиши. a≥2 бўлсин. Исботни a бўйича математик индукция усули ёрдамида олиб борамиз. a=2 туб сон бўлгани учун индукция базаси ўринли. Теорема барча a дан кичик сонлар учун ўринли бўлсин. Агар a>2 бўлса , у ҳолда шундай p_1 туб сон мавжудки, у a ни бўлувчиси бўлади, яъни $a = p_1 a_1$, бу ерда $1 \leq a_1 < a$.

Агар $a_1 = 1$ бўлса, у ҳолда $a = p_1$ – туб сон. Агар $a_1 > 1$ бўлса, у ҳолда индукция фаразига кўра у туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.
Бундан $a = p_1 a_1$ сонини туб сонлар кўпайтмасига ёйилиши келиб чиқади.

Ягоналигини исботлаш мақсадида a сонини мураккаб сон деб олиб,

$$a = p_1 p_2 \dots p_n, a = q_1 q_2 \dots q_k$$

иккита турли ёйилма мавжудлигини фараз қиламиз. Бу ердан

$$p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_k$$

келиб чиқади. Демак, p_1 сони $q_1 q_2 \dots q_k$ кўпайтмани бўлувчиси.

Маълумки, $q_1 q_2 \dots q_k$ сонлардан бирортаси (масалан q_1) p_1 сонига бўлинади. Бундан q_1=p_1 келиб чиқади, яъни $a_l = p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_k$. Лекин, $a_1 < a$ демак, индукция фаразига кўра n=k ва $p_2 = q_2, \dots, p_n = q_n$. ▲

Изоҳ. 1) 1 дан катта ҳар қандай a бутун сон қуйидаги *каноник ёйилма* деб аталадиган $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ кўринишга эга, бунда $1 \leq \alpha_k, k = 1,2, \dots, n$. Агар кўпайтувчиларнинг ёзилиш тартиби назарга олинмаса, бу каноник ёйилма ягонадир.

2) a натурал сонининг каноник ёйилмаси $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ бўлсин.
У ҳолда, унинг ҳар қандай бўлувчиси $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ кўринишга эга, бунда

$$0 \leq \beta_k \leq \alpha_k, k = 1,2, \dots, n.$$

30-масала. 1001001001 соннинг 10000 дан катта бўлмаган туб бўлувчиларидан энг каттасини топинг.

Ечилиши. $1001001001 = 1001 \cdot 10^6 + 1001 = 1001 \cdot (10^6 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^6 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^2 + 1) \cdot (10^4 - 10^2 + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$

Жавоб. 9901 ▲

31-масала. $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ сони 26460 га бўлинишини исботланг.

Ечилиши. $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ каноник ёйилмани ҳосил қиламиз.

$A = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ сонини $27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$ кўринишда ёзамиз. Бу сон $5 \cdot 7^2$ га бўлинади. Ҳақиқатдан ҳам $27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37, 10887^8 - 10152^8$ айирма эса $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ га бўлинади.

Бошқа тарафдан, $A = (27195^8 - 10887^8) + 10152^8$ кўринишдан A сони $2^2 \cdot 3^3$ га бўлиниши келиб чиқади, чунки $27195^8 - 10887^8$ сон $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3$
151 га бўлинади, 10152 сон эса $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ каноник ёйилмага эга. Шундай қилиб, натижада A сони $5 \cdot 7^2$ га ва $2^2 \cdot 3^3$сонига бўлинишини ҳосил қилдик. Демак, у $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ сонига ҳам бўлинади. ▲

32-масала. Шундай 50 та натурал сонлар топилсинки, улардан ҳеч бири бошқасига бўлинмайди, аммо ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси қолган 48 та сонлардан барчасига бўлинади.

Ечилиши. $p_1, \dots, p_{50}$ — турли туб сонлар бўлсин.

$A_1 = p_1^2 \cdot p_2 \dots p_{50}, A_2 = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{50}, \dots, A_{50} = p_1 \cdot \dots p_{49} \cdot p_{50}^2$
сонлар масала шартини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, агар $i \neq j$ бўлса, $A_i/A_j = p_i/p_j$ сон бутун бўлмайди. Бундан ташқари, $A_\mathrm{i}A_\mathrm{j} = (p_1 \cdot \dots \cdot p_{50})^2 p_\mathrm{i} \cdot p_\mathrm{j}$ сон $A_1, \dots, A_{50}$ сонларнинг барчасига бўлинади. ▲

33-масала. Бутун бўлмаган, аммо рационал бўлган 2008 та сон топилсинки, улардан ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси бутун сон бўлади.

Ечилиши. Қуйидаги сонларни қараймиз:

$$x_1 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2008}}{p_1^2}, \quad x_2 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2008}}{p_2^2}, \dots,$$

$$x_k = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2008}}{p_k^2}, \dots, x_{1998} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{2008}}{p_{1998}^2}$$

бу ерда $p_1, p_2, \dots, p_{2008}$ — турли туб сонлар. Бу сонлар бутун бўлмасдан, масаланинг шартини қаноатлантиради . $x_i x_j = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_{2008}^2}{p_i^2 p_j^2}$ - бутун сон.

34-масала. Бирор натурал сон “яхши” дейилади, агар унинг каноник ёйилмасида ихтиёрий туб кўпайтувчининг даражаси 2 дан катта бўлса.

Кетма-кет жойлашган ва ҳар бири яхши бўлган натурал сонлар жуфтликларнинг сони чексиз бўлишини исботланг.

Ечилиши. Масаланинг шартини қаноатлантирадиган жуфтликлар мавжуд (масалан, (8, 9), (288, 289)). Фараз қиламиз, m, m+1 сонлар яхши бўлсин. Энди $4m(m+1)$, $4m(m+1)$+1 сонларнинг яхшилигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $4m(m+1)=2^2m(m+1)$сон яхши бўлади, чунки m ва m+1 сонлар яхши. Маълумки $4m(m+1)+1=4m^2+4m+1=(2m+1)^2$ сон ҳам яхши бўлади. (8,9) жуфтликдан бошлаб

$$(m,m+1)\to(4m(m+1),4m(m+1)+1)$$

алгоритм ёрдамида масаланинг шартини қаноатлантирадиган истаганча кўп бўлган янги жуфтликларни ҳосил қиламиз. ▲

1.2-§. Бўлиниш муносабати. Натурал сон натурал бўлувчиларининг сони ва йиғиндиси

$(Z,+,\cdot)$ - бутун сонлар ҳалқаси, $a,b\in Z$.

Айтишларича, a сони b сонига бўлинади дейилади, агар шундай c сони ($c\in Z$), топилсаки бунда $a=b\cdot c$ бўлса. Бўлинишга нисбатан хоссалари:

$1)\forall(a\in Z)a\vdots a,\ \text{чунки}\ a=a\cdot 1$

$2)a:b\wedge b:c\Rightarrow a:c,$

$3)a\vdots b\wedge b\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\vdots c$

$4)a\vdots b\wedge b\not\vdots c\Rightarrow(a\pm b)\not\vdots c$

$5)a\vdots c, \text{то}\forall(b\in Z)(ab)\vdots c$

$6)a\vdots b\Rightarrow(-a)\vdots b\wedge a\vdots(-b)\wedge(-a)\vdots(-b)$

$7)\forall(a\in Z)a\neq 0, a\not\vdots 0$

$8)a\neq 0\wedge a\vdots b\Rightarrow|a|\geq|b|$

Таъриф. a бутун сонни b га ($b\neq 0$) қолдиқли бўлиш деб, шундай бутун $b\cdot q\leq a<b(q+1)$ ва $0\leq a-b\cdot q<b$ $q,r\in Z$ сонга айтиладики, қуйидаги тенглик бажарилса:

$$a=bq+r, 0\leq r<|b|.$$

Қуйидаги теорема ўринли аҳамиятга эга.

1-Теорема. $a,b\in Z,b\neq 0$қандай бўлишидан қатъий назар, a ни b га доимо бир қийматли қолдиқли бўлиш мумкин.

Исбот . $a)$ $b\in Z,$ $b>0$. b каррали сонларни ўсиш тартибида жойлаштириб чиқамиз: $\ldots,b(-2),b(-1),b0,b1,b2,\ldots$

$bq\in Z$, бўлсин. Энг катта бутун сон, a дан устун бўлмасин. У ҳолда, $r=r_1$. $b\cdot q\leq a<b(q+1)$ ва $0\leq a-b\cdot q<b$. $y=a-b\cdot q$ орқали белгилаймиз, унда:

$$a=b\cdot q+r,\quad 0\leq r<b.$$

b) $b \in Z, b < 0$ хоссасини кўриб чиқамиз. У ҳолда, -b>0. а) хоссасига мувофиқ, шундай $q, r \in Z$ мавжудки, $a = (-b) \cdot q + r,\quad 0 \le r < -b$ ёки $a = b \cdot (-q) + r, 0 \le r < -b$.

Ягоналиги: q, r, q_1, r_1 бутун сонлар бўлсин, бунда $a = b \cdot q + r$ ва

$$a = b \cdot q_1 + r_1, 0 \le r < |b| \text{ è } 0 \le r_1 < |b|.$$

Бу нисбатлардан:

$$b(q - q_1) = r_1 - r, 0 \le |r_1 - r| < |b| \Rightarrow |b|\,|q - q_1| = |r_1 - r| \qquad (1.1)$$

га эга бўламиз.

Агар $q \neq q_1$ деб фараз қилинса, (1.1) $\Rightarrow |r_1 - r| \ge |b|$ бўлганлиги сабабли қарама-қарши фикга келдик. Демак, $q \neq q_1$. У ҳолда, (1.1) дан келиб чиқадики, $r = r_1$.

Изоҳ. Шуни айтиш жоизки, охирги *g)* хосса бўлиниш билан боғлиқ мулоҳазаларни бутун сонлар учун эмас, балки натурал сонлар учун юритишга имкон яратади.

2 га каррали бутун сонлар (яъни $2k, k \in Z$, кўринишдаги сонлар) *жуфт*, 2 га каррали бўлмаган бутун сонлар (яъни $2k+1, k \in Z$, кўринишдаги сонлар) эса, *тоқ* сонлар деб юритилади.

Бунда қуйидагилар ўринли:

а) Иккита тоқ сонларнинг йиғиндиси ва айирмаси жуфт, кўпайтмаси эса тоқ сон бўлади.

б) Иккита жуфт сонларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси жуфт сон бўлади.

1-масала. Берилган еттита сондан ихтиёрий олтитасининг йиғиндиси 5 га бўлинади. Бу сонлар ҳар бири 5 га бўлинишини исботланг:

Ечилиши. Берилган сонларни *a, b, c, d, e, f, g* орқали, уларнинг йиғиндисини эса m орқали белгилаймиз. Масаланинг шартига кўра

$$m - a, \quad m - b, \quad m - c, \quad m - d, \quad m - e, \quad m - f, \quad m - g$$

айирмалар барчаси 5 га бўлинади. Уларни қўшиб,

$$7m-(a+b+c+d+e+f+g)=6m$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $6m$ сони 5 га бўлиниши келиб чиқади. Бу эса m сони 5 га бўлинганда бажарилади.

Шундай қилиб, m ва $m–a$ сонлар 5 га бўлинади, демак, a=m-(m-a) сон ҳам 5 га бўлинади.

Худди шундай, қолган b, c, e, f ва g сонлар 5 га бўлиниши исботланади.▲

2-масала. a) a+1 сон 3 га бўлинса, 4+7a сон ҳам 3 га бўлинишини исботланг:

b) 2+a ва 35–b сонлар 11 га бўлинса, a+b сон ҳам 11 га бўлинишини исботланг:

Ечилиши.

a) $4+7a=4(a+1)+3a$ бўлгани учун 4+7a сон 3 га бўлинади.

b) $a+b=(2+a)-(35-b)+33$ бўлгани учун a+b сон 11 га бўлинади.▲

3-масала. a) 3 та кетма–кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 6 га бўлинишини исботланг.

b) 5 та кетма–кет натурал сонларнинг кўпайтмаси 120 га бўлинишини исботланг:

Ечилиши. a) Берилган сонлардан камида биттаси жуфт сон бўлгани учун, кўпайтма 2 га бўлинади. Худди шундай, берилган сонлардан камида биттаси 3 га каррали бўлгани учун, кўпайтма 3 га бўлинади. Демак, кўпайтма 6=2·3 га бўлинади.

b) Берилган сонлардан камида биттаси 5 га, камида биттаси 3 га, камида иккитаси 2 га бўлиниши аниқ.

Бундан ташқари, 2 га бўлинадиган сонлардан камида биттаси 4 га бўлингани учун, кўпайтма 5·3·2·4=120 га бўлинади. ▲

4-масала. Маълумки, a, b, c, d бутун сонлар барчаси $ab–cd$ га бўлинади. $ab–cd$ нинг қийматини топинг.

Ечилиши. a, b, c, d бутун сонлар барчаси $ab–cd$ га бўлингани учун

$$a=(ab-cd)a', b=(ab-cd)b', c=(ab-cd)c', d=(ab-cd)d'$$

тенгликлар бажарилади, бу ерда a', b', c', d'– бутун сонлар.

Бундан, $ab-cd=(ab-cd)a'(ab-cd)b'-(ab-cd)c'(ab-cd)d'=$

$$(ab-cd)^2(a'b'-c'd)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, яъни $ab–cd$ сон $(ab–cd)^2$ га бўлинади.

Бу эса $ab–cd$=1 ёки $ab–cd$=–1 бўлганда ўринлидир.

Жавоб: $ab–cd$=1 ёки $ab–cd$= –1. ▲

5-масала. Ихтиёрий натурал k сон учун $7+7^2+\cdots+7^{4k}$ йиғинди, 400 га бўлинишини исботланг:

Ечилиши. Берилган йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$(7+7^2+7^3+7^4)+(7^5+7^6+7^7+7^8)+\cdots$$
$$+(7^{4k-3}+7^{4k-2}+7^{4k-1}+7^{4k})=$$
$$=(7+7^2+7^3+7^4)\cdot(1+7^4+7^8+\cdots+7^{4k-4})$$
$$=7\cdot 400\cdot(1+7^4+7^8+\cdots+7^{4k-4})$$

Бундан, $7+7^2+\cdots+7^{4k}$ йиғинди 400 га бўлиниши келиб чиқади. ▲

6-масала . n > 1 натурал сон берилган бўлсин.

a) 2^n сон иккита кетма–кет натурал тоқ сонлар йиғиндиси кўринишда ифодаланишини исботланг:

b) 3^n сон учта кетма–кет натурал сонлар йиғиндиси кўринишда ифодаланишини исботланг:

c) m, n сонлар 1 дан катта бўлган натурал сонлар бўлсин. m^n сон m та кетма–кет натурал сонлар йиғиндиси кўринишда ифодаланишини исботланг:

Ечилиши. a) Агар иккита кетма–кет тоқ сонлар мос равишда

$2\,k-1,\ 2\,k+1$ кўринишда бўлса ($k\ \in Z$),

у ҳолда

$$2^n=(2k-1)+(2k+1)$$

тенгликдан $k=2^{n-2}$ келиб чиқади, яъни

$$2^n=(2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1).$$

b) Агар

$$3^n = (s-1) + s + (s+1)$$

бўлса, бу тенгликдан $s = 3^{n-1}$ келиб чиқади, яъни

$$3^n = (3^{n-1}-1) + 3^{n-1} + (3^{n-1}+1)$$

c) $m^n = (2k+1) + (2k+3) + \cdots + (2k+2m-1)$

тенглик

$$m^n = 2km + (1 + 3 + \cdots + 2m - 1) + m^2$$

тенгликка тенг кучли.

Бу ердан,

$$k = \frac{m(m^{n-2}-1)}{2}$$

ни топамиз. $m,\ m^{n-2}-1$–сонлардан биттаси албатта жуфт сон бўлганлиги учун бу сон бутун сон. ▲

7-масала. Ихтиёрий m ва n бутун сонлар $mn(m+n)$ сони жуфт сон бўлишини исботланг.

Ечилиши. Агар m ва n сонлардан бирортаси жуфт бўлса, у ҳолда $mn(m+n)$ сони жуфт сон бўлиши маълум. Шунинг учун m ва n сонлар иккаласи ҳам тоқ бўлади деб фараз қиламиз. У ҳолда, иккита тоқ сонларнинг m+n йиғиндиси жуфт сон бўлганлиги сабабли $mn(m+n)$ сони жуфт бўлади.▲

8-масала. n натурал сон учун $3^{2^n}+1$ сони жуфт бўлиб, аммо 4 га бўлинмаслигини исботланг.

Ечилиши. Маълумки, 3^{2^n} сони тоқ, демак $3^{2^n}+1$ сони жуфт бўлади.

Қуйидагига эгамиз:

$$3^{2^n} = (3^2)^{2^{n-1}} = 9^{2^{n-1}} = (8+1)^{2^{n-1}} = 8A + 1$$

бу ерда A – натурал сон. Демак, $3^{2^n}+1 = 8A+2$. Охирги сон эса 4 га бўлинмайди.▲

9-масала. $1^{2009} + 2^{2009} + \cdots + 16^{2009}$ натурал сон 17 га бўлинишини кўрсатинг.

Ечилиши. Маълумки, ихтиёрий $k = 1,2,\ \ldots,\ 16$ учун

$$(17-k)^{2009}=17A-k^{2009}$$

тенглик ўринли, бу ерда A – натурал сон.

Демак, $k^{2009}+(17-k)^{2009}$ сони 17 га бўлинади.

$$1^{2009}+2^{2009}+\cdots+16^{2009}=(1^{2009}+16^{2009})+(2^{2009}+15^{2009})+\cdots$$

бўлгани учун, берилган йиғинди ҳам 17 га бўлинади. ▲

10-масала. Барча натурал n сони ва m>2 тоқ сони учун $k=m^n$ сонни қараймиз. $1^k+2^k+\cdots+(m-1)^k$ сонини m га бўлинишини исботланг.

Ечилиши. Маълумки, $k=m^n$ кўринишдаги сон тоқ бўлади.

Демак, барча натурал $i=1,2,\ldots,\frac{m-1}{2}$ – сонлар учун

$$i^k+(m-i)^k=m(i^{k-1}-i^{k-2}(m-i)+\cdots+(m-i)^{k-1})$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликларни барчасини қўшиб чиқсак,

$$1^k+2^k+\cdots+(m-1)^k$$

сони m га бўлинишини ҳосил қиламиз. ▲

11-масала. x, y – бутун сонлар бўлсин. $2x+3y$ сони 17 га бўлиниши учун $9x+5y$ сони 17 га бўлиниши зарур ва етарли бўлишини исботланг.

Ечилиши. Қуйидагиларга эгамиз:

$$17|(2x+3y)\Rightarrow 17|\big(13(2x+3y)\big)\Rightarrow 17|(26x+39y)\Rightarrow 17|(9x+5y)$$

Демак, $2x+3y$ сони 17 га бўлинса, $9x+5y$ сони ҳам 17 га бўлинади. Бошқа тарафдан,

$$17|(9x+5y)\Rightarrow 17|\big(4(9x+5y)\big)\Rightarrow 17|(36x+20y)\Rightarrow 17|(2x+3y)$$

Демак, $9x+5y$ сони 17 га бўлинса, $2x+3y$ сони ҳам 17 га бўлинади.

12-масала. Маълумки, n^2+1 ва $(n+1)^2+1$ сонлар (n–натурал сон) бир вақтда d натурал сонга бўлинади. d сонини топинг.

Ечилиши.

$$d|(n^2+1), d|((n+1)^2+1)\Rightarrow d|(n^2+1), d|(n^2+2n+2)$$
$$\Rightarrow d|((n^2+2n+2)-(n^2+1))$$

$d|(2n+1) \Rightarrow d|(4n^2+4n+1)$

$$\Rightarrow d\big|\big(4(n^2+2n+2)-(4n^2+4n+1)\big) \Rightarrow d\big|(4n+7)$$

Демак, $d\big|\big((4n+7)-2(2n+1)\big) \Rightarrow d\big|5$

Охирги муносабат d=1 ёки d=5 бўлгандагина бажарилади. Бу иккита ҳол ҳам n=2 да ўринли. ▲

13-масала. Барча бутун n сонлар учун қуйидагиларни исботланг:

a) n^5-5n^3+4n сони 120 га бўлинади;

b) n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди.

Ечилиши.

a) $n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ бўлгани учун у 5 та кетма-кет натурал n-2, n-1, n , n+1, n+2 сонларнинг кўпайтмаси бўлади. Бундай сонлар эса $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ сонига бўлинади (текширинг).

б) $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$ тенглик бажарилишини кўрсатиш қийин эмас.

Агар $11|n^2+3n+5$ бўлса, у ҳолда $11\,|(n+7)(n-4)$, яъни $11\,|\,n+7$ ёки $11\,|\,n-4$ - бўлади.

$$(n+7)-(n-4)=11$$

бўлгани учун $121\,|(n+7)(n-4)$ бўлади. Аммо 33 сони 121 га бўлинмагани учун бу ҳолда n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди.

Агар, n^2+3n+5 сони 11 га бўлинмаса, у ҳолда n^2+3n+5 сони 121 га бўлинмайди. ▲

1.3- §. Энг катта умумий бўлувчи ва Энг кичик умумий каррали. Евклид алгоритми

Таъриф. $a,b \in Z, a \not\vdots b \quad \delta \in Z$. бутун сонларнинг умумий бўлувчиси $a_1, a_2, \ldots a_n$, агар $a_i : \delta(i=\overline{1,n})$. $d \in Z$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ бутун сонларнинг ЭКУБ и деб аталади агар:

а) d –шу сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса;

б) d шу сонларнинг ҳар қандай умумий бўлувчисига бўлинади.

Таърифдан кўриниб турибдики, бутун сонларнинг ЭКУБ и аниқ белгисигача аниқланган. $a_1, a_2, \ldots a_n$ бутун сонлар ЭКУБ и нинг фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва уни $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ ёки ЭКУБ$(a_1, a_2, \ldots a_n)$ деб белгилаймиз.

Лемма. Агар a=b q+r бўлса, у ҳолда ЭКУБ(a,b) = ЭКУБ(b,r) .

Икки бутун соннинг ЭКУБ и ни топиш масаласини ечамиз.

$a,b \in Z, a \not\vdots b$ бўлсин. a ни b га қолдиқли бўламиз: $a=b\, q_0+r_1,\ 0<r_1<|b|$.

Энди b ни $r_1 \vdots b=r_1\, q_0+r_2,\ 0<r_2<|b|$ га бўламиз ва ҳоказо.

Бу кетма-кет бўлиш жараёнини нолли қолдиқ ҳосил қилмагунча давом эттирамиз. Чунки $r_1 > r_2 > r_3 \ldots$ a, b(a $\not\vdots$ b, b $\not\vdots$ a) натурал сонларининг кетма-кетлиги тугалланмас бўлиши мумкин эмас, зеро $n \in N,$ шундай натурал сон борки, у $r_{k-1} : r_n$. Натижада тенглик занжирини ҳосил қиламиз:

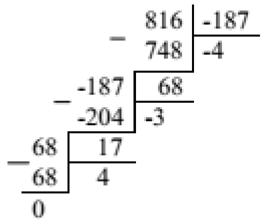
$$\left[\begin{array}{ll} a = bq_0 + r_1, & 0 < r < |b| \\ b = r_1 q_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ r_{n-2} r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1} & \\ r_{n-1} = r_n q_n, r_{n+1} = 0 & \end{array}\right. \qquad (1.2)$$

(1.2) тенгликдан $(a,b) = (b,r_1) = (r_1,r_2) = \ldots = (r_n,0) = r_n$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, қуйидаги теоремага келамиз.

2-Теорема. a, b(a $\not\vdots$ b, b $\not\vdots$ a) бутун сонларнинг ЭКУБ и a , b бутун сонлар учун Евклид алгоритмида охирги нолли бўлмаган қолдиққа тенг.

Мисол. 816,-187 бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш.

Ечим. 816,-187 бутун сонларга Евклид алгоритмини қўллаймиз:



Ҳисоблашимиздан кўриниб турибдики,
$816 = -187 \cdot (-4) + 68, -187 = 68 \cdot (-3) + 17, 68 = 17 \cdot 4$,

Нолдан фарқли қолдиқ 17 га тенг. Хусусан (816,-187)=17.

3-Теорема. $\exists\left(x, y \in Z\right), ax + by = d$ $a_i \in Z\left(i = \overline{1,n}\right)$.бўлсин. Агар,
$(a_1, a_2) = d_1, \left(a_3, d_1\right) = d_2, \left(a_4, d_2\right) = d_3, \ldots, \left(a_n, d_{n-2}\right) = d_{n-1}, токи \left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = d_{n-1}.$

Бутун сонлар ЭКУБ и қуйидаги хоссаларга эга:

1) катталигига кўра энг катта мусбат умумиий бўлувчи $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ шу сонларнинг ЭКУБ и ҳисобланади;

2) $a, b \in Z, m \in N,$бўлсин, у ҳолда $\left(am, bm\right) = m\left(a, b\right)$;

3) агар $a \vdots m \wedge b \vdots m,$ бўлса, у ҳолда, $\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) = \frac{\left(a, b\right)}{m}$

4) агар $d = \left(a, b\right),$ бўлса, у ҳолда, $\exists\left(x, y \in Z\right), ax + by = d$.

Ўзаро туб бутун сонлар. Энг кичик умумий каррали бутун сонлар.

Таъриф. $a_1, a_2, ..., a_n$ бутун сонлар ўзаро туб деб аталади, агар ЭКУБ $(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ бўлса.

Ўзаро туб сонларнинг хоссалари.

1. $a, b \in Z$ ўзаро туб ҳисобланади $\Leftrightarrow \exists\left(x, y \in Z\right) ax + by = 1.$

Исбот. а) Шартга кўра, $(a,b)=1$. ЭКУБ нинг 4-хоссасига кўра, $\exists(x,y\in Z)ax+by=1$.

в) Шартга кўра, $ax+by=1,(x,y\in Z)$. $(a,b)=d$ бўлсин. $ax+by=1\Rightarrow 1\vdots d, d\in N\wedge 1\vdots d\Rightarrow d=1$. Бундан кўринадики, a ва b ўзаро туб бутун сонлар.

Хулоса. Агар ЭКУБ$(a,b)=1\Rightarrow a\vdots a_1, b\vdots b_1\Rightarrow(a_1,b_1)=1.$

Энг кичик умумий каррали бутун сонлар

$k\in Z$ бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$ умумий каррали бутун сон деб аталади, агар $k\vdots a_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ бўлса.

$m\in Z$ бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$ энг кичик умумий каррали сон деб аталади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:

а) m - умумий каррали бутун сон $a_1,a_2,...,a_n$;

б) ҳар қандай умумий каррали бутун сон m га бўлинади.

Бутун сонларнинг ЭКУБ ини фақат мусбат қийматини кўриб чиқамиз ва ЭКУК$(a_1,a_2,...,a_n)$ ёки $[a_1,a_2,...,a_n]$ белгилаймиз.

1-Теорема. $\forall(a,b\in N),[a,b]=\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}.$

1-**хулоса** $\forall(a,b\in Z),a\neq 0;b\neq 0.$учун шу сонларнинг ЭКУБ и мавжуд.

2-**хулоса** $(a,b\in Z)$ энг кичик мусбат умумий каррали сони шу бутун сонларнинг ЭКУБ и ҳисобланади.

Бутун сонларнинг ЭКУКи хоссалари

2) $a,b\in Z,m\in N,$бўлсин, у ҳолда $[am,bm]=m[a,b]$;

3) агар $a\vdots m\wedge b\vdots m,$ бўлса, у ҳолда; $\left[\dfrac{a}{m},\dfrac{b}{m}\right]=\dfrac{[a,b]}{m}$

4) агар $d=(a,b),$ бўлса, у ҳолда $\exists(x,y\in Z),ax+by=d$.

1-масала. (*Қолдиқли бўлиш ҳақида теорема*). a ва b ($b\neq 0$) бутун сонлар бўлса, у ҳолда $a=bq+r$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона q ва r $(0\leq r<|b|)$ бутун сонлар мавжуд.

Ечилиши.

$[x]$ орқали $x \in R$ сонининг *бутун қисмини*, яъни x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонни белгилаймиз.

$\{x\} = x - [x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг *каср қисми* аниқланади.

Бутун қисм ва каср қисм таърифларидан бевосита

$$\frac{a}{|b|} = \left[\frac{a}{|b|}\right] + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $a = \left[\frac{a}{|b|}\right]|b| + \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b| = bq + r,$

бу ерда

$$q = \left[\frac{a}{|b|}\right] sgnb, r = a - bq = \left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b|.$$

Бундан, $bq + r$ ва $0 \leq r < |b|$.

Агар, $a = bq_1 + r_1$ тенглик бажарилса $(0 \leq r_l < |b|)$, у ҳолда

$$b(q - q_1) = r_1 - r$$

бўлади. $0 \leq r, r_1 < |b|$ тенгсизликлардан

$$|b||q - q_1| = |r_1 - r| < |b|$$

тенгсизлик келиб чиқади, бундан $|q - q_1| < 1$. q, q_1 сонлар бутун бўлгани учун $q = q_1, r_1 = r$ га эга бўламиз. ▲

Изоҳ. Юқоридаги q сон тўлиқсиз бўлинма, r сон эса a ни b га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ деб юритилади.

Натижа. a сонининг бирор бўлувчисига мос бўлган бўлинма ягонадир.

2-масала. $p > 3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ 1 ёки 5 га тенг бўлишини исботланг.

Ечилиши. $p > 3$ сон 6 га бўлинганда 2 ва 4 қолдиқлар ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон жуфт бўлар эди. $p > 3$ сон 6 га бўлинганда 3 қолдиқ ҳам ҳосил бўла олмайди, акс ҳолда p сон 3 га бўлинар эди. Демак, $p > 3$ туб сон 6 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ ёки 1 га ёки 5 га тенг бўлиши мумкин. ▲

Натижа. $p > 3$ туб сон $6n \pm 1$ кўринишга эга.

3-масала. $p > 3$ туб соннинг квадрати 12 га бўлинганда ҳосил бўлган қолдиқ 1 га тенг бўлишини исботланг:

Ечилиши. Олдинги масаланинг натижасига кўра $p = 6n \pm 1$ кўринишга, унинг квадрати эса $36n^2 \pm 12n + 1$ кўринишга эга. a ва b сонларнинг иккаласини ҳам бўладиган сон шу сонларнинг умумий бўлувчиси дейилади. D(a, b) орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. Маълумки, барча a ва b учун D(a, b) тўплам юқоридан чегараланган. Шунинг учун a ва b сонларининг умумий бўлувчилари ичида энг каттаси мавжуд бўлиб, шу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси дейилади ва (a, b) орқали белгиланади.

Хоссалар.

а) p туб сон бўлса, ихтиёрий натурал m сон учун $(p, m)=p(p, m)=1$ бўлади;

b) $d=(m, n), m = dm' , n = dn'$ бўлса , у ҳолда $(m', n') = 1$ бўлади;

c) $d=(m, n), m = d'm', n = d'n'$ ва $(m', n') = 1$ бўлса , $d = d'$ бўлади;

д) агар, $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ бўлса (бу ерда p_1, p_2, ..., p_k–туб сонлар, α_i, $\beta_i \geq 0$), у ҳолда $(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$ тенглик ўринли.

е) a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси шу сонларнинг барча умумий бўлувчиларига бўлинади.

4-масала. Агар a сони b сонидан кичик бўлмасдан, $a=bq+r$ $(0 \leq p<b)$ бўлса, у ҳолда $(a,b)=(b,r)$ бўлади.

Ечилиши. $D(a,b)$ орқали a ва b сонларнинг умумий бўлувчилари тўпламини белгилаймиз. $a = bq + r$ $(0 \leq r < b)$ ва $s \in D(a,b)$ бўлсин.
Демак, $r=a–bq$ сони s сонига бўлинади, яъни $s \in D(b,r)$. Аксинча, $s \in D(b, r)$ бўлса, у ҳолда $a = bq +r$ сони s га бўлинади, яъни $s \in D(a,b)$. Демак, a сони b сонидан катта бўлмасдан, $a=bq + r$ $(0 \leq r< b)$ бўлса, у ҳолда, $D(a,b)$, $D(b,r)$ тўпламлар устма-уст тушади. Бундан уларнинг энг катта элементлари ўзаро тенг бўлиши келиб чиқади, яъни $(a,b),(b,r)$.▲

Изоҳ. Барча a ва b нолмас сонлар учун a, b (a>b>0) сонлар учун қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремага кўра:

$$a = bq_1 + r_1.$$

Агар r_1=0 бўлса, у ҳолда (a,b)=b.

Агар r_1≠0 бўлса, у ҳолда $b = r_1 q_2 + r_2$.

Агар r_2=0 бўлса, у ҳолда жараённи тўхтатамиз, акс холда (яъни r_2≠0) давом эттирамиз: $r_1 = r_2 q_3 + r_3$..

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > 0$$

тенгсизликлардан жараён қолдиқ нолга айланганда тугаши келиб чиқади.

Демак, қўйидаги тенгликларга энг бўламиз :

$$a = bq_1 + r_1,$$

$$b = r_1 q_2 + r_2 ,$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}\ q_{n-1} + \ r_n ,$$

$$r_{n-1} = \ r_n\ \ q_n.$$

Бунда $(a,b) = (b, r_n) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Шундай қилиб, (a, b) ни топиш учун қолдиқли бўлиш жараёни 0 га тенг қолдиқ ҳосил бўлгунча давом эттирилади, 0 дан фарқли энг кичик қолдиқ a, b сонларининг энг катта бўлувчиси билан устма-уст тушади.

Мазкур жараён ***Евклид алгоритми*** дейилади.

5-мисол. 80 ва 21 сонлари учун Евклид алгоритмини тузамиз:

$$80=21\cdot 3+17;$$

$$21=17\cdot 1+4;$$

$$17=4\cdot 4+1;$$

$$4=1\cdot 4+0;$$

Бу жараёнда қолдиқларнинг монотон камайишидан кўринадики, *a* бутун сон ва b натурал сонлар учун Евклид алгоритми чекли қадамдан сўнг тўхтайди.

Энди Евклид алгоритмининг баъзи бир тадбиқлари билан танишиб чиқамиз.

Агар *a* бутун сон ва b натурал сон берилган бўлса, қолдиқли бўлиш ҳақидаги теоремага асосан $a = bq + r,\ 0 \le r < b;$. У ҳолда *(a, b) = (b, r*).

Яъни, a ва b ларнинг энг катта умумий бўлувчиси b ва r ларнинг энг катта умумий бўлувчисига тенг (исбот қилиб кўринг). Бу тасдиқни Евклид алгоритмига қўлласак, $(a,b)=r_n$ эканлиги келиб чиқади.

6-мисол. 1428 ва 2765 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини ва энг кичик умумий карралисини Евклид алгоритмидан фойдаланиб топайлик:

$$1428=2765\cdot 0+1428;$$

$$2765=1428\cdot 1+1337;$$

$$1428=1337\cdot 1+91;$$

$$1337=91\cdot 14+63;$$

$$91=63\cdot 1+28;$$

$$63=28\cdot 2+7;$$

$$28=7\cdot 4+0;$$

Демак, (1428, 2765)=7.

Бу сонларнинг умумий карралисини топиш учун эса $[a,b]\cdot(a,b)=a\cdot b$ формуладан фойдаланамиз.

$$[1428,2765]=\frac{1428\cdot 2765}{7}=395\cdot 1428=564060.$$

Изоҳ. Агар a сони b сонидан кичик бўлмаса, у ҳолда $(a, b)= (b, a-b)$ бўлади. ▲

7-масала. $(2n+13, n+7)$ ни топинг.

Ечилиши. $(2n+13, n+7)=(n+7, n+6)=(n+6, 1)=1$.▲

8-масала. (160, 72) – ?

Ечилиши. Евклид алгоритмини қўллаймиз:

160=72·2+16, 72=16·4+8, 16=8·2. Демак, (160, 72)=8. ▲

9-масала. a ва b сонларининг энг катта умумий бўлувчиси a ва b сонлар орқали *чизиқли ифодаланишини* исботланг, яъни шундай x ва y сонлари мавжудлигини кўрсатингки, улар учун

$$(a, b)=ax+ by$$

тенглик ўринли бўлсин.

Ечилиши. $(a, b)=d$ бўлсин. Евклид алгоритмини қўллаймиз:

$$a=bq_1\, r_1,\; b=r_1\, q_2+r_2, r_1=r_2\, q_3+r_3, \ldots,$$

$$r_{n-2}=r_{n-1}\, q_{n-1}+r_n, r_{n-1}=r_n\, q_n.$$

Бунда r_k қолдиқлар учун $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ тенгликлар бажарилишини кўрсатамиз, бу ерда $\alpha_k a,\ \beta_k b$ – бутун сонлар.

r_1 учун ушбу мулоҳаза ўринлилиги $r_1 = a - bq_1$ дан келиб чиқади. Фараз қиламиз, барча $r_1,\ r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-1}$ қолдиқлар $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ тенгликни қаноатлантирсин. У ҳолда, $r_n = \alpha_{n-2} a + \beta_{n-2} b - (\alpha_{n-1} a + \beta_{n-1} b)\ q_{n-1} = (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})\ a + (\beta_{n-2} - \beta_{n-1}\ q_{n-1})b$.

x ва y сонлари мос равишда $(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})$ ва $(\beta_{n-2} - \beta_{n-1}\ q_{n-1})$ ларга тенг. ▲

10-масала. (160, 72) ни 160 ва 72 сонлар орқали чизиқли ифодасини топинг.

Ечилиши. 160 = 72·2 + 16, 72 = 16·4 + 8, 16 = 8·2.

Иккинчи тенгликдан 8 = 72 – 16·4, биринчи тенгликдан эса, 16=160–72·2 келиб чиқади. Шу тенгликларга кўра:

$$8 = 72 - 16 \cdot 4 = 72 - (160 - 72 \cdot 2) \cdot 4 = (-4) \cdot 160 + 9 \cdot 72.$$

Демак, (160, 72)= 8 = (– 4) · 160 + 9 · 72. ▲

Маълумки, ўзаро туб a,b сонлар учун $(a,b) = 1$ тенглик бажарилади. Айрим адабиётларда бу тенглик ўзаро туб сонлар таърифи сифатида қабул қилинган.

Қуйидаги хоссага эгамиз:

Хосса. a,b сонлари ўзаро туб бўлиши учун $am+bn=1$ шарт зарур ва етарли, бу ерда m ва n бутун сонлар.

11-масала. Агар (a,b)=d бўлса, у ҳолда $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Ечилиши. $d=am+bn$ дан $\frac{a}{d}m + \frac{b}{d}n = 1$ келиб чиқади. ▲

12-масала $(a,\ b) = 1$ ва $a \mid bc$ бўлса, $a \mid c$ ни исботланг.

Ечилиши. $(a,b) = 1$ бўлса, $am + bn = 1$ бўлади, бу ерда m ва n– бутун сонлар. Бундан $acm + bcn = c$ тенглик келиб чиқади. Масаланинг шартига кўра, бу тенгликнинг чап тарафи a сонига бўлинади. Демак, бу тенгликнинг ўнг тарафи ҳам a сонига бўлинади, яъни $a \mid c$. ▲

13-масала. $27x + 4$ ва $18x + 3$ сонлар барча натурал x лар учун ўзаро туб бўлишини кўрсатинг.

Ечилиши. $3(18x + 3) - 2(27x + 4) = 1$ бўлгани учун улар ўзаро туб бўлади. ▲

14-масала. a ва b натурал сонлар учун маълумки, $a^2 + b^2$ сон ab га бўлинади. a=b тенгликни исботланг:

Ечилиши. $d = (a, b), a = du, b = dv$.

d^2 га қисқартириб, $u^2 + v^2$ сони uv га бўлинишини ҳосил қиламиз. Аммо, $(u^2 + v^2, uv) = 1$, чунки u ва v ўзаро туб. Демак, uv = 1.

Бундан u = v = 1, a = b = d эканлиги келиб чиқади. ▲

15-масала. $m \geq n$ бўлсин. Қуйидагиларни исботланг:

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1 (a > 1);$$

Ечилиши. Маълумки, $(a^n, a^n - 1) = 1$. Демак,

$$(a^m - 1, a^n - 1) = (a^m - a^n, a^n - 1) = (a^n(a^{m-n} - 1), a^n - 1)$$
$$= (a^{m-n} - 1, a^n - 1).$$

Шунинг учун $a^m - 1$, $a^n - 1$ сонлар учун Евклид алгоритми m,n даражалар учун Евклид алгоритмига ўтади ҳамда (m,n) ва 0 да тугалланади.▲

16-масала. Натурал сонлардан ташкил топган a_i кетма–кетлик учун $i \neq j$ ларда $(a_i, a_j) = (i, j)$ тенглик бажарилади. Барча i лар учун $a_i = i$ бўлишини исботланг.

Ечилиши. Ҳар бир a_i учун $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$ га бўлинганлиги боис $a_i \geq i$ бўлади .

Фараз қиламиз бирор i учун $a_i > i$ тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда,

$$(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i.$$

Бошқа томондан a_{a_i} сон a_i га бўлинганлиги учун $(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Зиддият.

17-масала. (*Россия, 2001*). Маълумки, ўзаро тенг бўлмаган натурал

a,b сонлар учун $a\,b\,|a^2+ab+b^2$ муносабат ўринли. $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$ тенгсизликни исботланг.

Ечилиши. $g=(a,b)$ деб олсак, $a=x\,g,\quad b=y\,g$ тенгликларга эга бўламиз, бу ерда *x, y* – ўзаро туб бўлган сонлар. Бундан,

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\frac{xy(x+y)g}{x^2+xy+y^2}\in Z$$

муносабатларга эга бўламиз.

$(x^2+xy+y^2,x)=(y^2,x)=1,(x^2+xy+y^2,y)=(x^2,y)=1,(x+y,y)=1$ тенгликлардан

$$(x^2+xy+y^2,x+y)=(y^2,x+y)=1$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Шунинг учун энг катта умумий бўлувчининг хоссаларидан $x^2+xy+y^2|\,g$ муносабатга эга бўламиз. Бундан $g\geq x^2+xy+y^2$. Демак, $|a-b|^3=|g(x-y)|^3g=g^2|x-y|^3g\geq g^2\cdot 1\cdot(x^2+xy+y^2)>g^2xy=ab$

18-масала (1–ХМО). Барча натурал *n* сонлар учун $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қисқармас каср бўлишини кўрсатинг.

Ечилиши. $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ бўлгани учун $21n+4$ ва $14n+3$ сонлар ўзаро туб, яъни $\frac{21n+4}{14n+3}$ каср қисқармас бўлади.▲

19-масала. *a, b, c* бутун сонлар берилган бўлсин. Шундай ўзаро туб k,l сонлар топиладики $a\,k+b\,l$ сон *c* га бўлинади. Исботланг:

Ечилиши. $|a|+|b|$ бўйича индукцияни қўллаб исботлаймиз. *a* = 0 ёки b = 0 бўлса натижа осонлигича келиб чиқади. k ва l сонларнинг ишорасини ўзгартиб, *a* > 0 ва b > 0 деб олишимиз мумкин.

Бу ҳолда $|a|+|b|>|a-b|+|b|$. Индукция фаразига кўра шундай ўзаро туб k' ва l' сонлар топиладики, улар учун $(a-b)k'+bl'$ сон *c* сонига бўлинади. Бундан $ak'+b(l'-k')$ сон *c* сонига бўлиниши келиб чиқади.

k' ва l' ўзаро туб бўлгани учун $k=k'$ ва $l=l'-k'$ ўзаро тублиги келиб чиқади. ▲

Таъриф. a ва b сонларининг мусбат умумий карралилари ичида энг кичиги шу сонларнинг энг кичик умумий карралиси дейилади ва у $[a,b]$ орқали белгиланади.

Хоссалар.

а) $m = [a, b]$, $m = aa' = bb'$ бўлса , у ҳолда $(a', b') = 1$ бўлади;

б) Агар m' сон, a b сонларнинг умумий бўлувчиси бўлиб,

$m' = aa' = bb', (a', b') = 1$ тенгликлар бажарилса, у ҳолда $m' = m$ бўлади;

с) Агар $a \mid s$ ва $b \mid s$ бўлса, у ҳолда $[a, b] | s$ бўлади;

д) Агар $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ бўлса (бу ерда $p_1, p_2 \dots p_k$ – туб сонлар, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, у ҳолда

$[m, n] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$ тенглик ўринли.

20-масала. Барча m, n бутун сонлар учун $[m, n] \cdot (m, n) = |mn|$ тенгликни исботланг:

Ечилиши. $[a, b] = [|a|, |b|]$ бўлгани учун фақат натурал m, n сонлар учун исботлаймиз.

$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ва $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ бўлсин (бу ерда n=1, 2 , ..., n , nk – туб сонлар, $\alpha_i, \beta_i \geq 0)$, у ҳолда

$$(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)} \quad \text{ва} \quad [m, n] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

тенгликлар ўринли. Бундан,

$$(m, n) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)} p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)} =$$

$$= p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)+\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)+\max(\alpha_k,\beta_k)} =$$

$p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k} = mn$ келиб чиқади. ▲

21-масала. Берилган m, n натурал сонлар учун $(m, n) = d, [m, n] = v$ сонлар $3\,m + n = 3\,v + d$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда n сони m нинг бўлувчиси эканлигини исботланг.

Ечилиши. Масала шартига кўра, шундай m_1 ва n_1 натурал сонлари мавжудки, улар $m = dm_1$, $n = dn_1$, $(m_1, n_1) = 1$ муносабатларни қаноатлантиради. У ҳолда, $v = m_1 n_1 d$ бўлади ва берилган тенглик

$$3m_1 d + n_1 d = 3m_1 n_1 d + d$$

кўринишни олади. Бундан

$$3m_1 + n_1 = 3m_1 n_1 + 1 \quad \text{ва} \quad (3m_1 - 1)(n_1 - 1) = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликдан $3m_1 - 1 \neq 0$ бўлгани учун n_1 =1 эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб,

$n = dn_1 = d$ ва $n = dn_1 = d$ яъни $n \mid m$ экан. ▲

22-масала. a, b, c – натурал сонлар берилган бўлсин.

а) Агар $[a, a + 5] = [b, b + 5]$ бўлса, a=b ни исботланг.

б) $[a, b] = [a + c, b + c]$ тенглик ўринли бўлиши мумкинми?

Ечилиши. б) қаралиши кифоя. а) унинг хусусий ҳоли сифатида қаралиши мумкин.

Фараз қиламиз, $[a, b] = [a + \text{c}, b + \text{c}]$ бўлсин.

$$(a, b) = (a + \text{c}, b + \text{c})$$

тенгликни исботлаймиз. $d = (a + c, b + c)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда, $a – b$ ва $[a, b]$ сонлар d га бўлинади.

d сонининг каноник ёйилмасида p^k учраса, у ҳолда $[a, b]$ сон p^k га бўлинади.

Бундан a, b сонлардан камида биттаси p^k га бўлиниши келиб чиқади.

a–b айирма p^k га каррали бўлгани сабабли, a, b сонлардан иккаласи ҳам p^k га бўлиниши келиб чиқади. Шунинг учун (a, b) сон $(a + c, b + c)$ га каррали. Худди шундай $(a + c, b + c)$ сон (a, b) га бўлиниши исботланади.

Демак, $(a, b) = (a + c, b + c)[m, n] \cdot (m, n) = mn$ формулани қўллаб,

$a\, b = (a + c)(b + c)$ зиддий тенгликни ҳосил қиламиз. ▲

1.4-§. Чекли занжир касрлар, муносиб касрлар хоссалари

Икки номаълумли чизиқли тенгламалар. a ва b натурал сонлар учун Евклид алгоритми қуйидагича бўлсин:

$$a = bq_1 + r_1 \quad 0 \le r_1 < b;$$

$$b = r_1 q_1 + r_2, 0 \le r_2 < r_1;$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, 0 \le r_3 < r_2;$$

....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 \le r_n < r_{n-1};$$

$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}; r_{n+1} = 0;$$

Ҳар бир тенгликни бўлувчиларга бўлиб чиқамиз:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b_1}; \qquad (1.3)$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}; \qquad (1.4)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2};$$

....

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \left(n+1\right).$$

Натижада тенгликлар ҳосил бўлади.

У ҳолда, $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$; (1.3) тенгликка (1.4) тенгликдаги $\frac{b}{r_1}$ қийматини қўйсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$$

ифодага эга бўламиз. Бу жараённи давом эттирсак,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3} + \cfrac{}{\ddots \cfrac{}{\cfrac{1}{q_n}}}}}$$

тенглик келиб чиқади.

Бу ифода $\frac{a}{b}$ рационал соннинг *занжир касрга ёйилмаси* дейилади. “Занжир каср ”, “узлуксиз каср ” деб ҳам аталади.

Занжир касрлар $[q_0, q_1, ...q_n]$ кўринишида белгиланади.

1-мисол. $\frac{120}{31} = 3 + \frac{27}{31} = 3 + \frac{1}{\frac{31}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{4}{27}} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{27}{4}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \frac{3}{4}}}$

ёки $\frac{120}{31} = [3, 1, 6, 4]$.

$\frac{a}{b} = [q_0, q_1, ..., q_n]$ занжир каср берилган бўлсин. У ҳолда $[q_0, q_1, ..., q_n], k \le n$ занжир каср, *k*- муносиб каср дейилади ва $\frac{P_k}{Q_k}$ кўринишда белгиланади. $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$ бўлиши аён.

Муносиб касрлар қуйидаги хоссаларга эга. Агар $k \ge 2$ бўлса,

1. $P_k = P_{k-1} \cdot q_k + P_{k-2}, Q_k = Q_{k-1} \cdot q_k + Q_{k-2}$;

2. $\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} ... < \frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n} < ... < \frac{P_5}{Q_5} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1}$;

3. $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k \cdot Q_{k-1}}$;

4. $P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1}$;

Бу хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан математик индукция методини қўллаш ёрдамида ҳосил қилиниши мумкин.

Масалан 1– хоссанинг исботини кўриб чиқайлик:

$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1}, \frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1};$ бўлгани учун $P_0=q_0, Q_0=1; P_1=q_0\cdot q_1+1, Q_1=q_1$ бўлиши равшан. У ҳолда, *k=2* учун

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\frac{1}{\frac{q_1q_2+1}{q_2}}=q_0+\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{q_0q_1q_2+q_0+q_2}{q_1q_2+1}=\frac{(q_0q_1+1)q_2+q_0}{q_1q_2+1}=\frac{P_1\cdot q_2+P_0}{Q_1\cdot q_2+Q_0};$$

Бундан, $P_2=P_1\cdot q_2+P_0; Q_2=Q_1\cdot q_2+Q_0$ ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, *k* натурал сон учун 1-хосса тўғри бўлсин. 1-хоссани *k+1* учун исбот қиламиз. Яъни, $\frac{P_k}{Q_k}=\frac{P_{k-1}\cdot q_k+P_{k-2}}{Q_{k-1}\cdot q_k+Q_{k-2}};$ бўлсин. $\frac{P_k}{Q_k}$ муносиб касрдан $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ муносиб касрни ҳосил қилиш учун q_k ни $q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$ билан алмаштириш кифоя.

Шунинг учун

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})+P_{k-2}}{Q_{k-1}(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})+Q_{k-2}}=\frac{P_{k-1}q_kq_{k+1}+P_{k-1}+q_{k+1}}{Q_{k-1}q_kq_{k+1}+Q_{k-1}+Q_{k-2}\cdot q_{k+1}}=$$

$$=\frac{(P_{k-1}q_k+P_{k-2})q_{k+1}+P_{k-1}}{(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2})q_{k+1}+Q_{k-1}}=\frac{P_k\cdot q_{k+1}+P_{k-1}}{Q_k\cdot q_{k+1}+Q_{k-1}};$$

Демак, $P_{k+1}=P_kq_{k+1}+P_{k-1}; Q_{k+1}=Q_kq_{k+1}+Q_{k-1};$

Қолган хоссаларни мустақил исбот қилиб кўринг.

4 - хоссадан $(P_k, Q_k)=1,$ яъни, муносиб касрнинг сурат ва махражи ўзаро туб бўлиши келиб чиқади. Чунки $P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(-1)^{k-1}$ сон P_k ва Q_k сонларнинг энг катта умумий бўлувчисига бўлинади.

Демак, $\frac{a}{b}$ каср қисқартирилмаган бўлса, у ҳолда $\frac{a}{b}$ ни занжир касрга ёйиб қисқартириш мумкин.

2-мисол. $\frac{1341}{2013}$ касрни занжир касрга ёйилик:

$$1341 = 2013 \cdot 0 + 1341$$
$$2013 = 1341 \cdot 1 + 672$$
$$1341 = 672 \cdot 1 + 669$$
$$672 = 669 \cdot 1 + 3$$
$$669 = 3 \cdot 223$$

У ҳолда

$$\frac{1341}{2013} = [0,1,1,1,3] = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{223}}}} = \frac{447}{671}$$

Агар $(a,b)=1$ бўлса, яъни $\frac{a}{b}$ каср қисқармас каср бўлса, у ҳолда $P_k \cdot Q_{k-1} - Q_k \cdot P_{k-1} = (-1)^{k-1};$ тенгликдан $P_n \cdot Q_{n-1} - Q_n \cdot P_{n-1} = (-1)^{n-1};$ ёки $a \cdot Q_{n-1} - b \cdot P_{n-1} = (-1)^{n-1};$ ҳосил бўлади. Бундан $a \cdot \left| Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \right| - b \cdot \left| P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \right| = 1;$ тенгликка эга бўламиз. Уни c га кўпайтирсак, $a \cdot \left| c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \right| - b \cdot \left| c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \right| = c;$ тенглик ҳосил бўлади. Демак, $(a,b)=1$ бўлганда

$$ax - by = c \tag{1.5}$$

тенгламанинг ечимларидан бири

$$\begin{cases} x_0 = c \cdot Q_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \\ y_0 = c \cdot P_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

ҳосил бўлади. (1.6) тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = x_0 + b \cdot m \\ y = y_0 + a \cdot m \end{cases} \tag{1.7}$$

формула билан ҳисобланади.

3-мисол. $25x - 16y = 9$ тўпламни бутун сонлар тўпламида ечинг.

$$\frac{25}{16}=1+\frac{9}{16}=1+\frac{1}{\frac{16}{9}}=1+\frac{1}{1+\frac{7}{9}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{7}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{7}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}$. Демак, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{11}{7}$. Топилган қийматларни (1.7) формулага қўйиб,

$$\begin{cases} x=9\cdot Q_1\cdot(-1)^3+16m, \\ y\ =9\cdot P_1\cdot(-1)^3-25m, \end{cases} m\in Z$$

Қийматларни, бундан $\begin{cases} x=9\cdot 7+16m=-63+16m \\ y\ =-9\cdot 11+25m=-99+25m \end{cases} m\in Z$

Умумий ечимни топамиз. Хусусий ечим сифатида $\begin{cases} x=-63 \\ y\ =-99 \end{cases}$ ни олиш мумкин.

Текшириш: $25\cdot(-63)-16\cdot(-99)=-1575+1584=9$

4-масала. Битта қутичада пашшалар билан чумолилар бор.

Уларнинг оёқлари сони 76 та. Пашшанинг 8 та дан оёғи, чумолининг эса 6 тадан оёғи бор бўлса, қутичада нечта пашша ва чумоли бор?

Ечиш. Фараз қилайлик қутичада x дона пашша ва y дона чумоли бор. Масала шартига кўра, 8x + 6y = 76 ёки 4x-(-3y)=38. Бундан $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$.

Демак, $\begin{cases} x=38+3m \\ y\ =-38-4m \end{cases} m\in Z$

Лекин масала шартига кўра x > 0, y > 0 . Топилган ечимларнинг мусбатларини олишимиз керак. Яъни $\begin{cases} 38+3m\geq 0 \\ -38-4m\geq 0 \end{cases} m\in Z$ Бундан $-\frac{38}{3}\leq m\leq -\frac{19}{2}$, ундан эса $-12\frac{2}{3}\leq m\leq -9\frac{1}{2}$ келиб чиқади. Агар, m=-10 ,бўлса, x=8; y=2; агар m=-11 ,бўлса, x=5; y=6; агар m=-12 бўлса, x=2; y=10 бўлади. Демак, масала ечими қуйидагилардан иборат:

1) $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=2 \\ y=10 \end{cases}$

Иррационал сонларни занжир каср кўринишда ифодалаш

Агар α иррационал сон берилган бўлса, унинг бутун қисмини ажратиб, қуйидагича ёзиб олишимиз мумкин: $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}$. Бу ерда $[\alpha]$ - берилган α иррационал соннинг бутун қисми, $\{\alpha\}$ - берилган α иррационал соннинг каср қисми бўлиб, албатта, $[\alpha]\geq 1, 0<\{\alpha\}<1, [\alpha] ни \frac{1}{\alpha_1}, (\alpha_1>1)$ кўринишда ёзиб олсак, $\alpha=q_0+\frac{1}{\alpha_1}$ ҳосил бўлади.

Энди α_1 учун юқоридаги жараённи такрорлаб, α_1 ни $\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}$ кўринишида ёзиб оламиз ва ҳоказо:

$$\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2}, q_1=[\alpha_1], \alpha_2>1;$$
$$\alpha_2=q_2+\frac{1}{\alpha_3}, q_2=[\alpha_2], \alpha_3>1.$$

Бу жараённи *n* марта такрорласак, $\alpha=[q_0,q_1,...,q_{n-1},\alpha_n]-$занжир каср ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттирсак, $\alpha=[q_0,q_1,...,q_{n-1},q_n,...]-$чексиз занжир каср ҳосил бўлади.

Агар α квадрат иррационаллик бўлса, яъни шундай a,b,c лар мавжуд бўлиб, $\alpha=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда α ни чексиз даврий занжир каср сифатида ифода қилиш мумкин.

Мисол. $\sqrt{2}$ ни чексиз даврий занжир касрга ёйинг.

Ечиш:

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=...=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+...}}}$$

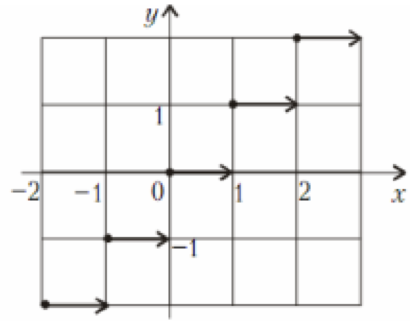
Демак, $\sqrt{2}=[1,(2)]$

1.5-§. Сонлар назариясида муҳим функциялар

Таъриф. $x \in P$ соннинг $[x]$ *бутун қисми* деб, x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади.

Масалан, $[-1{,}5] = -2, [-1] = -1, [0] = 0, [1{,}5] = 1, [\pi] = 3$.

Умуман олганда, таърифга биноан, $[x] = k$ тенглик қўйидагини билдиради: k сон $k \leq x < k + 1$ шартни қаноатлантирадиган бутун сондир.



1.1-расм

y=$[x]$ функциянинг графиги зинасимон кўринишга эга (1.1-расм).

$\{x\} = x - [x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг *каср қисми* аниқланади.

Масалан,

$$\{-0{,}3\} = 0{,}7, \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1, \{-2\sqrt{5}\} = 2 - \sqrt{2}, \{1\} = 0$$

Хоссалари:

1) $[x] \leq x$; 2) $[x + a] = [x] + a$, 3) $[x + y] \geq [x] + [y]$

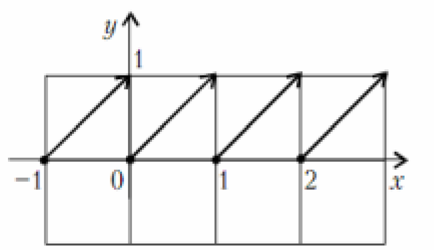
бу ерда a ихтиёрий бутун , x, y – ихтиёрий сонлар.

4) $\{x\} = x$ тенглик $0 \leq x < 1$ бўлгандагина бажарилади;

5) $\{x\}$=$\{y\}$ тенглик x-y=n (бу ерда n-бутун сон) бўлгандагина бажарилади;

6) Ихтиёрий x учун $\{x+1\}$=$\{x\}$ бўлади.

Шундай қилиб, y=$\{x\}$ функция энг кичик даври 1 га тенг бўлган даврий функциядир. Унинг графиги (1.2-расм) да келтирилган.



1.2-расм

1-масала. (II Сорос олимпиадаси). $x^2-10[x]+9=0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $[x]=k$ бўлсин. $k\ \geq 0$ эканлиги тушунарли.

$x\ \geq k$ бўлганлиги учун $x\ \geq 0.$ Натижада $x^2-10[x]+9\leq 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бундан $1\ \leq x\ \leq 9$ келиб чиқади, бундан $1\ \leq k\ \leq 9.$ x^2+9 сон 10 га бўлинувчи бутун сондир. Текширишлар шуни кўрсатадики, $1;\sqrt{61};\sqrt{71}$ сонлар тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб. $1;\sqrt{61};\sqrt{71}.$ ▲

2-масала . $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x]$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $[x]=k$. У ҳолда

$$\begin{cases} k\leq\dfrac{2x+1}{3}<k+1 \\ k\leq x<x+1 \end{cases}$$

тенг кучли системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\leq x<\dfrac{3k+2}{2} \\ k\leq x<x+1 \end{cases}$$

Бундан k қўйидаги тенгсизликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\quad k<\frac{3k+2}{2}.$$

Яъни, $-2<k<3$.

Шундай қилиб, k-1; 0; 1; 2 қийматларга эга бўлиши мумкин. Ушбу қийматларни кетма-кет (1) системага қўйиб ва ҳосил бўлган тенгсизликларни ечиб, қуйидаги жавобни топамиз.

Жавоб. $-1 \leq x < -\frac{1}{2}; 0 \leq x < 2; \quad \frac{5}{2} \leq x < 3$

3-масала. $[x^2] = 2[x]$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $[x] = k, \{x\} = \alpha.$. У ҳолда, $k \ \geq 0, \alpha \geq 0$ ва

$$[(k+\alpha)^2] = 2[k+\alpha],$$

шундан сўнг қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$[2k\alpha + \alpha^2] = 2k - k^2$. Бу тенгламанинг чап томони манфий эмас, k- бутун сон.

Демак, $2k - k^2 \geq 0$ ва k сони фақат 0, 1 ёки 2 қийматларга эга бўлиши мумкин.

k=0 бўлганда $0 \ \leq \alpha < 1$. Бундан $[\alpha^2] = 0$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $0 \ \leq x < 1$ келиб чиқади.

k=1 бўлганда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$[2\alpha + \alpha^2] = 1$$

Бу $1 \leq 2\alpha + \alpha^2 < 2,\ 0 \leq \alpha < 1$. Бундан $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1, \sqrt{2} \leq x < 2$ келиб чиқади. Ниҳоят, k = 2 бўлганда $[4\alpha + \alpha^2] = 0$ тенгламага эга бўламиз, бу эса

$$0 < 4\alpha + \alpha^2 < 1{,}0 < \alpha < 1$$

системага тенг кучлидир. Унинг ечими $0 \leq \alpha < \sqrt{5} - 2, \quad 2 \leq x < \sqrt{5}$ келиб чиқади. Ҳосил бўлган $0 \leq x < 1, \quad \sqrt{2} \leq x < 2$ va $2 \leq x < \sqrt{5}$ ораликқларни бирлаштириб жавобни ёзамиз.

Жавоб. $0 \leq x < 1, \quad \sqrt{2} \leq x < \sqrt{5}$ ▲

4-масала. Қуйидаги кетма-кетликни кўрамиз 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... (Кетма-кетликда битта бир, иккита икки, учта уч, тўртта тўрт, бешта беш ва ҳоказо).

Қайси сон

а) 2002–; б) n – инчи ўринда туради?

Ечилиши. Фараз қилайлик, $x_n = k$; $k - \ n$–ҳад. Берилган кетма-кетликда k сони биринчи пайдо бўлгунга қадар

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

сон кетма-кетлиги ёзилади. Охирги k сон $\frac{k(k+1)}{2}$ - ўринда туради. Шунинг учун,

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Бундан

$$k^2 - k < 2n \leq k^2 + k$$

келиб чиқади.

Охирги ҳосил бўлган тенгсизликнинг ўнг ва чап кисмига $\frac{1}{4}$ ни қўшиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4}$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$

У ҳолда,

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2}$$

Бундан:

$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1.$$

Натижада,

$$x_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

Берилган кетма-кетликнинг n-ҳадини ҳисоблаш формуласини ҳосил қилдик. Хусусан, $x_{2002} = 63$ ▲

Эслатма. Берилган *x* сондан кичик ва *n* натурал сонга бўлинадиган $k = \left[\frac{x}{n}\right]$ натурал сон мавжудлигини аниқлаш қийин эмас.

Бу содда эслатма сонлар назарияси учун муҳим битта формулани ҳосил қилиш имкониятини беради. Дастлаб қуйидаги масалани ечамиз.

5-масала. 100! сон иккининг қайси даражасига бўлинади?

Ечилиши. 1, 2, …, 100 сонлар орасида қуйидагилар мавжуд:

$\frac{100}{2} = 50$ та жуфт сон,

$\frac{100}{4} = 25$та 4 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{8}\right] = 12$ та 8 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{16}\right] = 6$та 16 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{32}\right] = 3$та 32 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{64}\right] = 1$та 64 га каррали сон.

Бундан $100\,! = 1\ \cdot 2\ \cdot 3\ \cdots \cdot 100$ кўпайтмада жами $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ та 2 сони қатнашади, яъни: 100! сон 2^{97} га бўлинади ва 2^{98} га бўлинмайди.

Жавоб. 97. ▲

Бу масала натижасини умумлаштирамиз.

6-масала (Лежандр формуласи). n! сон p туб соннинг қайси даражасига бўлинади?

Ечилиши. Худди юқоридагидек, ихтиёрий n ва туб p учун p га, p^2 га, …., p^k га каррали $\left[\frac{n}{p}\right]$та сон мавжуд. Агар $p^m \leq n < p^{m+1}$, бўлса, у ҳолда, n! ни каноник ёйилмасида p нинг даража кўрсаткичи $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^m}\right]$ га тенг.

Баъзи ҳолда қуйидаги ёзув қўлланилади:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \cdots$$

чунки ёзилган йиғиндида бирор жойдан бошлаб барча қўшилувчилар нолга тенг бўлади. ▲

7-масала . Агар x>0 ва n натурал сон бўлса, у ҳолда

$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ бўлишини исботланг.

Ечилиши. Равшанки, ($\alpha;\beta$) оралиқда $[\beta] - [\alpha]$ та бутун сонлар жойлашган.

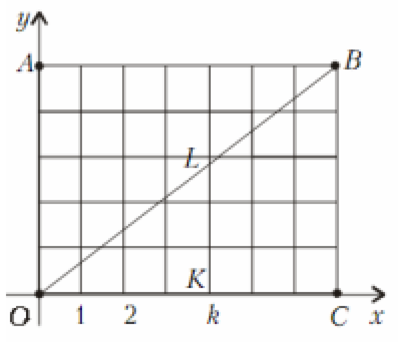
Ҳақиқатдан ҳам, агар m бутун сон $\alpha < m < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $[\alpha] + 1 \leq m < [\beta]$. Худди шундай, ($\alpha;\beta$) оралиқда $\left[\frac{\beta}{x}\right] - \left[\frac{\alpha}{x}\right]$ – та берилган $x > 0$ га каррали сонлар жойлашган.

x дан кичик ва n га бўлинадиган натурал сонларни кўрамиз. Бундай сонлар жами $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{0}{n}\right]$ та. Аммо $[x]$ дан катта бўлмаган ва n га бўлинадиган сонлар ҳам $\left[\frac{x}{n}\right]$ та. Тенглик исботланди. ▲

8-масала. p ва q –ўзаро бутун туб сонлар учун

$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \cdots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ эканлигини исботланг:

Ечилиши. $x\,O\,y$ текисликда бутун координатали ($x;y$) нуқталар тўпламини кўрамиз, бунда $1 \ \leq x \ \leq q-1, \ 1 \ \leq y \ \leq p-1$ шарт бажарилсин.



1.3-расм

Бу тўплам $OABC$ тўғри тўртбурчакнинг ичида ётиб (1.3-расм), жами (p-1)(q-1) та нуқталарга эга. Ушбу тўғри тўртбурчакнинг диагоналида O ва B нуқталардан бошқа бутун координаталарга эга бўлган нуқталар мавжуд эмас. Ҳақиқатдан ҳам, агар бутун координатали (t; p) нуқта OB да ётса, бу ерда (1 < m < q), у ҳолда $tg\ \angle BOC = \frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, яъни: $qn=mp$. q ва p ўзаро туб сонлар бўлганлиги сабабли n сон p га, m сон эса q га каррали, яъни, $m \ \geq q, \quad n \ \geq p$. Зиддият. Шунинг учун OBC учбурчакда қаралаётган бутун координатали нуқталарнинг тенг ярми, яъни $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ ётади.

Энди биз ушбу миқдорни бошқача усул билан ҳисоблаймиз.

x=k (k – ўзгарувчи натурал сон) бўлса, у ҳолда KL кесмада жами $\left[\frac{p}{q}k\right]$ та бутун координатали нуқта ётади (2.3 расм).

$1 \leq x \leq q-1,\ 1 \leq y \leq p-1$ бўлгани учун k сонни ўзгартириб, учбурчакда ётган бутун координатали нуқталарнинг умумий сони қуйидагича аниқланади:

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

Демак,

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

тенглик исботланди. ▲

Изоҳ. Худди шундай

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

формулани ҳам исботлаш мумкин.

9-масала (Хермит-4 формуласи). n - натурал, x - ҳақиқий сонлар учун

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

тенгликни исботланг:

Ечилиши. n сонини фиксирлаб,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

функцияни қараймиз. У ҳолда,

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1].$$

Ихтиёрий бутун k учун $[x+k]=[x]$ формулани қўллаб барча ҳақиқий x қийматларида

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x)$$

тенглик бажарилишини ҳосил қиламиз.

Демак, y=f(x) функция даврий функция бўлади ва у $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ ораликда айнан нолга тенг бўлишини текшириш қийин эмас.

Бундан y=f(x) функция барча ҳақиқий x қийматларида нолга тенг бўлиши келиб чиқади. ▲

10-масала. а) $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$; $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} > \underbrace{0{,}9 \dots 9}_{1001}$ сонлар тоқ эканлигини исботланг:

Ечилиши. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}$ ифодада қавсни очиб $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} = A + B\sqrt{3}$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда A ва B – натурал сонлар. Бундан

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = A - B\sqrt{3} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}.$$

Бу ҳолда

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = 2A$$

бўлади.

Бундан,

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002} = 2A - 1 + 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}$$

келиб чиқади.

Натижада, $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right] = 2\mathrm{A} - 1$ - тоқ сон, яъни

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} = 1 - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}$$

эканлиги келиб чиқади.

Ҳосил бўлган тенгликнинг ўнг қисмини баҳолаймиз:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}} = \frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

Шунинг учун $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\} > \underbrace{0{,}9 \dots 9}_{1001}$ ▲

Таъриф. Агар a ва b ўзаро туб сонлар учун $\vartheta(ab) = \vartheta(a)\vartheta(b)$ тенглик бажарилса, ϑ: $N \to R$ нолмас функция *мультипликатив* дейилади.

11-масала. $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ -мультипликатив функциялар бўлсин, у ҳолда:

а) $\vartheta(1) = 1$;

б) Мультипликатив функциялар $\vartheta(1) \cdot \vartheta(2)$ кўпайтмаси мультипликатив функция бўлади;

с) Агар $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда

$$\vartheta(a) = \vartheta\left(p_1^{\alpha_1}\right)\vartheta\left(p_2^{\alpha_2}\right) \dots \vartheta\left(p_n^{\alpha_n}\right);$$

д) Агар $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда қуйидаги *асосий айният* бажарилади.

(Чарли Хермит (1822-1901 йиллар.)- франциялик математик.)

$$\sum_{d|a} \vartheta(d) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \vartheta(p_i) + \vartheta\left(p_i^2\right) + \dots + \vartheta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)$$

Ечилиши. а) - нинг исботи *а* ва 1 сони ўзаро туб бўлганидан келиб чиқади.

б) *a, b* ўзаро туб сонларни фиксирлаймиз. $\vartheta 1$, $\vartheta 2$ – мультипликатив функциялар учун қўйидаги тенгликлар бажарилади:

$$(\vartheta_1\vartheta_2)(ab) = \vartheta_1(ab)\vartheta_2(ab) = \vartheta_1(a)\vartheta_1(b)\vartheta_2(a)\vartheta_2(b) = (\vartheta_1\vartheta_2)(a)(\vartheta_1\vartheta_2)(b)$$

Демак, иккита мультипликатив функция кўпайтмаси мультипликатив функция бўлади.

Индукция усули билан ушбу мулоҳаза бир нечта кўпайтувчилар учун исботланиши равшан.

с) - нинг ростлиги $p_1^{\alpha_1}, , p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ сонларининг ўзаро тублигидан келиб чиқади.

д) Агар *a* натурал сонининг каноник ёйилмаси $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда *a* нинг ҳар қандай бўлувчиси $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ ёйилмага эга бўлади, бунда

$$0 \le \beta_k \le \alpha_k, k = 1,2, \dots, n.$$

с) дан қўйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\vartheta(p_i)+\vartheta(p_i^2)+\cdots+\vartheta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)=\sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k}\vartheta\left(p_1^{\beta_1}\right)\vartheta\left(p_2^{\beta_2}\right)\ldots\vartheta\left(p_n^{\beta_n}\right)$$

$$=\sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k}\vartheta\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_n^{\beta_n}\right)\sum_{d|a\vartheta(d)}\vartheta(\mathrm{d}).$$

12-масала. $\theta(a)$ – ихтиёрий мультипликатив функция учун, $\chi(a)\sum_{d|a}\theta(d)$ функция ҳам мультипликатив бўлади.

Ечилиши.

$(a,b)=1, a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}, b=p_{k+1}^{\beta_2}p_{k+2}^{\beta_2}\ldots p_n^{\beta_n}$ бўлсин. У ҳолда, асосий айниятга кўра,

$$\chi(ab)=\sum_{d|ab}\theta(d)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\cdots+\theta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\cdots\right.$$

$$\left.+\theta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)\prod_{i=k+1}^{n}\left(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\cdots+\theta\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)=\theta(a)\theta(b)$$

Натижа:

Сонлар назариясида қуйидаги мультипликатив функциялар катта аҳамиятга эга: a натурал сонининг натурал бўлувчилари сони $\tau(a)$ ва $\sigma(a)$ йиғиндиси. Улар қўйидагича аниқланади: $\tau(a)=\sum_{d|a}1;\ \ \sigma(a)=\sum_{d|a}d$

($\sum_{d|a}$ белги a нинг барча бўлувчилар бўйича йиғиндини билдиради).

Асосий айният ва геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини ифодаловчи формула билан фойдаланиб a натурал сонининг натурал бўлувчилар сони $\tau(a)$ ва $\sigma(a)$ йиғиндиси учун

$$\tau(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)\ \sigma(a)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$$

формулалар ўринлилигига амин бўламиз.

Ҳақиқатдан ҳам, $p_i^{\alpha_i}$ нинг бўлувчилари 1, $p_i,\ldots,p_i^{\alpha_i}$ бўлгани учун

$$\tau\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_i + 1, \sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

бўлади. Функцияларни мультипликативлигидан

$$\tau(a) = \tau\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \tau\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i)$$

$$\sigma(a) = \sigma\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

формулалар келиб чиқади.

13-масала. p ва q – турли туб сонлар бўлсин. Қуйидаги сонлар нечта натурал бўлувчига эга?

а) pq;

б) p^2q;

с) p^2q^2;

д) p^mq^n

Ечилиши. а) Маълумки, pq соннинг бўлувчилари 1, p, q ва pq сонлар бўлади.

Демак, $\tau(pq) = 4$.

б) p^2q соннинг бўлувчилари $1, p, p^2, q, qp, qp^2$ сонлар бўлади. Демак, $\tau(p^2q) = 6$

с) p^2q^2 соннинг икки қатор бўлувчиларини ёзамиз:

$$1, p, p^2$$

$$1, q, q^2$$

Қолган бўлувчилар бу иккита қатордаги ақалли биттадан олинган сонларнинг кўпайтмаларидан ҳосил бўлади. Бундай сонлар жами 9 та.

Демак, $\tau(p^2q^2) = 9$

д) p^mq^n соннинг икки қатор бўлувчиларини ёзамиз:

$$1, p, p^2, \dots, p^m$$

$$1, q, q^2, \dots, q^n$$

Қолган бўлувчилар бу иккита қатордаги ақалли биттадан олинган сонларнинг кўпайтмаларидан ҳосил бўлади. Бундай сонлар жами $(m+1)(n+1)$ та. Демак,

$$\tau(p^m q^n) = (m+1)(n+1).$$

Жавоб:

а) 4;

б) 6;

с) 9;

д) $(m+1)(n+1)$. ▲

14-масала. Шундай натурал сонлар топилсинки, улар айнан олтита натурал бўлувчига эга бўлиб, бу бўлувчиларнинг йиғиндиси 3500 га тенг.

Ечилиши. n натурал сон айнан олтита натурал бўлувчига эга бўлса, у $n = p^5$ (бу ерда p–туб) ёки $n = p^2 q$ (бу ерда p ва q–турли туб сонлар) кўринишга эга.

Биринчи ҳолда $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$ ёки

$p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3500 - 1 = 3499.$

3499 сони 2, 3, 5 ва 7 га бўлинмайди, шунинг учун $p > 10$. Бунда

$p + (1 + p + p^2 + p^3 + p^4) > 10^5 > 3499$ тенгсизлик ўринли.

Демак, бу ҳол ўринли бўлмайди.

Иккинчи ҳолда $1 + p + p^2 + q + pq + p^2 q = 3500$, яъни

$(1 + p + p^2)(1 + q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4.$ Биринчи кўпайтувчи 2 га ва 5 га бўлинмайди. (Бунинг учун қолдиқларни текшириш етарли).

$1 + p + p^2 > 1$ бўлгани учун $1 + p + p^2 = 7$. Демак, $p = 2$ ва $q = 499$.

2 ва 499 сонлар туб бўлгани учун $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$. ▲

15-масала. 30 га бўлинадиган ва айнан 30 та турли бўлувчига эга бўлган натурал сонлар топилсин.

Ечилиши. $n = p_1^{n} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ бўлсин.

Бу сон 30 га бўлинганлиги учун каноник ёйилмага албатта $p_1 = 2, p_2 = 3$ ва $p_3 = 5$ туб сонлар киради, демак $k \geq 3$.

Бундан $(r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1) \dots (r_k + 1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ва $k \leq 3$ келиб чиқади. Демак, $k = 3$ ва (r_1, r_2, r_3) учлик 1, 2, 4 сонларнинг ўрин алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади. Бундан n учун қўйидаги қийматларни ҳосил қиламиз:

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4, \quad 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4, \quad 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5, 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \blacktriangle$$

16-масала. $\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$

ни исботланг:

Ечилиши.

$\{1, 2, \dots, n\}$ тўпламда k натурал сонига бўлинадиган сонлар $k, 2k, \dots, \left[\frac{n}{k}\right] k$ кўринишга эга бўлиб, уларнинг умумий сони $\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг.

Демак,

1 га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{1}\right]$ та;

2 га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{2}\right]$ та;

....

n га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{n}\right]$ та бўлади.

Буларнинг йиғиндиси $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \cdots + \tau(n)$ га тенг. ▲

Яна битта фойдали муносабатни исботлаймиз.

17-масала. $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + n\left[\frac{n}{n}\right]$.

Ечилиши. $\{1, 2, \dots, n\}$ тўпламда k натурал сонига бўлинадиган сонлар $k, 2k, \dots, \left[\frac{n}{k}\right] k$ кўринишга эга бўлиб, уларнинг умумий сони $\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг. Шунинг учун айнан k га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $k\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг.

Демак, 1 га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $\left[\frac{n}{1}\right] = n$ га, 2 га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $2\left[\frac{n}{2}\right]$ га, ..., n га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $n\left[\frac{n}{n}\right]$ га тенг. Буларни ҳаммасини қўшиб чиқсак, исботланилаётган тенгликнинг чап қисмини ҳосил қиламиз. ▲

18-масала.

а) Исталган n учун $\sigma(6n) \leq 12\sigma(n)$ тенгсизликни исботланг:

б) n нинг қандай қийматларида $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ тенглик бажарилади?

Ечилиши.

а) n нинг барча бўлувчилари $1 = d_1,\ d_2\ , \dots, d_k = n$ бўлсин. У ҳолда, $6n$ нинг барча бўлувчилари $d_1, d_2, \dots, d_k,\quad 2d_1, 2d_2, \dots, 2d_k,\quad 3d_1, 3d_2, \dots, 3d_k$ $6d_1, 6d_2, \dots, 6d_k$ сонлар бўлади. Лекин улар орасида ўзаро тенглари бўлиши мумкин.

Агар n нинг бўлувчилари орасида 2 ҳам, 3 ҳам бўлмаса, у ҳолда улар орасида тенглари бўлмайди. Бундан, $\sigma(n) = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ бўлгани учун

$$\sigma(6n) \leq \sigma(n) + 2\sigma(n) + 3\sigma(n) + 6\sigma(n) = 12\sigma(n)$$

б) $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ бўлиши учун n сони 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинмаслиги керак. ▲

$\varphi(x)$ орқали $\{1, 2, \dots, x\}$ тўплам ичида жойлашган ва x сони билан ўзаро туб бўлган сонлар сонини белгилаймиз.

Адабиётларда $\varphi(x)$функция - Эйлер[4] функцияси деб юритилади.

p – туб сон бўлсин. Юқорида биз қуйидаги тасдиқларни исботладик.

а) p дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар $p - 1$ та.

б) p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар $p^2 - p$ та. Демак, $\varphi(p) = p - 1, \varphi(p^2) = p^2 - p$.

Туб бўлмаган

$$x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

сонлардаги Эйлер функциясининг қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$\varphi(x) = x \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

[4] Эйлер Леонард (1707-1783 йиллар.) – швецариялик математик, механик, физик ва астроном. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва дифференциал геометрия соҳаларининг асосчиларидан бири.

Бу тенгликдан Эйлер функцияси мультипликатив функция бўлиши ҳамда

$$\varphi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^k - p^{k-1}$$

формула келиб чиқади.

19–масала (Гаусс масаласи).

$$\sum_{d|x} \varphi(d) = x$$

айниятни исботланг:

Ечилиши. $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Мультипликатив функциялар учун асосий айниятга кўра,

$$\sum_{d|x} \varphi(d) = \left(1 + \varphi(p_1) + \varphi(p_1^2) + \dots + \varphi\left(p_1^{a_1}\right) \dots = \right.$$

$$= \left\{1 + (p_1 - 1) + (p_1^2 - p_1) + \dots + \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1 - 1}\right)\right\} \dots = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} = x$$

Айният исботланди. ▲

20-масала. Қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi\big((m,n)\big)\varphi([m,n])$

б) $\varphi(mn)\varphi\big((m,n)\big) = \varphi(m)\varphi(n)(m,n)$

Ечилиши. а) Мультипликативликдан фойдаланиб, m ва n сонлар битта туб соннинг даражалари бўлган ҳолни қараймиз:.$m = p^\alpha, n = p^\beta$ $(\alpha \geq \beta \geq 0)$ У ҳолда, $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi\big((m,n)\big)\varphi([m,n])$ тенглик $[m,n] = m = p^\alpha$, $(m,n) = n = p^\beta$ тенгликлардан келиб чиқади.

б) Мультипликативликдан фойдаланиб, m ва n сонлар битта туб соннинг даражалари бўлган ҳолни қараймиз: $m = p^\alpha, n = p^\beta$ $(\alpha \geq \beta \geq 0)$. Берилган тенглик

$$\varphi\left(p^{\alpha+\beta}\right)\varphi\left(p^\beta\right) = \varphi(p^\alpha)\varphi\left(p^\beta\right)p^\beta$$

тенгликка тенг кучли.

Бу тенглик эса, $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ тенгликдан келиб чиқади. ▲

1.6-§.Туб сонлар тарихидан

Қадимги грек математиги Эратосфен дунёда биринчилардан бўлиб, ернинг ўлчамларини аниқлади, параллеллар ва меридианлар тушунчаларини киритди. Пифагор эса “ерни шар шаклида” деган фаразни ўртага ташлади: “Табиатда ҳамма нарса мукаммал, шунинг учун ҳам ер мукаммал кўринишда бўлиши даркор. Геометрик жисмлардан энг мукаммали шардир. Демак, ер шар шаклида бўлиши керак”. Лекин ернинг шар шаклида эканлигини исбот қилиш ва унинг радиусини ўлчаш фақат Эратосфенгагина насиб қилди. У биринчи бўлиб ер юзи харитасини тузиб чиқди. Ўша пайтда маълум бўлган Европа, Осиё, Ливия, Арабистон, Ариана, Ҳиндистонларгина унинг харитасидан жой олган (А. М. Куприн. Слово о карте. Изд. “Недра”, 1987).

Туб сонларни кўз олдимизда қуйидагича тасаввур қилишимиз мумкин. Ҳаёлан кўз олдингизга хонадонингиздан чиқиб, самога қараб чўзилиб кетган электр симини келтиринг. Бу симнинг ҳар бир метрига биттадан лампочка осилган бўлиб, бу лампочкалар кетма-кет натурал сонлар билан номерланган бўлсин. Симдан ток ўтганда фақат туб номерли лампочкалар ёнсин.

Энди тармоқ бўйлаб фазога саёҳат қилайлик. Кўз олдимизда қуйидаги ҳодисалар намоён бўлади:

1-лампочка ўчиқ, 2- , 3- кетма-кет иккита лампочка ёнган! Бунақаси бошқа учрамайди!

3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13; 17 ва 19; 29 ва 31; 41 ва43; 71 ва 73; 101 ва103 сонлар эгизак сонлар дейилади.

Биринчи юзта натурал сонлар билан номерланган лампочкалардан 75 таси ўчиқ ва 25 таси нур сочиб турган лампочкаларни кўрамиз.

Биринчи мингталикда 832 та ва 168 та.

Биринчи миллионталикда эса 921502 та ва 78468 та мос равишда ўчиқ ва нур сочувчи чироқларни кўрасиз.

Қоронғуликда учишни давом этайлик. Орқада ҳам, олдинда ҳам зим-зиё қоронғулик. Лекин уни учқунлари сўнмайди, чунки Евклид теоремасига асосан олдинда чексиз кўп нур сочувчи чироқлар учрайди.

Агар бизнинг учиш тезлигимиз ҳатто 300000 км/с, яъни ёруғлик тезлигига тенг бўлса ҳам нур сочувчи чироқлар кўринмайди. Лекин биз биламизки, П. Л. Чебишев теоремасига асосан, қанча масофа босиб ўтган бўлсак, яъни шунча масофадан сўнг яна нур сочувчи чироқ кўринади деб ўзимизга таскин бера оламиз.

Эътибор берсак, туб сонларга оид масалаларни ҳал қилиш жараёнида, буюк математикларнинг шавкатли меҳнатлари оқибатида математиканинг энг гўзал соҳаси – “Сонлар назарияси” ҳосил бўлди. Шуниси қизиқки, сонлар назарияси муаммолари қанчалик мураккаб бўлмасин, масаланинг мазмуни ҳатто мактаб ёки лицей ўқувчилар учун ҳам тушунарли.

Масалан, Голдбах муаммоси. 1742-йили Санкт-Петербург академиясининг аъзоси Голдбах Л. Эйлерга ёзган хатида қуйидаги фаразни баён қилди: Бешдан катта бўлган ҳар қандай натурал сон кўпи билан 3 та туб сон йиғиндиси сифатида ифода қилинади.

Ҳақиқатдан, 6=3+3, 7=5+2, 8=5+3, 10=7+3, 11=7+2+2 ва ҳоказо.

Кинбор 1000 гача, Обри 2000 гача, Миле 9000 гача Голдбах гипотезаси тўғри бўлишини текширганлар.

Голдбах муаммосидан яна иккита фараз (гипотеза) келиб чиқади:

- ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенг;

- ҳар қандай 7 дан кичик бўлмаган тоқ сон учта туб сон йиғиндисига тенг.

Эйлер Голдбах муаммосини ҳал қилгани йўқ, лекин у бу муаммони ҳал қилиш учун ҳар қандай 4 дан кичик бўлмаган жуфт сон иккита туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилиш етарли бўлишини кўрсатди.

Ҳақиқатдан, агар $2m - p_1 + p_2$ бўлса,

$$2n+1 = 2n+3-2 = 2(n-1)+3 = p_1^1 + p_2^1 + 3.$$

Лекин, 200 йил мобайнида Голдбах муаммосини ҳеч ким ҳал қила олгани йўқ. Фақатгина 1937-йили академик И. М. Виноградов ҳар қандай

7 дан катта тоқ соннинг 3 та туб сон йиғиндисига тенглигини исбот қилди. Бу теоремадан ҳар қандай 10 дан кичик бўлмаган жуфт сон 4 та туб соннинг йиғиндисига тенглиги келиб чиқади. Ҳақиқатдан,

$$2n-1=p_1+p_2+p_3 \text{ ёки } 2n=p_1^1+p_2^1+p_3+1=p_1^1+p_2^1+p_3+1=p_1^1+p_2^1+p_3+3-2.$$

$$\text{ёки } 2n+2=p_1^1+p_2^1+p_3+3.$$

Шундай қилиб, ҳозиргача Голдбах муаммоси тўлиқ ҳал қилингани йўқ.

Ушбу муаммога ўхшаш турли муаммоларни ҳал қилиш жараёнида сонлар назарияси фан сифатида шаклланди.

Ўрта асрларда сонлар назариясининг гуллаб яшнаши буюк француз математиги П. Ферма (XVII асрда яшаган) номи билан боғлиқ. Лекин, у ўз кашфиётларининг қолипга туширилган ёзма баёнини қолдирмаган.

Сонлар назарияси энг аввал фан сифатида Леонард Эйлернинг (1707-1783) илмий ишларида шаклланди. Л. Эйлернинг фаолияти ақлни лол қолдирадиган даражада бой. Л. Эйлер 1735-йили бир кўзи, 1766-йили иккинчи кўзи ҳам кўрмай қолишига қарамай, умрининг охирги йилларида унинг илмий фаоллиги камаймади, аксинча, ошиб борган. Унинг илмий ишлари 72 жилдлик асарлар тўпламида жамланган бўлиб, уларнинг юздан ортиғи сонлар назариясига бағишланган. П. Ферманинг деярли барча исботсиз келтирган теоремалари Эйлер томонидан тўлиқ исбот қилиниб, улар асосида кўпгина математик қонуниятлар кашф қилинди.

У ҳақида “Бошқалар учун нафас олиш жараёни қандай кечса, Эйлер учун ҳисоблаш жараёни шундай табиий жараён” ёки “Юраги уришдан тўхтаганда ҳам мияси ҳисоблашдан тўхтамаган математик” дейишади.

Эйлер туб сонларга оид изланишларида x=1, 2,..., 40 бўлганида туб сон бўладиган $p(x)=x^2-x+41$ кўринишдаги полиномни кашф қилди. $p(x)$ кўпҳаднинг биринчи 2398 та натурал сонлар орасидаги қийматларидан тенг ярмиси туб сонлар бўлишини исбот қилди. Шунингдек, $q(x)=x^2+x+72491$ кўпҳад орқали ифода қилинадиган 5000 та туб сонларни аниқлади.

Бундан ташқари, барча қийматлари туб сонлардан иборат n даражали кўпҳад мавжуд эмаслигини исботлаб, Эйлер ўз ишлари билан аддидтив сонлар назариясига асос солди. Сонлар назариясида кўпгина қонуниятларнинг исботи Эйлер номи билан боғлиқ. Лекин, ҳозирги кунга келиб ҳам ўз ечимини топмаган муаммолар жуда ҳам кўп.

Эгизак туб сонлар, яъни 3 ва 5; 5 ва 7; 11 ва 13;...; 239 ва 241 сонлар жуфтлиги чексиз кўпми ёки чеклими?

$2^n+1;\ 2^n-1; n^2+1.$ кўринишдаги туб сонлар чексиз кўпми?

Мерсен туб сонлари

Ихтиёрий p туб сон учун $M_p = 2^p - 1$ кўринишдаги туб сонлар мукаммал сонлар муаммоси билан жиддий шуғулланган француз монахи Мерсен шарафига *Мерсен туб сонлари* деб аталади.

Юқоридаги формулага асосан

$$M_2 = 3; M_3 = 7; M_5 = 31; M_7 = 127; M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$$

бўлишини ҳисоблаб топиш қийин эмас. Демак, $2^p - 1$ кўринишдаги сонларнинг ҳаммаси ҳам туб сон эмас экан.

1756-йили Л. Эйлер M_{31} туб сон бўлишини исбот қилди. Бир асрдан кўпроқ давр мобайнида M_{31} энг катта Мерсен туб сони бўлиб қолди. Француз математиги Лукас 1876-йили $M_{127} = 170141183460469231731687303715884105727$ сон Мерсеннинг туб сони бўлишини исботлади. Сўнгра Д. Х. Лемар ЭҲМ орқали P=521, P=607, P=1279, P=2203, P=2281 туб сонлар учун ҳам M, Мерсеннинг туб сонлари бўлишини кўрсатди.

Кейинчалик Ризел (1958), P=3217, Гурвис(1962) P=4253, P=4423, Гиллелс (1964) P=9689, P=9941, P=11213 сонлар учун M, Мерсен туб сонлари бўлишини аниқладилар.

Лукас топган M ни 39 та рақамдан ташкил топганлигини кўрган эдик, ҳозирда энг катта Мерсен туб сони 3376 рақамдан иборат бўлиб, бу сон Американинг Иллинойс университети математиклари томонидан ҳисоблаб топилган. Улар топган сонлари билан жуда ҳам фахрланадилар ва математика факультетидан юбориладиган ҳар бир хат солинган конверт устига шу сонни ёзиб қўядиган бўлдилар.

Табиий савол туғилади, M_M-Мерсен сони бўладими?

Масалан, $M_{M_2} = 2^3 - 1 = 7 -$ туб сон; $M_{M_3} = 2^7 - 1 = 127 -$ туб сон $M_{M_5} = 2^{31} - 1 -$ туб сон (Эйлер исбот қилган);

$M_{M_7} = M_{127} -$ туб сон (Лукас исбот қилган).

Ажойиб математик П. Ферма

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \tag{1.8}$$

кўринишдаги барча сонлар туб сонлар бўлишини тўлиқ ишонч билан айтган. (1.8) формула билан ифодаланадиган сонлар *Ферма сонлари* деб аталади.

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3; F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5; F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17; F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257; F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537;$$
$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 65536 \cdot 65536 + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

F_5 мураккаб сон бўлишини Эйлер кўрсатган.

F_n формула билан ифодаланадиган кейинги мураккаб сон $F_{12} = 2^{4096} + 1$ 1883-йили рус руҳонийси Первушин томонидан аниқланди.

Энди F_5 мураккаб сон эканлигининг исботини келтирамиз:

$$641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4 \to 5^4 \equiv -2^4 (\bmod 641), (2)$$
$$641 = 5 \cdot 128 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1 \to 5 \cdot 2^7 \equiv -1 (\bmod 641). (3)$$

(2) таққосламанинг иккита тарафини 2^{28} га кўпайтирамиз:

$$5^4 \cdot 2^{28} \equiv -2^{32} (\bmod 641).$$

(3) нинг иккала тарафини 4-даражага оширамиз:

$5 \ \cdot 2^{28} \equiv 1 (\bmod 641).$ ҳосил бўлса, охирги 2 та таққосламаларни бир-биридан айирсак, $2^{32} + 1 \equiv 0 (\bmod 641)$ ҳосил бўлади. Демак, $2^{32} + 1 \vdots 641.$

1.7-§. Систематик сонлар ва улар устида амаллар

Рақамни номлаш ва ёзишнинг ҳар қандай усули сонлар системаси деб аталади.

Барча сонлар системаси икки синфга бўлинади: позитцион ва нопозитцион. Сонларни ёзишда ишлатиладиган белгиларга рақамлар дейилади. Позитцион саноқ системасида берилган соннинг қиймати сонни тасвирловчи рақамларнинг эгаллаган ўрнига боғлиқ бўлади. Мисол сифатида, 0, 1, 2, 3,. . . , 9 араб рақамларидан ташкил топган ўнлик саноқ системани қараш мумкин, улар сондаги тутган ўринларга қараб турли қийматни акс эттиради.

Нопозитцион саноқ системаларида, белгининг қиймати унинг эгаллаган ўрнига боғлиқ эмас. Мисол сифатида рим рақамлари саноқ системасини келтириш мумкин. Масалан, XX сонида X рақами, қайерда жойлашганига қарамасдан ўнлик саноқ системасидаги 10 қийматини англатади.
Нопозитцион рим саноқ системаси 7 та белгидан иборат: I-1, V-5, X-10, L-50, C-100, D-500, V-1000. Бу саноқ системада сонларни ёзишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

1. Агар кичик белги катта белги олдида турса, айирув амали бажарилади.
2. Агар катта белги кичик белги олдида турса, қўшув амали бажарилади.

Масалан: CLV-155, CM-900.

Позитцион саноқ системаси

$M=\{0,1,2,...,q-1\}, q\in N, q\geq 2$ бўлсин. $a\in N$ сонни қуйидагича ифодалаймиз:

$$a=a_s q^s+a_{s-1}q^{s-1}+...=a_1 q+a_0 \qquad (1.9)$$

Бунда, $a_i\in M\left(i=\overline{1,s}\right), a_0\neq 0,\ q$- асосга кўра саноқ системасининг a сони дейилади. $a\in N$ сонининг қисқача кўриниши $a=\left(a_0 a_{s-1}...a_0\right)_q$.

Масалан, $589_{12}=5\cdot 12^2+8\cdot 12+9.$

Теорема: q асосга кўра, $\forall(a\in N)$саноқ системаси (1.9) кўринишда бўлиб, бир қийматли аниқланган.

Исбот: (1.9) ни математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a \in N, a < q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a = a$ келиб чиқади.

b) $a \in N, a \geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall(m \in N), 1 \leq m < a$ (1) қаноатлантира олсин.

a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = bq + a_0\left(a_0 \in M\right),$ бунда $b < a,$ у ҳолда фаразимизга индуктив ёндошиб, b ни қуйидагича тасвирлай оламиз:

$$b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \ldots + a_2 q + a_1, a_i \in M, a_s \neq 0\left(i = \overline{1,s}\right). \qquad (1.10)$$

(1.10) га кўра, $a = bq + a_0\left(a_0 \in M\right),$ тенгликдан:

$$a = a_s q^s + a_{s-1} q^{s-1} + \ldots + a_1 q + a_0 .$$

Математик индукция принципи ёрдамида (1.9) га эга бўлдик.

Ягоналиги: $\forall(a \in N)$ сон учун (1.9) ни ўринли эканлигини математик индукция принципи ёрдамида исботлаймиз.

a) $a \in N, a < q$ бўлсин. У ҳолда (1.9) дан $a = a$ келиб чиқади ва ягона.

b) $a \in N, a \geq q$ бўлсин. Фараз қилайлик, $\forall(m \in N), 1 \leq m < a$ (1.9) қаноатлантиради ва ягона.

$\forall(a \in N)$ бўлсин. (1.9) дан фарқлироқ q асосга кўра қуйидаги кўринишга келтира олишимиз мумкин:

$$a = b_s q^s + b_{s-1} q^{s-1} + \ldots + b_1 q + b_0 \qquad (1.11)$$

(1.9) ва (1.11) дан:

$$a = (a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \ldots + a_1) q + a_0 = (b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + \ldots + b_1) q + b_0.$$

Бу тенгликдан, қолдиқли бўлиш теоремасига кўра:

$$a_0 = b_0, b = a_s q^{s-1} + a_{s-1} q^{s-2} + \ldots + a_1 = b_s q^{s-1} + b_{s-1} q^{s-2} + \ldots + b_{1.}$$

$b < a$ дан индукция фаразимизга кўра $b) t = s, a_s = b_s, \ldots, a_1 = b_1.$

Шундай қилиб, $\forall(a \in N)$ учун (1.9) тенглик ягонадир.

Систематик сонлар устида амаллар

Ҳар хил сонлар системасида қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш амаллари 10 асосли саноқ системасида қоидага кўра бажарилади.

Мисоллар:

1. **Қўшиш ва айириш.**

$$\begin{array}{r} 5768_9 \\ +\ 6832_9 \\ \hline 13711_9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7632_9 \\ -\ 6858_9 \\ \hline 663_9 \end{array}$$

2. **Кўпайтириш, бўлиш.**

$$\begin{array}{r} 465_8 \\ 76_8 \\ \hline 3476 \\ 4163 \\ \hline 45326_8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 30 = 3\cdot 8 + 6 \\ 39 = 4\cdot 8 + 7 \\ 28 = 3\cdot 8 + 4 \\ 35 = 4\cdot 8 + 3 \\ 46 = 5\cdot 8 + 6 \\ 33 = 4\cdot 8 + 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 33162_8 & 457_8 \\ \cline{2-2} -\ 2753 & 56_8 \\ \cline{1-1} 3432 & \\ 3432 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 35 = 4\cdot 8 + 3 \\ 29 = 3\cdot 8 + 5 \\ 23 = 2\cdot 8 + 7 \\ 42 = 5\cdot 8 + 2 \\ 35 = 4\cdot 8 + 3 \\ 28 = 3\cdot 8 + 4 \end{array}$$

Бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтиш

$\forall(a \in N)$ p асосга кўра саноқ системаси бўлсин. a сонини q асосга кўра саноқ системасида ёзиш талаб қилинсин.

Фараз қилайлик, a сонини q асосга кўра саноқ системасида,

$$a = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0 .$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ сонларни топиш зарур. Бу p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўламиз: $a = b_0 q + a_0$.

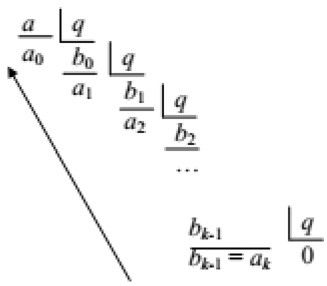
Худди шу саноқ системасида b_0 ни q га қолдиқли бўламиз.

$$b_0 = b_1 q + a_1.$$

Ва худди шундай давом эттирамиз. Бу жараён кетма-кет бажарилиб, ноль бўлинмага айлангунича давом этади.

$$b_{k-2} = b_{k-1} q + a_{k-1}, b_{k-1} = 0 \cdot q + b_{k-1}, b_{k-1} = a_k .$$

p асосга кўра саноқ системаси учун a ни q га қолдиқли бўлиш қуйидаги схема ёрдамида бажарилади.



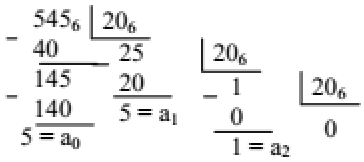
Стрелка тартиб йўналишини кўрсатади.

Агар $q < p$, у ҳолда a ни q га бўлгандаги $a_0, a_1, ..., a_k$ қолдиқлар кетма-кетлиги p асосга кўра саноқ системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра саноқ системасидаги a сонининг рақамлари бўлади.

Агарда, $p \geq q$ дан катта ёки тенг бўлса, у ҳолда q ва баъзи $a_0, a_1, ..., a_k$ қолдиқлар p асосга кўра саноқ системасининг ҳеч бўлмаганда бир рақамидан иборат бўлади. Бу рақамлар q асосга кўра саноқ системаси ёрдамида ёзилиши зарур.

Мисол: 545_6 сонини 12 асосли саноқ системаси кўринишда ёзинг.

12 сонини саноқ системасида 6 асосга кўра ёзиб оламиз: $12 = 2 \cdot 6 + 0 = (20)_6$.



Демак, $545_6 = 155_{12}$.

II-БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

2.1-§. Бутун сонлар халқасида таққосламалар, уларнинг хоссалари, чегирмалар синфи халқаси

Бизда *a, b,* бутун сонлар ҳамда $m > 1$ натурал сон берилган бўлсин. Агар a-b айирма m га қолдиқсиз бўлинса, у ҳолда a бутун сон b бутун сон билан m модул бўйича таққосланади дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m). \qquad (2.1)$$

Теорема. Иккита a ва b бутун сонлар m модул бўйича таққосланишлари учун уларни m га бўлганда бир хил қолдиқ чиқиши зарур ва етарли.

Исбот: $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлсин. У ҳолда, $a-b = mq, q \in Z.$ Демак, $a = mq + b.$ Агар $b = mq' + r, 0 \le r < m$ бўлса, $a = m(q+q') + r, 0 \le r < m.$ Яъни a ва b бутун сонларни m га бўлсак, бир хил қолдиқ қолар экан. Аксинча, агар $f = mq_1 + r, 0 \le r < m$ ва $b = mq_2 + r$ бўлса, у ҳолда $a-b = m(q_1 - q_2)$ ёки $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади.

Таққосламанинг асосий хоссалари. Қуйида биз таққосламанинг бевосита таққослама таърифидан келиб чиқадиган асосий хоссаларини келтирамиз. Бу хоссаларнинг барчасида *a, b, c, d* лар ихтиёрий бутун сонлар, m эса 1 дан катта натурал сон деб ҳисоблаймиз.

1^0. $a \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$

2°. Агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда $b \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади.

3°. Агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ ва $b \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда $a \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади.

4°. Таққосламаларни ҳадма-ҳад қўшиш ва ҳадма-ҳад кўпайтириш мумкин, агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ ва $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда $a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\, m)$ ва $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади.

5°. Таққосламанинг иккала тарафини ҳам ихтиёрий сонга кўпайтириш мумкин. Яъни, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда $ac \equiv bc(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади.

6°. Агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда $a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\, m)$ бўлади. Бу ерда n ихтиёрий натурал сон.

7° Таққосламанинг ихтиёрий қисмига модулга каррали сонни қўшиш мумкин:

$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ ва $k,\ l\ \in\ Z \Rightarrow$ a+km$\equiv$ $s(mod\, m)$ ва $a \equiv s + lm(mod\, m)$

8° $x \equiv u(mod\, m_l)$ ва $x \equiv u(mod\, m_2) \Leftrightarrow x \equiv u(mod[m_l, m_2])$

9° $x \equiv u(mod\, m)$ ва $a_k \in Z(k = 0,1, \dots, n)$ бўлса, у ҳолда $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0u^n + a_1u^{n-1} + \cdots + a_{n-1}u + a_n(mod\, m)$.

10° $x \equiv u(mod\, m)$ ва $a_k \equiv b_k(mod\, m),\ (k = 0,1, \dots, n)$ бўлса, у ҳолда

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$\equiv b_0u^n + b_1u^{n-1} + \cdots + b_{n-1}u + b_n(mod\, m)$$

11° $(a, p) = 1$ бўлсин. $ax \equiv ay(mod\, p) \Rightarrow x \equiv y(mod\, p)$

12° Агар $a \equiv b(mod\, d), a \equiv b(mod\, c), (d, c) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b(mod\, dc)$.

13° Агар $a \equiv b(mod\, d)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $c \in Z$ учун $ac \equiv bc(mod\, d)$.

14° Агар $ac \equiv bc(mod\, d)$ ва $(c, d) = 1$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b(mod\, d)$.

Юқоридаги хоссалардан, агар $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, у ҳолда коэффициентлари бутун сонлардан иборат $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ кўпҳад учун

$$f(a) \equiv f(b)(\mathrm{mod}\, m) \qquad (2.2)$$

бўлиши келиб чиқади.

Таққосламаларнинг хоссаларидан 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13 га бўлиниш аломатларини келтириб чиқариш мумкин.

Масалан: 9 га бўлиниш аломатини кўриб чиқайлик. Бунинг учун ихтиёрий натурал сон n учун таққосламадан фойдаланамиз. У ҳолда (2.1) таққосламага асосан $a_0a_1 \ldots a_n = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_{n-1}10 + a_n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n(\mathrm{mod}\, 9)$, яъни сон 9 га бўлиниши учун, унинг рақамлари йиғиндиси 9 га бўлиниши зарур ва етарли экан.

1-масала. Ихтиёрий натурал n сон учун қуйидагиларни исботланг:

а) $n^2 \equiv 0$ ёки $n^2 \equiv 1(mod\, 3)$

б) $n^2 \equiv 0$ ёки $n^2 \equiv \pm 1 (mod\, 5)$

с) $n^2 \equiv 0$ yoki $n^2 \equiv 1$ yoki $n^2 \equiv 4 (mod\, 8)$

д) $n^3 \equiv 0$ yoki $n^3 \equiv \pm 1 (mod\, 9)$

е) $n^4 \equiv 0$ yoki $n^4 \equiv 1 (mod\, 16)$

Ечиш. а) Қуйидаги ҳолларни қараб ўтамиз: $n \equiv -1,0,1 (mod\, 3)$. Бу ҳолларда $n^2 \equiv 1,0,1 (mod\, 3)$

б) Қуйидаги ҳолларни қараб ўтамиз:

$n \equiv -2, -1,0,1,2 (mod\, 3)$. Бу ҳолларда $n^2 \equiv -1,1,0,1, -1 (mod\, 3)$.

Шунга ўхшатиб, с); д); е) лар ҳам текширилади.

2.2-§. Эйлер функцияси. Эйлер ва Ферма теоремаси

m натурал сонга бўлинганида бир хил r қолдиқ қоладиган барча бутун сонлар тўплами m модул бўйича сонлар синфини ташкил қилади. Бу синфнинг ҳар бир сони умумий ҳолда $mk+r$, $k\in Z$ кўринишда ёзилади. Барча синфлар сони m га тенг.

Синфнинг ихтиёрий сони m модул бўйича чегирма дейилади (шу синфнинг бошқа сонларига нисбатан).

Ҳар бир синфдан ихтиёрий равишда биттадан олинган сонлар тўплами берилган m модул бўйича чегирмаларнинг *тўла синфи* дейилади.

Одатда чегирмаларнинг тўла синфи сифатида берилган m бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмалар, яъни 0, 1, 2, ..., m-1 система олинади. Баъзан берилган m модул бўйича чегирмалардан абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларнинг тўла системаси ҳам қаралади:
-(m-1), -(m-2), ..., -2, -1, 0. m модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла синфи ҳам ишлатилади. Масалан, m=7 бўлганда бу система -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 чегирмалардан иборат бўлади;
m=8 бўлганда эса -3,-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 ёки –4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 чегирмалардан ташкил топади.

Чегирмаларнинг тўла системасидан олинган ва m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системаси дейилади. Келтирилган системада чегирмалар сони $\varphi(m)$-Эйлер функциясининг қийматига тенг.

Чегирмаларнинг тўла системасидаги каби келтирилган системанинг ҳам уч тури ишлатилади: *энг кичик мусбат чегирмаларнинг келтирилган системаси, абсолют қиймати бўйича энг кичик манфий чегирмаларнинг келтирилган системаси ва абсолют қиймати бўйича энг кичик чегирмаларнинг келтирилган системаси.*

$x_1, x_2, ..., x_c$ бутун сонлар системаси $c=m$ ва $i\neq j$ да $x_i\equiv x_j(\mathrm{mod}m)$ бўлганда ва фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлади. (a,m)=1 бўлганда $ax+b$ чизиқли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

$x_1, x_2, ..., x_c$ бутун сонлар системаси $c=\varphi(m)$ ва $i\neq j$, $(x_i,m)=1$ да $x_i\equiv x_j(\mathrm{mod}\, m)$ бўлганда ва фақат шу ҳолда m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлади. $(a,m)=1$ бўлганда ax чизиқли форманинг қийматлари m модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши учун x қабул қиладиган қийматлар ҳам чегирмаларнинг келтирилган системасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир.

$m>1$ ва $(a,m)=1$ бўлганда қуйидаги таққослама ўринли: $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, бу ерда $\varphi(m)$–Эйлер функцияси (*Эйлер теоремаси*). p туб сон ва $(a,p)=1$ бўлганда қуйидаги таққослама ўринли:

$$a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p) \text{ (Ферма теоремаси[5]).}$$

a бутун сонни ўзида сақлайдиган m бўйича чегирмалар синфини $a(\mathrm{mod}\ m)$ билан белгилаймиз. Демак, $a(\mathrm{mod} m)=a+mZ=\{a+km;\ k\in Z\}$.

Z/mZ - билан m модул бўйича барча чегирмалар синфлари тўпламини белгилаймиз:

$$Z/mZ=\{0(\mathrm{mod} m),\ 1(\mathrm{mod} m),\ ...,\ (m-1)(\mathrm{mod} m)\}.$$

Бу тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидаги тенгликлар орқали киритилади:

$$a(\mathrm{mod} m)+b(\mathrm{mod} m)=(a+b)(\mathrm{mod} m),$$

$$a(\mathrm{mod} m)\cdot b(\mathrm{mod} m)=ab(\mathrm{mod} m)$$

$(Z/mZ,\ +)$ – абел группасидан, ҳамда Z группанинг mZ қисм группа бўйича фактор группасидан иборат бўлиб, m модул бўйича чегирмалар синфининг *аддитив группаси* дейилади.

$(Z/mZ,\ +)$ – бирлик элементли коммутатив халқадан иборат бўлиб, m модул бўйича чегирмалар *синфининг халқаси* дейилади.

---

[5] Ферма Пер (1601-1655 йиллар.) – франциялик адвокат ва математик. Аналитик геометриянинг асосчиси.

Агар $(a,m)=1$ бўлса, $a(\mathrm{mod}\, m)$ синф m модул билан ўзаро туб бўлган *чегирмалар синфи* дейилади.

m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфлари тўплами кўпайтиришга нисбатан абел группасини ташкил этади ва у m модул билан ўзаро туб бўлган чегирмалар синфларининг *мультипликатив группаси* дейилади.

Агар $ab\cdot 1(\mathrm{mod}\, m)$ бўлса, a чегирма b чегирмага m модул бўйича тескари дейилади.

1-мисол. 10 модул бўйича чегирмалар тўла системасининг учта турини ёзинг.

Ечиш. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – 10 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмаларнинг тўла системаси.

-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик манфий чегирмаларнинг тўла системаси.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ёки –5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системаси.

2-мисол. 10 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасининг учта турини ёзинг.

Ечиш. 1, 3, 7, 9 – 10 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган чегирмаларнинг келтирилган системаси.

-9, -7, -3, -1 – 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик манфий чегирмаларнинг келтирилган системаси.

-3, -1, 1, 3 чегирмалар 10 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг келтирилган системаси.

3-мисол. 20, -4, 22, 18, -1 сонлар қандай модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этади?

Ечиш. 5 модул бўйича берилган сонлар мос равишда 0, 1, 2, 3, 4 сонлар билан таққосланади, шунинг учун изланаётган модул 5 га тенг.

4-мисол. 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 сонлар системаси 7 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган сонлардан энг кичик мусбат чегирмаларни тузамиз: 3, 2, 6, 4, 5, 1, чунки, $3^2 \equiv 2(\mathrm{mod}7)$, $3^3 \equiv 6(\mathrm{mod}7)$, $3^4 \equiv 4(\mathrm{mod}7)$, $3^5 \equiv 5(\mathrm{mod}7)$, $3^6 \equiv 1(\mathrm{mod}7)$.

5-мисол. 383^{175} ни 45 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. $383 \equiv 23(\mathrm{mod}45)$ бўлганлиги учун $383^{175} \equiv 23^{175}(\mathrm{mod}45)$. Энди $\varphi(45)=24$ ва $(23,45)=1$ дан Эйлер теоремасига кўра: $23^{24} \equiv 1(\mathrm{mod}45)$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $23^{175}=23^{24\cdot 7+7}=(23^{24})^7 \cdot 23^7 \equiv 1^7 \cdot 23^7(\mathrm{mod}45)$. Шу тахлитда давом этиб, $23^7=(23^2)^3 \cdot 23 \equiv 34^3 \cdot 23 = 34^2 \cdot 34 \cdot 23 \equiv 1156 \cdot 782 \equiv 31 \cdot 17 = 527 \equiv 32(\mathrm{mod}45)$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $383^{175} \equiv 32(\mathrm{mod}45)$. Изланаётган қолдиқ 32 дан иборат.

6-мисол. х нинг ҳар қандай бутун қийматида $x^7 \equiv x(\mathrm{mod}42)$ таққосламани тўғрилигини кўрсатинг.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра, $x^7 \equiv x(\mathrm{mod}7)$. Энди $x^7 \equiv x(\mathrm{mod}2$ ва $3)$ эканлигини исбот қиламиз, бунинг учун 2 ва 3 модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла системасини, яъни 0, 1, 2 сонларни синаш етарли.

7-мисол. Бутун соннинг 100-даражасини 125 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. Агар $(a,5)=1$ бўлса, у ҳолда Эйлер теоремасига кўра:

$$a^{\varphi(125)} = a^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}125).$$

Агарда $(a,5) = 5$ бўлса, у ҳолда $a^{100} \equiv 0(\mathrm{mod}125)$. Демак, $(a,5) = 1$ бўлса, у ҳолда изланаётган қолдиқ 1 га тенг. Агарда $(a,5)=5$ бўлса, у ҳолда a^{125} сони 125 га бўлинади.

8-мисол. $2^{\varphi(m)-1}$ ни тоқ m сонига бўлинганида ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

Ечиш. $2^{\varphi(m)-1} \equiv r(\bmod m)$, $0 \le r < m$ бўлсин. У ҳолда $2^{\varphi(m)} \equiv 2r \equiv 1(\bmod m)$ ёки $r = \frac{1+mq}{2}$, бу ерда $q \in Z$. $0 \le r < m$ шартни $q=1$ да ягона $\frac{1+mq}{2}$ қиймат қаноатлантиради, бу ердан $r = \frac{1+m}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

9-мисол. 341 сони учун $2^{341} \equiv 2(\mathrm{mod}341)$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. 341–мураккаб сон, 341=11 31 $2^5 \equiv 1(\mathrm{mod}31)$ ва $2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}31)$ таққосламалар ўринли эканлигини осонгина текшириш мумкин.

Ферма теоремасига асосан $2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}11)$. 11 ва 13 сонлар ўзаро туб бўлганлиги учун бу ердан $2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}11 \cdot 31)$ келиб чиқади, яъни $2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}341)$. Демак, $2^{340} \equiv 1(\mathrm{mod}341)$ ва $2^{341} \equiv 2(\mathrm{mod}341)$ таққосламалар ўринли.

10-мисол. Агар ҳар бир бутун a сони учун $a^n \equiv a(\mathrm{mod}n)$ таққослама ўринли бўлса, n мураккаб сони *абсолют псевдотуб сон* дейилади. 561 нинг абсолют псевдотуб сон эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган сонни туб кўпайтувчиларга ажратамиз $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$. Ферма теоремасига асосан 561 билан ўзаро туб бўлган ҳар бир бутун a сони учун $a^2 \equiv 1(\mathrm{mod}3)$, $a^{10} \equiv 11(\mathrm{mod}11)$, $a^{16} \equiv 17(\mathrm{mod}17)$ таққосламалар ўринли бўлади. 3, 11, 17 туб сонлардан иборат бўлганлиги учун ва [2, 10, 16]=80 бўлганлигидан бу таққосламалардан қуйидаги таққосламалар келиб чиқади:
$a^{80} \equiv 1(\mathrm{mod}561)$, $a^{560} \equiv 1(\mathrm{mod}561)$. Демак, 561 абсолют псевдотуб сондан иборат.

11-масала (Ферма теоремаси). p туб сон учун $a^p \equiv a(mod\, p)$ таққослама ўринли бўлади.

Исбот. a бўйича индукцияни қўллаймиз. $a=1$ да натижа равшан. Фараз қиламиз, p| $a^p - a$, у ҳолда Ньютон биноми формуласига кўра,

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k$$

p| C_p^k, $k = 1, 2, \dots, p-1$, муносабатдан (текширинг) ва индукция фаразига кўра, p|$(a+1)^p - (a+1)$. Демак, $(a+1)^p \equiv (a+1)(mod\, p)$.

Изоҳ. Агар $(a,\ p)$=1 бўлса, у ҳолда Ферма теоремасидан қўйидаги муносабат келиб чиқади:

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$$

Таққосламаларнинг хоссаларига кўра қуйидагига эгамиз:

$$c_i \equiv d_i(mod\, p), i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow c_1 c_2 \dots c_n \equiv d_1 d_2 \dots d_n(mod\, p)$$

(a, p)=1 бўлсин. Қуйидаги сонларни киритамиз:

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$$

бу кетма-кетликда иккита турли ҳадлари p модул бўйича таққосланмайди. Ҳақиқатдан ҳам,

$$ia \equiv ja(mod\, p) \Rightarrow i \equiv j(mod\, p) \Rightarrow j = i$$

Демак, $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ –сонлардан ҳар бири 1, 2, 3, ..., p–1 сонлардан фақат биттаси билан p модул бўйича таққосланади.

Бундан,

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a = a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)$$
$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)(mod\, p)$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1), p \equiv 1$ бўлгани учун $a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$ бўлади.

12-масала. $ax \equiv 1(mod\, p)$ таққосламани қаноатлантирадиган барча x сонлар топилсин.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра бу сон $x \equiv a^{p-2}(mod\, p)$ таққослама билан аниқланади.

13-масала. (Вильсон теоремаси) p сон туб бўлса,

$$(p-1)! \equiv -1(mod\, p) \text{ бўлади.}$$

Ечиш. {2, 3, ..., p–2} сонлар тўпламини қараймиз. Олдинги масалага кўра, бу тўпламдаги ихтиёрий a сон учун $ab \equiv 1(mod\, p)$ таққосламани қаноатлантардиган ва шу тўпламга тегишли бўлган a дан фарқли ягона b сон топилади. {2, 3, ..., p–2} тўпламдаги барча сонларни жуфт-жуфти билан кўпайтириб чиқсак,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) \equiv 1(mod\, p)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан

$$(p-1)! \equiv (p-2)!\,(p-1) \equiv (p-1) \equiv -1(mod\, p)$$

келиб чиқади.

14-масала. (Вильсон тескари теоремаси). Агар n!+1 сон n+1 га бўлинса, у ҳолда n+1 сон туб бўлади.

Ечиш. Тескарисини фараз қиламиз. n+1—мураккаб сон бўлиб, n–унинг бирорта туб бўлувчиси бўлсин. p < n+1 бўлгани учун 1, 2, ..., n сонлардан биттаси p га тенг бўлади, яъни n! сон p га бўлинади. Зиддият.

15-масала. (Клемент теоремаси). p ва p+2 сонлар иккаласи ҳам туб бўлиши учун

$$4\big((p-1)!+1\big)+p \equiv 0(mod\, p^2+2p)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Ечиш. Вильсон теоремаларига кўра,

$$p - \text{туб} \Leftrightarrow 4\big((p-1)!+1\big)+p \equiv 0(mod\, p)$$

p+2 туб бўлиши $4\big((p-1)!+1\big)+p \equiv 0(mod\, p+2)$ таққослама бажарилишига тенг кучли бўлишини исботлаш қолди. Бунинг учун дастлаб $p \equiv -2(mod\, p+2)$ таққосламанинг иккала тарафини p+1 га кўпайтирамиз:

$$p(p+1) \equiv -2(p+1) = -2\big((p+2)-1\big) \equiv 2(mod\, p+2).$$

Энди 2(p-1)! га кўпайтирамиз:

$$2(p+1)! \equiv 4(p-1)!\,(mod\, p+2).$$

Бу таққосламанинг иккала қисмига p+4 ни қўшамиз:

$$2\big((p+1)!+1\big)+(p+2) \equiv 4\big((p-1)!+1\big)+p(mod\, p+2)$$

Вильсон теоремаларига кўра,

$$p+2 - \text{туб} \Leftrightarrow (p+1)!+1 \equiv 0(mod\, p+2) \Leftrightarrow 2\big((p+1)!+1\big)+(p+2) \equiv 0(mod\, p+2)$$

бундан $4\big((p-1)!+1\big)+p \equiv 0(mod\, p+2)$ эканлиги келиб чиқади.

16-масала. p туб сон барча бутун a b, сонлар учун $ab^p - ba^p$ – сони бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$b^p \equiv b(mod\, p), \qquad a^p \equiv a(mod\, p)$$

$$ab^p - ba^p \equiv ab - ab \equiv 0(mod\, p).$$

17-масала. p≥7 туб сон учун p–1 та рақамдан ташкил топган 11...1 сон p га қолдиқсиз бўлинишини исботланг:

Ечиш. (10, p)=1. Демак, Ферма теоремасига кўра

$$11\ldots1 = \frac{10^{p-1}-1}{9} \equiv \frac{1-1}{9} \equiv 0(mod\, p).$$

18-масала. p туб сон учун $(a+b)^p \equiv (a^p + b^p)(mod\, p)$ таққослама ўринли бўлади.

Ечиш. Ферма теоремасига кўра,

$$a \equiv a^p(mod\, p), b \equiv b^p(mod\, p), (a+b)^p \equiv (a+b) \equiv a+b \equiv (a^p + b^p)(mod\, p).$$

19-масала. (Эйлер теоремаси). Агар (a,m)=1 бўлса, у ҳолда

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\, m)$$

$n = \varphi(m)$ белгилаймиз.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар {1, 2, ..., m } тўплам ичида жойлашган ва m сони билан ўзаро туб бўлган ўзаро тенг бўлмаган сонларни ажратамиз. Маълумки, улар бир-бири билан m модул бўйича таққосланмайди.

Қуйидаги сонларни киритамиз:

$$ax_1, ax_2, \ldots, ax_n$$

Бу кетма-кетликда ҳам иккита турли ҳадлари m модул бўйича таққосланмайди.

Ҳақиқатдан ҳам, $x_i \neq x_j$ ва $x_i a \equiv x_j a(mod\, m)$ бўлсин. У ҳолда (a,m)=1 бўлгани учун $x_i \equiv x_j(mod\, m)$ бўлади. Бу эса $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонларнинг бир-бири билан m модул бўйича таққосланмаслигига зид.

$(a, m) = 1, (x_i, m) = 1$ бўлгани учун (a,m)=1 бўлади, яъни $ax_i \equiv x_j(mod\, m)$

Бу таққосламаларни i=1, 2, ..., n бўйича кўпайтириб чиқсак

$$ax_1 \cdot ax_2 \cdot \ldots \cdot ax_n = a^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \equiv x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n(mod\, m)$$

ни ҳосил қиламиз. $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, m) = 1$ бўлгани учун $a^n \equiv 1(mod\, m)$ бўлади.

Изоҳ. $\varphi(p) = p - 1$ бўлгани учун Ферма теоремаси Эйлер теоремасидан бевосита келиб чиқади.

20-масала. Маълумки, a бутун сон учун $a^{10} + 1$ сон 10 га бўлинади. a ни топинг.

Ечиш. Маълумки, (a,10)=1, акс ҳолда $a^{10} + 1$ ва 10 сонлар ўзаро туб бўлади. $\varphi(10) = 4$ бўлгани учун, Эйлер теоремасига кўра

$a^{10} + 1 \equiv 0(mod\, 10)$ таққослама $a^2 + 1 \equiv 0(mod\, 10)$ таққосламага тенг кучли. $a = \pm 1, a = \pm 3$ ҳолларни қараб чиқиб, $a \equiv \pm 3(mod\, 10)$ ечимни топамиз.

Жавоб. $a \equiv \pm 3(mod\, 10)$.

21-масала. p>5- туб сон бўлса, $p^8 \equiv 1(mod\, 240)$ ни исботланг:

Ечиш. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ферма теоремасига кўра, $p^2 \equiv 1(mod\, 3)$ ва

$p^4 \equiv 1(mod\, 5) \cdot \varphi(2^4) = 2^3$ бўлгани боис, Эйлер теоремасига кўра

$$p^8 \equiv 1(mod\, 16)$$

Демак, $p^8 \equiv 1(mod\, m), m = 3,5,16$, яъни $p^8 \equiv 1(mod\, 240)$.

22-масала. (ХМО-2005). $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1,\ n = 1, 2,$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари билан ўзаро туб бўлган натурал сонларни топинг.

Ечиш. n=1 ягона ечим бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун ихтиёрий туб сон берилган кетма-кетликнинг қандайдир ҳади бўлишини исботласак етарли. Маълумки, p=2 ва n=3 сонлар $a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$ бўлади.

Шунинг учун, $p \ \geq 5$ бўлган ҳолини қараймиз. Ферма теоремасига кўра

$$2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$$

Демак,

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6(mod\, p) \text{ yoki } 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2}) \equiv 0(mod\, p)$$

Бундан p| 6 a_{p-2} келиб чиқади. (6,p)=1 бўлгани учун, p| a_{p-2} бўлади.

2.3-§. Биринчи даражали таққосламалар ва уларнинг ечиш усуллари

n-даражали бир номаълумли таққослама деб қуйидаги кўринишдаги таққосламага айтилади:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0\left(\mathrm{mod}\, m\right),$$

Бу ерда $a_0 \equiv 0(\mathrm{mod}m)$, $a_i \in Z$, $i=0,\ n,\ n-1$ манфий бўлмаган бутун сон. *Таққосламани ечиш – уни қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини топиш демакдир.*

Агар берилган таққосламани бирор x=α қиймат қаноатлантирса, у ҳолда бу таққосламани α билан m модул бўйича таққосланадиган барча сонлар ҳам қаноатлантиради: $x \equiv \alpha(\mathrm{mod}m)$, ёки, $x=mk+\alpha$, яъни, m модул бўйича α тегишли бўлган чегирмалар синфининг барча чегирмалари қаноатлантиради. Ҳар бир синф битта ечимни ташкил этади.

Демак, таққосламани ечиш – уни қаноатлантирадиган чегирмаларнинг барча синфларини топишдан иборат.

Ҳар бир синфдан биттадан олинган чегирмалар тўла системани ташкил этганлиги учун таққосламани қаноатлантирадиган сонлар синфини аниқлаш, чегирмаларнинг тўла системасидан уларга мос келадиган чегирмаларни топишдан иборат экан. Одатда α сифатида берилган модул бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар олинади. Шундай қилиб, тўла системанинг нечта чегирмаси берилган таққосламани қаноатлантирса, таққослама шунча ечимга эга бўлади.

Агар бир хил x номаълумли ва бир хил модулли иккита таққосламани x номаълумнининг бир хил қийматлари қаноатлантирса, бундай таққосламалар тенг кучли дейилади.

Берилган таққосламага тенг кучли таққосламалар қуйидаги алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади:

а) берилган таққосламанинг иккала томонига ҳам бир хил сонни қўшиш натижасида;

б) берилган таққосламанинг ихтиёрий бир қисмига модулига каррали бўлган сонни қўшиш натижасида;

с) берилган таққосламанинг иккала томонини модул билан ўзаро туб бўлган сонга кўпайтириш (бўлиш) натижасида;

д) таққосламанинг иккала томонини ва модулини бир хил сонга бўлиш натижасида.

1-мисол. Қуйидаги таққосламаларни ечинг:

а) $x^3-2x+6\equiv0(mod11)$;

б) $x^4+2x^3+6\equiv0(mod8)$;

с) $x^4-x^3-x^2+5x-2\equiv0(mod6)$.

Ечиш. а) 11 модул бўйича абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидан иборат.

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

сонларни бевосита таққосламага қўйиб текшириш натижасида 5 сони таққосламани қаноатлантиришини ҳосил қиламиз. Ечимни $x\equiv5(mod11)$ кўринишда ёзамиз.

б) 8 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 да бирорта ҳам чегирма таққосламани қаноатлантирмайди, шунинг учун берилган таққослама ечимга эга эмас.

с) 6 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системаси -2, -1, 0, 1, 2, 3 да фақат иккита сон таққосламани қаноатлантиради: -1 ва 2. Берилган таққослама иккита ечимга эга: $x\equiv-1(mod6)$ ва $x\equiv2(mod6)$.

Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган таққослама берилган модул бўйича таққосламанинг натижасидан иборат бўлади.

2-мисол. $x^2-5x+6\equiv0(mod9)$ таққосламани ечинг.

Ечиш. Модулнинг бўлувчиси бўйича олинган таққосламани қараймиз: $x^2-5x+6\equiv0(mod3)$, бу ердан $x^2+x\equiv0(mod3)$ ёки $x(x+1)\equiv0(mod3)$, кўпайтувчиларнинг ҳар бирини алоҳида ечиб $x\equiv0;2(mod3)$ ни ҳосил қиламиз. Ечимларни чегирмалар синфи орқали $x=3q$; $3q+2$ шаклда ёзамиз. Энди $x=3q$ ни берилган таққосламага қўямиз: $9q^2-15q+6\equiv0(mod9)$, бу ердан $3q\equiv3(mod9)$, яъни, $q\equiv1(\mathrm{mod}3)$ ёки $q=1+3t$. Бу ердан $x=3+9t$ ёки $x\equiv3(\mathrm{mod}9)$ ечимни ҳосил қиламиз. $x=3q+2$ да берилган таққослама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$9q^2+12q+4-15q-10+6\equiv0(\mathrm{mod}9).$$

Бу таққосламани соддалаштиришлардан сўнг $3q\equiv0(\mathrm{mod}9)$ ёки $q\equiv0(\mathrm{mod}3)$ ни ҳосил қиламиз. $q=3t$ бўлганда бериладиган таққосламанинг иккинчи ечими $x=9t+2$ ёки $x\equiv2(\mathrm{mod}9)$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, берилган таққослама иккита ечимга эга экан: $x\equiv2;3(\mathrm{mod}9)$.

3-мисол. Тенг кучли таққосламага ўтиш билан қуйидаги таққосламани ечинг:

$$13x\equiv5(\mathrm{mod}47).$$

Ечиш. Таққосламанинг ўнг томонига 47 ни қўшамиз: $13x\equiv52(\mathrm{mod}47)$. Энди таққосламанинг иккала томонини 13 га қисқартириб, унинг ечимини ҳосил қиламиз: $x\equiv4(\mathrm{mod}47)$.

Биринчи даражали таққослама нинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$ax\equiv b(\mathrm{mod}m).$$

Бу таққосламани ечишда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) Агар $(a,m)=1$ бўлса, у ҳолда таққослама фақат ягона ечимга эга.

б) Агар $(a,m)=d>1$ бўлиб, b озод ҳад d га бўлинмаса, у ҳолда таққослама ечимга эга эмас.

с) Агар $(a,m)=d>1$ бўлиб, b озод ҳад d га бўлинса, у ҳолда таққослама d та ечимга эга бўлади ва бу ечимлар қуйидаги формулалар билан топилади:

$$x_k\equiv\alpha+\frac{(k-1)m}{d}(\mathrm{mod}\,m),k=1,2,...,d$$

бу ерда α - қуйидаги таққосламанинг ечимидан иборат:

$$\frac{a}{d}x\equiv\frac{b}{d}\left(\mathrm{mod}\frac{m}{d}\right).$$

$ax\equiv b(\bmod m)$ таққосламани ечиш усулларини фақат $(a,m)=1$ бўлганда қараб чиқамиз, учинчи ҳолда таққослама d га қисқартирилгандан сўнг биринчи ҳолга келтирилади.

Биринчи даражали таққосламаларни ечишда қуйидаги учта усул қўлланилади:

а) ечим m модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларнинг тўла системасидаги сонларни бевосита синаш усули билан топилади.

б) *Эйлер усули.* Ечим қуйидаги формула билан топилади:

$$x\equiv ba^{\varphi(m)-1}(\bmod m),$$

бу ерда $\varphi(m)$–Эйлер функцияси;

с) чекли узлуксиз касрлар ёрдамида қуйидаги формула билан ечим топилади:

$$x\equiv(-1)^n bP_{n-1}(\bmod m),$$

бу ерда $P_{n-1}-\dfrac{m}{a}$ касрни узлуксиз касрга ёйганда ҳосил бўладиган охиргисидан битта олдинги муносиб касрнинг суратидан иборат.

Баъзи ҳолларда таққосламаларнинг хоссаларига асосланган алмаштиришлар орқали берилган таққослама осон ечилади (3-мисолга қаранг).

4-мисол. Қуйидаги таққосламани Эйлер усули билан ечинг:

$$9x\equiv 8(\bmod 34).$$

Ечиш. (9,34)=1 бўлганлиги учун берилган таққослама ягона ечимга эга бўлади. $\varphi(34)=16$ ни ҳисоблаб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$x\equiv 8\cdot 9^{15}\equiv 8\cdot 3^{30}\equiv 8\cdot 3^{14}\equiv 8\cdot(2187)^2\equiv 8\cdot 11^2\equiv 16(\bmod 34).$$

5-мисол. Таққосламани узлуксиз касрлар орқали ечинг:

$$285x\equiv 177(\bmod 924).$$

Ечиш. (285,924)=3 ва 177=59·3 бўлганлиги учун берилган таққослама учта ечимга эга.

Таққосламанинг иккала томонини ва модулини 3 га бўламиз:

$$95x\equiv 59(\bmod 308).$$

$\frac{308}{95}$ касрни узлуксиз касрга ёямиз: $\frac{308}{95}$=(3, 4, 7, 1, 2). Муносиб касрлар жадвалини тузамиз:

2.1-жадвал

q_i		3	4	7	1	2
P_i	1	3	13	94	107	308

Шундай қилиб, $P_{n-1}=P_4=107$, демак, $x\equiv(-1)^4\cdot107\cdot59(\mathrm{mod}308)$, бу ердан натижа таққосламанинг ечими $x\equiv153(\mathrm{mod}308)$ ни ҳосил қиламиз. Берилган таққосламанинг ечимлари қуйидагича тасвирланади:

$$x\equiv153;\ 461;\ 769(\mathrm{mod}924).$$

Биринчи даражали таққосламаларни биринчи даражали икки номаълумли аниқмас тенгламаларини (диофант тенгламалари) ечишга тадбиқини қараб чиқамиз.

Қуйидаги аниқмас тенглама

$$ax+by=c;\ (a,\ b,\ c\in Z)$$

ни ечиш талаб қилинсин. Агар $(a,b)=1$ бўлса, у ҳолда берилган тенглама бутун ечимларга эга бўлиб, унинг умумий ечими қуйидагича ифодаланади:

$$x=x_1+bt,$$

$$y=y_1-at$$

ёки b манфий бўлганда қуйидгича ифодалаш қулай:

$$x=x_1-bt,$$

$$y=y_1+at.$$

Бу формулаларда x_1 ва y_1 лар x ва y ларнинг тенгламани қаноатлантирадиган қандайдир қийматларидан иборат ва $t\in Z$.

Агар $(a,b)=d>1$ ва c сони d га бўлинмаса, у ҳолда $ax+by=c$ тенглама бутун сондаги ечимларга эга эмас.

Биринчи даражали аниқмас тенгламалар назариясидан номаълумларни хусусий ечимларини топишнинг бир неча усуллари мавжуд.

Таққосламалар ёрдамида бу хусусий ечим қуйидагича топилади: $ax+by=c$ дан таққосламанинг маъноси ҳақидаги теоремага кўра $ax\equiv c(mod b)$ бир номаълумли таққосламани ҳосил қиламиз, бу ерда b ўз ишораси билан олинади, таққосламани қаноатлантирадиган x нинг қиймати x_1 сифатида олинади, y_1 нинг қиймати эса бевосита берилган тенгламага x_1 ни қўйиб топилади.

6-мисол. Қуйидаги тенгламани бутун сонларда ечимларини топинг:

$$39x-22y=10.$$

Ечиш. Тенгламадан қуйидаги таққослама келиб чиқади:

$$39x\equiv 10(\mathrm{mod}22).$$

Бу таққосламадаги коеффициентларни 22 модул бўйича энг кичик мусбат чегирмаларига келтирсак, $17x\equiv 10(\mathrm{mod}22)$ га тенг ва бу ердан $x_1=20$ ни ҳосил қиламиз. Бу қийматни берилган тенгламага қўйиб, $y_1=35$ ни топамиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = 20 + 22t \\ y = 35 + 39t \end{cases}$$

7-мисол. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмаси ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 299 эканлиги маълум бўлса, туғилган кунни топинг.

Ечиш. x–сана, y–ойнинг рақами бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$12x+31y=299.$$

Бу ердан $12x\equiv 299(\mathrm{mod}31)$ ёки $12x\equiv 20(\mathrm{mod}31)$ таққослама келиб чиқади. Охирги таққосламани ечиб, $x_1=12$ ни топамиз. Топилган қийматни берилган тенгламага қуйиб, $y_1=5$ ни ҳосил қиламиз. Демак, туғилган кун 12 – май экан.

2.4-§. Таққосламалар системаси ва унинг ечими

Бир номаълумли ҳар хил модулли биринчи даражали таққосламалар системасининг умумий кўриниши қуйидагидан иборат:

$$\begin{cases} a_1x \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m_1) \\ a_2x \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx \equiv b_n(\mathrm{mod}\, m_n) \end{cases} \tag{2.3}$$

Бу система ечимини топишнинг умумий усули қуйидагича:

Дастлаб системанинг биринчи таққосламасини $x \equiv \alpha(\mathrm{mod} m_1)$ ечими топилади, бу ерда α–m_1 модул бўйича манфий бўлмаган энг кичик ёки абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмадан иборат, бу ечимни сонлар синфи шаклида ёзиб олинади:

$$x=m_1t+\alpha \tag{2.4}$$

(Агар биринчи таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Сўнгра x нинг (2) даги қиймати системанинг иккинчи таққосламасига қўйилиб,

$$a_2(m_1t+\alpha) \equiv b_2(\mathrm{mod} m_2) \tag{2.5}$$

таққослама ҳосил қилинади. (3) таққосламадан t нинг сонлар синфи шаклидаги

$$t=m_2t_1+\beta$$

кўриниши топилиб, у (2) тенгликка қўйилади ва x нинг янги қиймати ҳисобланади. (Агар (3) таққослама ечимга эга бўлмаса, берилган система ҳам ечимга эга бўлмайди).

Натижада x нинг сонлар синфи шаклида ёзилган ва берилган системанинг дастлабки иккита таққосламасини қаноатлантирадиган қиймати ҳосил бўлади. x нинг топилган қиймати учинчи тақосламага қўйилиб, ҳосил бўлган таққослама t_1 га нисбатан ечилади ва t_1 нинг сонлар синфи шаклида ёзилган қиймати x нинг ифодасига қўйилади, сўнгра x нинг бу қиймати тўртинчи таққосламага қўйилади ва шу тарзда системанинг охирги таққосламасигача ечилади. *x нинг охирги қиймати берилган системанинг ечимидан иборат бўлади.*

Берилган системани ечишда даставвал ҳар бир таққосламани алоҳида ечиб, система қуйидаги кўринишга келтириб олинади:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 \left(\mathrm{mod}\, m_1\right) \\ x \equiv \alpha_2 \left(\mathrm{mod}\, m_2\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \alpha_n \left(\mathrm{mod}\, m_n\right) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Сўнгра юқоридаги усул қўлланилади.

Агар (1) системанинг $a_ix \equiv b_i(\mathrm{mod} m_i)$, $(i=1,n)$ таққосламалари учун $(a_i,m_i)=d_i$ ва $d_i|b_i$ бўлса, у ҳолда ҳар бир i-таққосламанинг ҳадларини ва модулини d_i га қисқартириб, (1) системага тенг кучли бўлган қуйидаги система ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{d_1} x \equiv \dfrac{b_1}{d_1}\left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_1}{d_1}\right) \\ \dfrac{a_2}{d_2} x \equiv \dfrac{b_2}{d_2}\left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_2}{d_2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_n}{d_n} x \equiv \dfrac{b_n}{d_n}\left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_n}{d_n}\right) \end{cases} \qquad (2.7)$$

Бу системанинг таққосламаларини x га нисбатан ечиб, (5) системанинг ечимини қуйидаги системанинг ечимига келтириш мумкин:

$$\begin{cases} x \equiv \alpha_1 \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_1}{d_1}\right) \\ x \equiv \alpha_2 \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_2}{d_2}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x \equiv \alpha_n \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{m_n}{d_n}\right) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Агар (4) системада m_1, m_2,..., m_n модуллар жуфт-жуфти билан ўзаро туб ва $i \neq j$ да $(m_i,m_j)=1$ бўлса, у ҳолда унинг ечимини қуйидаги формула билан ҳам топиш мумкин.

$$x_0=\frac{M}{m_1}y_1\alpha_1+\frac{M}{m_2}y_2\alpha_2+...+\frac{M}{m_n}y_n\alpha_n, \qquad (2.9)$$

бу ерда $M=[m_1, m_2 ,..., m_n]$ ва $y_1, y_2 ,..., y_n$ лар

$$\frac{M}{m_i}y_i\equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i), i=\overline{1,n}$$

таққосламаларнинг ечимларидан иборат. Системанинг ечими эса $x\equiv x_0\ (\mathrm{mod}\, M)$ таққосламадан иборат бўлади.

Агар $\frac{m_1}{d_1},\frac{m_2}{d_2},...,\frac{m_n}{d_n}$ модуллар жуфт-жуфти билан ўзаро туб бўлса, бу усул билан (6) системани ҳам ечиш мумкин.

1-мисол. Қуйидаги таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x\equiv 13(\mathrm{mod}16)\\ x\equiv 3(\mathrm{mod}10)\\ x\equiv 9(\mathrm{mod}14)\end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан: $x=16t+13$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу қийматини иккинчи таққосламага қўйиб ҳисоблаймиз:

$$16t+13\equiv 3(\mathrm{mod}10), \text{ ёки } 16t+10\equiv 0(\mathrm{mod}10),$$

Бу ердан $8t\equiv 0(\mathrm{mod}5)$, ёки $16t\equiv 0(\mathrm{mod}5)$ ни ҳосил қиламиз, демак, $t=5t_1$.

$t=5t_1$ ни $x=16t+13$ ифодага қўямиз: $x=16\cdot 5t_1+13=80t_1+13$. x нинг топилган қийматини учинчи таққосламага қўямиз:

$80t_1+13\equiv 9(\mathrm{mod}14)$, ёки $80t_1\equiv -4(\mathrm{mod}14)$, бу ердан $80t_1\equiv 10(\mathrm{mod}14)$, ёки

$40t_1\equiv 5(\mathrm{mod}7)$, ёки $8t\equiv 1(\mathrm{mod}7)$, бу ердан $t_1\equiv 1(\mathrm{mod}7)$, яъни, $t_1=7t_2+1$.

$t_1=7t_2+1$ ни $x=80t_1+13$ ифодага қўйиб, $x=80\cdot(7t_2+1)+13=560t_2+93$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $x\equiv 93(\mathrm{mod}560)$.

Текшириш: 93–13 айирма 16 га бўлинади; 93–13 айирма 10 га бўлинади; 93–9 айирма 14 га бўлинади.

Эслатма. $16t\equiv 0(\mathrm{mod}10)$ таққосламани ечишда биз $8t\equiv 0(\mathrm{mod}5)$ таққосламани ҳосил қилдик, унинг ечими $t\equiv 0(\mathrm{mod}5)$, ёки $t=5t_1$ берилган таққосламанинг $x=80t_1+13$ ечимига олиб келди. Аммо $16t\equiv 0(\mathrm{mod}10)$ таққосламанинг иккинчи $t\equiv 5(\mathrm{mod}10)$, ёки $t=10t_1+5$ ечими ҳам мавжуд, чунки

d=(16,10)=2. Бу ечимни $x=16t+13$ ифодага қўйиб, $x=16(10t_1+5)+13=160t_1+93$ ечимни ҳосил қиламиз. Лекин, 93≡13(mod80) бўлганлиги учун, яъни 93 ва 13 сонлари 80 модул бўйича бир синфга тегишли бўлганлиги учун x нинг бу қийматига мос бўлган ечими қаралмайди.

Бу эслатмадан (1-мисол) агар системанинг бирор таққосламаси ёки t_1 га нисбатан бирор таққослама m модул бўйича d та ечимга эга бўлса, у ҳолда системани ечимини топиш учун d та ечимга эга бўлган таққослама ечимини унга тенг кучли бўлган m/d модул бўйича таққослама ечими билан алмаштириш етарлидир.

2-мисол. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 7x \equiv 3\left(\bmod 11\right) \\ 15x \equiv 5\left(\bmod 35\right) \\ 3x \equiv 2\left(\bmod 5\right) \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг ҳар бир таққосламасини алоҳида ечиб, бу системага тенг кучли бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x \equiv 2\left(\bmod 11\right) \\ x \equiv 5\left(\bmod 7\right) \\ x \equiv 4\left(\bmod 5\right) \end{cases}$$

Бу системанинг модуллари жуф-жуфти билан ўзаро туб сонлардан иборат бўлганлиги учун унинг ечимини (7) формула билан топиш мумкин.

$$M=[11,\ 7,\ 5]=385,\ \frac{M}{m_1}=35, \frac{M}{m_2}=55, \frac{M}{m_3}=77.$$

сонларни топиб, қуйидаги таққосламаларни тузамиз:

$$35u_1 \equiv 1(\mathrm{mod}11),\ 55u_2 \equiv 1(\mathrm{mod}7),\ 77u_3 \equiv 1(\mathrm{mod}5),$$

бу ердан $u_1=6$, $u_2=-1$, $u_3=3$ ларни топамиз. Энди (7) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_0=35\cdot 6\cdot 2+55\cdot(-1)\cdot 5+77\cdot 3\cdot 4=1069 \equiv 299(\mathrm{mod}385).$$

Шундай қилиб, $x \equiv 299(\mathrm{mod}385)$.

3-мисол. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 5x \equiv 7\pmod 9 \\ 4x \equiv 3\pmod 7 \\ 3x \equiv 8\pmod{12} \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг учинчи таққосламасида (3,12)=3, аммо 8 сони 3 га бўлинмайди, шунинг учун бу таққослама ҳам берилган система ҳам ечимга эга эмас.

4-мисол. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x \equiv 2\pmod 3 \\ x \equiv 3\pmod 2 \\ x \equiv -1\pmod 6 \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг дастлабки иккита таққосламаси x≡-1(mod3) ва x≡-1(mod2) таққосламаларга тенг кучли, шунинг учун уларни учинчи таққосламанинг натижаси бўлганлиги учун ташлаб юборилса бўлади. Шундай қилиб, система учинчи таққосламасининг ечими системанинг ҳам ечими бўлади, яъни, x≡-1≡5(mod6).

5-мисол. 2, 3, 4, 5, 6 ва 7 сонларига бўлинганида мос равишда 1, 2, 3, 4, 5 ва 0 қолдиқ ҳосил бўладиган сонни топинг.

Ечиш. Масала қуйидаги таққосламалар системасига келтирилади:

$$\begin{cases} x \equiv 1\pmod 2 \\ x \equiv 2\pmod 3 \\ x \equiv 3\pmod 4 \\ x \equiv 4\pmod 5 \\ x \equiv 5\pmod 6 \\ x \equiv 0\pmod 7 \end{cases}$$

x≡1(mod2) ёки x≡3(mod2) таққослама x≡3(mod4) таққосламанинг натижаси сифатида ташлаб юборилиши мумкин. Худди шундай x≡2(mod3) таққослама ҳам олинмайди.

Шундай қилиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x \equiv 3\pmod 4 \\ x \equiv 4\pmod 5 \\ x \equiv 5\pmod 6 \\ x \equiv 0\pmod 7 \end{cases}$$

Бу системани ечиб, $x\equiv119(mod420)$ ни ҳосил қиламаиз.

6-мисол. Қуйидаги таққослама ечимга эга бўладиган a нинг қийматларини топинг:

$$\begin{cases} x\equiv5\pmod{18} \\ x\equiv8\pmod{21} \\ x\equiv a\pmod{35} \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи таққосламадан $x=18t+5$ ни ҳосил қиламиз. x нинг бу қийматини иккинчи тақосламага қўйиб, t нинг қийматини топамиз:

$$18t+5\equiv8(mod21),\ 18t\equiv3(mod21) \text{ ёки } 6t\equiv1(mod7),\ t\equiv6(mod7).$$

$t\equiv-1(mod7)$ ни олиш қулайроқ, бу ердан $t=7t_1-1$. Бу қийматни x нинг ифодасига қўйиб, $x=16\cdot(7t_1-1)=5=126t_1-13$. x нинг ҳосил қилинган қийматини системанинг учинчи таққосламасига қўямиз:

$$126t_1-13\equiv a(mod35), \text{ яъни } 21t_1\equiv a=13(mod35).$$

$(21,35)=7$ бўлганлиги учун охирги таққослама ечимга эга бўлиши учун $a+13\equiv0(mod7)$ таққослама ечимга эга бўлиши керак, бу ердан $a\equiv1(mod7)$. Шундай қилиб, берилган система $a\equiv1(mod7)$ бўлганда ечимга эга.

7-мисол. Ўнлик саноқ системасида берилган $4x87y6$ сони 56 га бўлинади. Шу сонни топинг.

Ечиш. Масала шартидан қуйидаги таққосламаларни тузамиз:

$$\begin{cases} 4x87y6\equiv0\pmod 8 \\ 4x87y6\equiv0\pmod 7 \end{cases}$$

Биринчи таққосламадан *7y6* нинг 8 га бўлиниши ва 8 га бўлиниш аломатига асосан $y=3$ ва $y=7$ қийматларни ҳосил қиламиз. Бу қийматларни иккинчи таққосламага қўйиб,

$$4x8736\equiv0(mod7),$$

$$4x8776\equiv0(mod7)$$

таққосламаларни топамиз. Бу таққосламаларни қуйидаги кўринишда тасвирлаб оламиз

$$400000+10000x+8736\equiv0(mod7), \qquad 4x\equiv1(mod7),$$

ёки $$400000+10000x+8776\equiv0(mod7), \qquad 4x\equiv3(mod7).$$

Биринчи таққослама x≡2(mod7) ёки x=7t+2 ечимга эга. Бу ердан t=0 да x_1 =2 ва t=1 да x_2=9 ни ҳосил қиламиз. t нинг бошқа қийматларига мос келувчи x нинг қийматлари ярамайди.

Иккинчи таққослама x≡6(mod7) ёки x=7t+6 ечимга эга. Бундан ягона қиймат x_3=6 ни ҳосил қиламиз. x нинг ҳосил қилинган қийматларини берилган соннинг ифодасига қўйиб, 428736, 498736, 468776 сонларни ҳосил қиламиз.

8-мисол. Қуйидаги таққосламани ўзаро туб модуллар бўйича таққосламалар системасига келтириб ечинг:

$$x^3+2x+3\equiv 0(\mathrm{mod}15).$$

Ечиш. Берилган таққослама қуйидаги системага тенг кучли:

$$\begin{cases} x^3+2x+3\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,5\right) \\ x^3+2x+3\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,3\right) \end{cases}$$

Бу системанинг иккинчи таққосламаси (x–1)(x+1)≡0(mod3) таққосламага тенг кучли ва у x нинг барча бутун қийматлари учун ўринли. Демак берилган таққослама қуйидаги таққосламага тенг кучли бўлади.

$x^3+2x+3\equiv 0(\mathrm{mod}5)$, бу ердан x≡2;4(mod5) ни ҳосил қиламиз. Берилган 15 модул бўйича қуйидаги ечимларни ҳосил қиламиз:

x≡2;7;12;4;9;14(mod15).

9-мисол. Қуйидаги чизиқ қайси бутун нуқталардан ўтади:

$$15u=2x^3-5x^2+4x+11,\ \text{бу ерда } -2<x<8\ ?$$

Ечиш. Чизиқ тенгламасидан $2x^3-5x^2+4x+11\equiv 0(\mathrm{mod}15)$ таққосламага эга бўламиз. Бу таққослама эса қуйидаги системага тенг кучли

$$2x^3-5x^2+4x+11\equiv 0(\mathrm{mod}5)$$

$$2x^3-5x^2+4x+11\equiv 0(\mathrm{mod}3).$$

Биринчи таққослама x≡2;4(mod5) ечимларга, иккинчиси эса x≡1;2(mod3) ечимларга эга.

Энди, $\begin{cases} x\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,5\right) \\ x\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right) \end{cases}, \begin{cases} x\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,5\right) \\ x\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,3\right) \end{cases}, \begin{cases} x\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,5\right) \\ x\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right) \end{cases}, \begin{cases} x\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,5\right) \\ x\equiv 2\left(\mathrm{mod}\,3\right) \end{cases}$

таққосламаларни ечиб, x≡7;2;4;14(mod15) ечимларни топамиз.

Шартда кўрсатилган оралиққа x нинг қуйидаги қийматлари тушади:

$$x=7;2;4;-1$$

y нинг мос қийматлари чизиқнинг берилган тенгламасидан топилади.

10-мисол. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 9u \equiv 15 \\ 7x-3u \equiv 1 \end{cases} (\bmod 12),$$

Ечиш. Биринчи таққосламанинг иккала томонини ва модулини 3 га қисқартириб, $3u\equiv5(\bmod 4)$, ёки $3u\equiv9(\bmod 4)$, ёки $u\equiv3(\bmod 4)$ ни ҳосил қиламиз. 12 модул бўйича $u\equiv3;7;11(\bmod 12)$ ечимлар келиб чиқади.

Бу ердан қуйидаги учта системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 7x \equiv 1+3u \\ u \equiv 3 \end{cases} (\bmod 12), \begin{cases} 7x \equiv 1+3u \\ u \equiv 7 \end{cases} (\bmod 12), \begin{cases} 7x \equiv 1+3u \\ u \equiv 11 \end{cases} (\bmod 12)$$

Бу системаларни соддалаштириб,

$$\begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 3 \end{cases} (\bmod 12), \begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 7 \end{cases} (\bmod 12), \begin{cases} x \equiv 10 \\ u \equiv 11 \end{cases} (\bmod 12),$$

ечимларни ҳосил қиламиз.

11-мисол. Таққосламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+2u \equiv 3 \\ 4x+u \equiv 2 \end{cases} (\bmod 5)$$

Ечиш. Иккинчи таққосламани 2 га кўпайтириб, ҳосил бўлган таққосламадан биринчи таққосламани ҳадма-ҳад айирамиз: $7x\equiv1(\bmod 5)$, бу ердан $x\equiv3(\bmod 5)$ ни ҳосил қиламиз. Биринчи таққосламани иккала томонини 4 га кўпайтириб, ҳосил қилинган таққосламадан иккинчисини айирамиз:

$$u\equiv0(\bmod 5).$$

Текшириш:

$\begin{cases} x \equiv 3 \\ u \equiv 2 \end{cases} (\bmod 5)$ система берилган системанинг ечимидан иборат эканлигини кўрсатади.

III. БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

3.1-§. Биринчи даражали икки номаълумли Диофант тенгламаларининг бутун рационал ечимларини топиш усуллари.

Дастлабки эслатмалар.

Аниқмас тенглама – бу Диофант тенгламаларидир. Биринчи даражали икки номаълумли аниқмас тенглама деб $ax+by+c=0$ кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда *x, y* лар номаълумлар, *a, b, c* лар параметрлар (коэффициентлар). Кўпинча масаланинг шартлари шундай бўладики, фақат бутун сонлар билан ифодаланган қийматларгина, баъзан эса фақат бутун ва шу билан бирга мусбат сонлар билан ифодаланган қийматларгина масалада қўйилган саволга тўғри жавоб бўла олади.

1-масала. 118 ни шундай икки бўлакка ажритиш керакки, улардан бири 11 га, иккинчиси 17 га қолдиқсиз бўлинсин.

Ечиш:

Сонлардан бирини $11x$, иккинчисини $17y$ билан белгиласак, $11x+17y=118$ тенглама ҳосил бўлади.

Масалада 118 ни ажратишдан ҳосил бўладиган сонларнинг ишоралари тўғрисида ҳеч нарса айтилмагани учун манфий илдизлар ҳам масалага жавоб бўла олади дея оламиз. Чунончи, масаланинг шартларини (x=3 ва y=5 бўлганда) 33 ва 85 дан иборат сонлар қаноатлантиради, лекин x=20 ва y=-6 бўлганда 220 ва –102 дан иборат сонлар ҳам қаноатлантиради.

2-масала. Бирига 4 та, иккинчисига 7 та самовар сиғадиган икки хил яшик бор. 41 та самоварни жойлаш учун ҳар қайси хил яшикдан нечта олиш керак?

Ечиш:

Кичик яшикларнинг сонини x билан, катталарининг сонини y билан белгилаб, ушбу тенгламани тузамиз:

$$4x+7y=41.$$

Масаланинг шартидан бунда фақат бутун ва шу билан бирга мусбат илдизлар экани кўриниб турибди. Бу тенглама x=3, y=5 дан иборат фақат бир жуфтгина илдизга эга бўла олади.

Шундай қилиб, аниқмас тенгламаларнинг бутун сонлар билан ҳамда бутун ва мусбат бутун сонлар билан ифода қилинган илдизларини топа олишимиз зарур.

I_1 . Тенгламаларнинг илдизлари бутун сон бўлмаслик аломати.

Қуйидаги

$$ax + by + c = 0$$

тенглама берилган бўлсин. Агар a, b, c коэффициентлардан баъзилари каср бўлса, барча коэффициентларни бир махражга келтириб, кейин махражни ташласак, у ҳолда барча коэффициентлар бутун бўлади. Сўнгра a, b, c ларнинг бирор умумий кўпайтувчиси бўлса, тенгламанинг иккала кисмини унга қисқартириш мумкин. Демак, a, b ва c коэффициентларни умумий кўпайтувчиси бўлмаган бутун сонлар деб фараз қиламиз.

Энди бирорта бутун, лекин 1 га тенг бўлмаган умумий кўпайтувчига эга, деб фараз қиламиз. Масалан:

$$a = ma_1 , \quad b = mb_1$$

Бу ҳолда, тенглама ушбу кўринишни олади:

$$a_1x + b_1y = \frac{c}{m}.$$

x ва y ларнинг қийматлари бутун бўлса, тенгламанинг чап қисми бутун, ўнг қисми эса каср сон бўлади, чунки юқоридаги фаразимизга мувофиқ, c сон m га бўлинмайди. Бундай тенгликнинг бўлиши мумкин эмас. Демак,

Аниқмас тенглама номаълумларининг коэффициентлари умумий кўпайтувчига эга бўлиб, озод ҳад унга эга бўлмаса, тенглама бутун илдизларга эга бўлмайди.

Шунинг учун бундан кейин барча муҳокамаларда a ва b ни ўзаро туб сон деб фараз қиламиз.

I₂. Тенгламаларнинг илдизлари мусбат сон бўлмаслик аломати.

$ax+by=c$ тенгламада a ва b коэффициентлар мусбат, озод ҳад c манфий бўлсин. У ҳолда x ва y нинг ҳар қандай мусбат қийматларида тенгламанинг чап қисми мусбат, ўнг қисми эса манфийлигича қолади. Бундай тенглик бўлиши мумкин эмас. Агар a ва b коэффициентлар манфий, c мусбат бўлса, тенгламанинг барча ҳадларини 1 га кўпайтириб, у ҳолни ҳам олдинги ҳолга келтирамиз. Демак,

Аниқмас тенгламада номаълумлар коэффициентларининг ишоралари озод ҳад ишорасига қарама-қарши бўлса, тенглама мусбат илдизга эга бўлмайди.

Аниқмас (Диофант) тенглама илдизларининг умумий формуласи

Бирор усул билан (масалан, бевосита синаш йўли билан) $ax+by=c$ Диофант тенгламасининг бутун сонлар билан ифода қилинган бир жуфт илдизини топган бўлайлик. Бу илдизлар $x=\alpha$ ва $y=\beta$ бўлсин, уларни берилган тенгламага қўйиб, қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз: $a\alpha+b\beta=c.$ Бу айниятни берилган тенгламадан ҳадлаб айирсак, $a(x-a)+b(y-\beta)=0$ бўлиб, бундан $ax=a\alpha-b(y-\beta)$ ёки $x=\alpha-\dfrac{b(y-\beta)}{a}$ келиб чиқади. x нинг бутун сон бўлиши учун $\dfrac{b(y-\beta)}{a}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва етарли (чунки, α бутун сон). Бошқача айтганда, $b(y-\beta)$ ифоданинг a га қолдиқсиз бўлиниши зарур ва етарлидир. Лекин, фаразимизга биноан $(b,a)=1,$ демак, $y-\beta$ айирманинг a га бутун бўлиниши зарур (ва етарли). $y-\beta$ ни a га бўлишдан чиққан бутун бўлинмани t билан белгилаб (у мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин), ушбуни ҳосил қиламиз:

$\dfrac{y-\beta}{a}=t$, бундан $y=\beta+at$ ни оламиз.

x ни ифодаловчи формулада $\dfrac{y-\beta}{a}$ каср ўрнига t ни қўйсак, $x=\alpha-bt$ ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, аниқмас тенгламанинг илдизлари учун қуйидаги формулаларни ҳосил қилдик:

$$x = \alpha - bt,\ \ y = \beta + at$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий бутун мусбат ва манфий қийматлар бериб, аниқмас тенгламанинг чексиз кўп бутун илдизларини топамиз. Жумладан, $t = 0$ бўлганда юқорида ўзимиз топган $x = \alpha$ ва $y = \beta$ илдизни топамиз.

Топилган формулаларга диққат қилиб қаралса, уларнинг қуйидаги қоидага кўра тузилганини кўришимиз мумкин:

1. Формулаларнинг биринчи ҳади берилган номаълумнинг топилган хусусий қиймати бўлади.

2. Формулаларнинг иккинчи ҳади берилган тенгламанинг коэффициентлари билан ихтиёрий бутун t соннинг кўпайтмасидир, бунда x ни ифодаловчи формула учун берилган тенгламадаги y ёнидаги коэффициент, y ни ифодаловчи формула учун эса x ёнидаги коэффициент олинади.

3. Коэффициентлардан бири тескари ишора билан олинади.

Коэффициентлардан қайси бирини тенгламада турган ишораси билан ва қайси бирини тескари ишора билан олишимизнинг ҳеч қандай фарқи йўқлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатдан ҳам,

$$x = \alpha - bt,\ \ y = \beta + at \ \text{ва}\ x = \alpha + bt,\ \ y = \beta - at$$

формулалар худди бир турли илдизларни беради, фақат биринчи формулалар t нинг мусбат қийматларида берган ечимларни иккинчи формулалар t нинг абсолют миқдор жиҳатидан уларга тенг бўлган манфий қийматларида беради.

1-мисол. $3x + 5y = 26$ тенглама берилган. Бевосита ўрнига қўйиш билан $x = 2$ ва $y = 4$ қийматларнинг тенгламани қаноатлантиришига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда қолган барча илдизлар ушбу формулалардан топилади:

$$x = 2 + 5t,\ y = 4 - 3t \ \text{ёки}\ x = 2 - 5t,\ y = 4 + 3t\ .$$

Бу формулаларда t га ихтиёрий қийматлар бериб, тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган турли илдизларини ҳосил қиламиз. Масалан, биринчи жуфт формулаларни олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

3.1-жадвал

t	0	1	2	3	-1	-2	…
x	2	7	12	17	-3	-8	…
y	4	1	-2	-3	7	10	…

Агар иккинчи жуфт формулаларни олсак, у ҳолда t га кетма-кет 0, -1, - 2, -3, 1, 2, ... шунга ўхшаш қийматларни бериб, худди ўша илдизларни олган бўлар эдик. Шундай қилиб, аниқмас тенгламанинг бутун сонлар билан ифодаланган илдизларини топиш масаласи қандай бўлмасин, бир жуфт илдизни топишга келтирилади.

Ўрнига қўйиш усули

Аниқмас тенгламанинг бир жуфт илдизини топиш учун қуйидаги усулдан фойдаланиш мумкин:

Масалан, $ax+by=c$ тенглама берилган бўлсин. Номаълумлардан бирини иккинчисига нисбатан аниқлаймиз (коэффициенти кичик бўлганини танлаш яхширок). Масалан, $a<b$ бўлсин. У ҳолда, $x=\dfrac{c-by}{a}$. $c-by$ ифода a га қолдиқсиз бўлингунча y га кетма-кет 0, 1, 2, 3, … қийматлар бера бошлаймиз. $y=n$ бўлганда $c-bn$ ифода a га бутун бўлинади ва m бўлинмани беради, деб фараз қиламиз. У ҳолда $x=m$ ва $y=n$ қийматлар берилган тенгламанинг бир жуфт илдизини беради. Ҳақиқатдан, қуйидагини оламиз: $\dfrac{c-bn}{a}=m$ ёки $c-bn=am$, $am+bn=c$. Охирги тенглик m ва n сонлар берилган тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади.

2-мисол. Ушбу тенглама берилган: $7x-4y=2$. Бу тенгламадан y ни аниқлаймиз: $4y=7x-2$, $y=\frac{7x-2}{4}$. x га кетма-кет 0, 1, 2, 3, $\ldots$ қийматлар бериш билан $x=2$ бўлганда $7x-2$ ифода 4 га бўлиниб, бўлинмада 3 чиқишига ишонч ҳосил қила оламиз. Демак, биз бир жуфт илдизни топдик: $x=2$, $y=3$. Илдизларнинг қолган жуфтлари умумий формуладан топилади: $x=2+4t$, $y=3+7t$ ёки $x=2-4t$, $y=3-7t$.

Эслатма. Сонлар назариясида агар a ва b ўзаро туб сонлар бўлса, 0, 1, 2, 3, …, $(a-1)$ сонлар орасида ҳар вақт шундай бир y сонни топиш мумкинки, унда $c-by$ ифода a га қолдиқсиз бўлиниши исбот қилинади. Шу сабабли кўп марта синашдан қутилиш учун a ва b коэффициентлардан кичигини бўлувчи қилиб олиш тавсия қилинади.

Аниқмас тенгламанинг хусусий шакли

Агар аниқмас тенгламада номаълумлардан бирининг коэффициенти 1 га тенг бўлса, у тенглама умумий шаклда осонлик билан ечилади. Масалан, x нинг коэффициенти 1 га тенг бўлсин. У ҳолда $x+by=c$ бўлиб, бундан x ни аниқлаймиз: $x=c-by$. Бунда y нинг бутун сон билан ифодаланган исталган қийматларига x нинг ҳам бутун сон билан ифодаланадиган қийматлари тўғри келади.

3-мисол. Ушбу $5x+y=18$ тенглама берилган. Бундан $y=18-5x$ келиб чиқади. x га ихтиёрий бутун қийматлар бериб, y учун мос келган бутун қийматларни топамиз:

3.2-жадвал

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	18	13	8	3	-2	23	28	...

3.2-§. Аниқмас тенгламаларнинг умумий ечими.

Исталган коэффициентли аниқмас тенгламани ечиш усулини мисол устида кўрсатамиз. Қуйидаги тенглама берилган бўлсин: $23x + 53y = 109.$

Бу тенгламадан коэффициенти кичик бўлган номаълумни, яъни x ни топамиз: $x = \frac{109 - 53y}{23}$; бундан бутун қисмини ажратамиз: $x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$; y бутун бўлганда x нинг бутун бўлиши учун $\frac{17 - 7y}{23}$ ифоданинг қандай бўлса ҳам бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу сонни t билан белгилаб, ушбу $\frac{17 - 7y}{23}$ ёки $17 - 7y = 23t$; $23t + 7y = 17$ ларни топамиз. Агар y ва t учун $\frac{17 - 7y}{23} = t$ тенгламани ёки шунинг ўзидан иборат бўлган $23t + 7y = 17$ тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар топсак, шу билан x учун тўғри келадиган бутун қийматларни топган бўламиз ва масала ечилган бўлади. Шундай қилиб, берилган тенгламани ечишда янада соддароқ, коэффициентлари берилган тенгламанинг коэффициентларига қараганда кичик бўлган иккинчи бир тенгламани ечишга келтирилади. Янги тенгламада ҳам шундай қиламиз. Унда y ни аниқлаймиз: $y = \frac{17 - 23t}{7} = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7}$. y нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{3 - 2t}{7}$ ифода бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу сонни t_1 дейлик: $\frac{3 - 2t}{7} = t_1$ ёки $7t_1 + 2t = 3$. t ва t_1нинг қийматлари охирги тенгламани қаноатлантирувчи бутун сон бўлганда x ва y учун берилган тенгламани қаноатлантирадиган бутун қийматлар оламиз. Демак, масаламиз коэффициентлари янада кичик бўлган охирги тенгламани ечишга келтирилади. Бунинг билан ҳам олдингидай иш кўрамиз:

$$t = \frac{3 - 7t_1}{2} = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2}\ ;\ \frac{1 - t_1}{2}$$

ифодани t_2 билан белгиласак $(t \in Z)$, $\frac{1 - t_1}{2} = t_2$ ёки $2t_2 + t_1 = 1$ келиб чиқади. Номаълумлардан бирининг (t_1 нинг) коэффициенти 1 га тенг бўлган тенглама ҳосил бўлди. Бундай тенгламаларни ечишни биламиз; уни ечиб, ушбуни топамиз: $t_1 = 1 - 2t_2$. Бу тенгламада t_2 га ихтиёрий бутун қийматлар бериб, t_1 учун бутун қийматлар ҳосил қиламиз. t_1 ва t_2 нинг топилган бутун қийматларини t учун чиқарилган $t = 1 - 3t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2$ ифодага қўйиб, t нинг мос келган бутун қийматларини топамиз. t ва t_1 га мос келган жуфт қийматни юқоридаги y нинг ифодасига қўйиб,

$$y = 2 - 3t + \frac{3 - 2t}{7} = 3 - 2t + t_1$$

ни топамиз. Нихоят, y ва t учун топилган қийматларни x учун бўлган

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t$$

ифодага қўйиб, x учун мос келган бутун қийматларни ҳосил қиламиз. Аммо, x ва y ни тўғридан-тўғри t_2 га нисбатан ифода қилиш ҳам мумкин. Бунинг учун t ни ифодаловчи тенгламадаги t_1 ўрнига унинг t_2 орқали белгиланган ифодасини қўямиз: $t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$ ёки $t = -2 + 7t_2$. Энди y учун бўлган ифодага t ва t_1 ўрнига уларнинг t_2 орқали белгиланган ифодасини қўямиз: $y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2)$ ёки $y = 9 - 23t_2$. Ниҳоят, y ва t нинг топилган қийматларини x учун бўлган ифодага қўйсак,

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2) \text{ ёки } x = -16 + 53t_2$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, x ва y учун қуйидаги формулаларни ҳосил қилдик:

$$x = -16 + 53t_2 \ , \ y = 9 - 23t_2 \ .$$

Бу формулаларда t_2 учун ихтиёрий бутун мусбат ва манфий қийматлар бериб, тенгламанинг чексиз кўп илдизларини ҳосил қиламиз, улардан бир нечтаси ушбу 3.3-жадвалда келтирилди:

3.3-жадвал

t_2	0	1	2	-1	-2
x	-16	37	90	-69	-122
y	9	-14	-37	32	55

Берилган ва ундан кейинги тенгламаларнинг коэффициентлари устида қилинган ишларга диққат билан қараб, шундай кетма-кетликни кўриш мумкин:

1. Берилган тенгламанинг катта коэффициенти 53 ни кичик коэффициенти 23 га бўлдик; бўлинма 2 ва қолдиқ 7 чиқди.

2. Берилган тенгламанинг кичик коэффициенти 23 ни қолдиқ 7 га бўлдик; бўлинмада 3 ва иккинчи қолдиқ 2 чиқди.

3. Биринчи қолдиқ 7 ни иккинчи қолдиқ 2 га бўлдик; бўлинмада 3 ва учинчи қолдиқ 1 чиқди.

Бошқача айтганда, берилган тенглама коэффициентларининг энг катта умумий бўлувчисини топмоқчи бўлгандек иш кўрдик. Бундан ушбу натижани оламиз:

Агар аниқмас тенгламада номаълумларнинг коэффициентлари ўзаро туб сонлар бўлса, ҳамма вақт тенгламанинг бутун илдизларини топиш мумкин.

3.3-§. Тенгламани ечишни соддалаштириш

Баъзан аниқмас тенгламани тезроқ ечишга олиб келувчи баъзи бир соддалаштиришдан фойдаланиш мумкин.

1. Номаълумларнинг коэффициентларидан бири ва озод ҳад умумий кўпайтувчига эга бўлганда тегишли равишда янги номаълум танлаб, тенгламанинг иккала томонини ўша кўпайтувчига қисқартириш мумкин.

1-мисол. $6x-5y=21$ тенглама берилган. Коэффициент 6 ва озод ҳад 21 умумий 3 кўпайтувчига эга. Демак, $5y$ ҳад ҳам 3 га бўлиниши керак. 5 нинг ўзи 3 га бўлинмагани учун y номаълум 3 га бўлиниши керак. $y=3t$ деб фараз қилиб ($t-$ бутун сон), қуйидаги тенгламани оламиз:

$6x-15t=21$ ёки 3 га қисқартирилгандан сўнг $2x-5t=7$ бўлади. Бу тенгламани ечамиз: $x=\dfrac{7+5t}{2}=3+2t+\dfrac{1+t}{2}=3+2t+t_1$, бунда $\dfrac{1+t}{2}=t_1$ бўлиб, натижада $2t_1-t=1$ ёки с келиб чиқади. Топилган қийматларни x ва y ларни ифодаловчи тенгликларга қўйсак,

$$x=3+2(-1+2t_1)+t_1=1+5t_1,$$

$$y=3(-1+2t_1)=-3+6t_1$$

ҳосил бўлади.

2-мисол. $9x+14y=105$ тенглама берилган. $y=3t$ деб фараз қилиб, тенгламанинг ҳар икки томонини 3 га қисқартирсак: $9x+14\cdot 3t=105$ дан $3x-14t=35$ ни оламиз. Бу тенгламада $x=7t_1$ десак, $3\cdot 7t_1+14y=35$ бўлиб, буни 7 га қисқартирсак, $3t_1+2t=5$ бўлади. Бу охирги тенгламани ечамиз:

$t=\dfrac{5-3t_1}{2}=2-t_1+\dfrac{1-t_1}{2}=2-t_1+t_2$, бунда $\dfrac{1-t_1}{2}=t_2$ бўлиб, натижада $2t_2+t_1=1$ ёки $t_1=1-2t_2$ келиб чиқади. Кетма-кет орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак, қуйидагиларни топамиз:

$$t=2-(1-2t_2)+t_2=1+3t_2;$$

$$x=7t_1=7(1-2t_2)=7-14t_2;$$

$$y=3t=3(1+3\mathrm{t}_2)=3+9t_2.$$

2. Агар бутун сонга тенгланувчи ифоданинг суратидаги ҳадлари умумий кўпайтувчига эга бўлса, тенгламани ечишни соддалаштириш мумкин.

3-мисол. $12x+17y=41$ тенглама берилган. Буни x га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{41-17y}{12}=3-y+\frac{5-5y}{12}=3-y+5\cdot\frac{1-y}{12}.$$

$5\cdot\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши учун $\frac{1-y}{12}$ нинг бутун сон бўлиши зарур ва етарли. Бу ифодани t бутун десак ва унга тенгласак, $\frac{1-y}{12}=t;\ 1-y=12t,\ y=1-12t$ бўлиб, натижада $x=3-(1-12t)+5t=2+17t$ бўлади.

3. Агар бутун қисмни ажратиб чиқаришда қолдиқ бўлувчининг ярмидан катта бўлса, манфий қолдиқ киритиш қулайдир.

4-мисол. $11x-20y=49$ тенглама берилган. Бундан

$$x=\frac{49+20y}{11}=4+2y+\frac{5-2y}{11}=4+2y+t;\ \frac{5-2y}{11}=t;\ 5-2y=11t;\ 11t+2y=5;$$

$$y=\frac{5-11t}{2}=2-5t+\frac{1-t}{2}=2-5t+t_1 \text{ га тенг.}$$

Бу тенгликдан $1-t=2t_1$, ниҳоят $t=1-2t_1$ бўлади. Орқага қайтиб, ўрнига қўйишларни бажарсак,

$$y=2-5(1-2t_1)+\mathrm{t}_1=-3+11t_1;$$

$$x=4+2(-3+11t_1)+(1-2t_1)=-1+20t_1;$$

Берилган тенгламани одатдаги усул билан ечганимизда x учун ушбуни олган бўлар эдик: $x=4+y+\frac{5+9y}{11}$ ва ундан кейинги тенглама қуйидагича бўлар эди: $\frac{5+9y}{11}=t$; $11t-9y=5$. Бу тенглама манфий қолдиқ киритиш ёрдамида олинган $11t+2y=5$ тенгламага қараганда мураккаброқдир.

5-мисол. $15x+28y=59$ тенглама берилган. Тенгламани манфий қолдиқлар киритиб, x га нисбатан ечамиз:

$$x=\frac{59-28y}{15}=4-2y+\frac{-1+2y}{15}=4-2y+t;\ \frac{-1+2y}{15}=t;\ -1+2y=15t;\ 2y-15t=1.$$

$$y=\frac{1+15t}{2}=7t+\frac{1+t}{2}=7t+t_1;\ \frac{1+t}{2}=t_1;\ 1+t=2t_1;\ t=-1+2t_1.$$

Ўринларига қўйсак, натижада

$$y = 7(-1+2t_1) + t_1 = -7+15t_1;$$

$$x = 4-2(-7+15t_1)+(-1+2t_1) = 17-28t_1.$$ келиб чиқади.

Бу параграфдаги мисолларда келтирилган тенгламаларни одатдаги йўл билан ечиб кўриб, кўрсатилган соддалаштиришни тадбиқ қилмаганда уларнинг ҳар бирини ечиш учун кўп иш бажариш талаб қилинганлигини кўриш жуда осон.

Мусбат ечимлар

Юқорида айтилган каби кўпгина аниқмас тенгламанинг топилган илдизларидан айни замонда x ва y учун фақат мусбат қийматлар берадиганларини олиш керак. х нинг қандай қийматларида x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар олишни бирданига аниқлаш мумкин. Ҳақиқатдан, қуйидаги формулаларни олайлик:

$$x = \alpha + bt, \ y = \beta - at$$

x ва y нинг мусбат бўлиши учун t га фақат шундай қийматлар олиш зарурки, y қийматларда $\alpha + bt > 0, \ \beta - at > 0$ бўлсин. a ни мусбат сон деб ҳисоблаймиз. У вақтда турлича ҳоллар бўлиши мумкин.

1. Иккала тенгсизлик ҳам бир хил маънода. Бу ҳол b манфий сон бўлгандагина содир бўлади. Чиндан ҳам, тенгсизликларнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$bt > -\alpha; \ at < \beta; \ t < -\frac{a}{b}; \ t < \frac{\beta}{a}.$$

Бу ҳолда тенглама саноқсиз кўп бутун мусбат илдизларга эга бўлади. Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t < \frac{7}{2}; \ t < -1\frac{3}{5}.$$

$-1\frac{3}{5}.$ дан кичик ҳар қандай сон иккала тенгсизликни қаноатлантириши очиқ кўриниб туради. Демак, t учун -1 дан кичик бўлган ҳар қандай бутун сонни олиш мумкин экан.

Бошқа бир ҳолни қарайлик: $t>\frac{7}{15}$; $t>3\frac{1}{3}$. t учун $3\frac{1}{3}$ дан катта ҳар қандай бутун сонни олганда x ва y учун бутун ва мусбат қийматлар чиқиши очиқ кўриниб турибди.

6-мисол. $3x-5y=11$ тенглама берилган. Бу тенгламани ечамиз:

$$x=\frac{11+5y}{3}=4+2y-\frac{1+y}{3}=4+2y-t;\ \frac{1+y}{3}=t;\ 1+y=3t;\ \ y=-1+3t;$$

$$x=4+2(-1+3t)-t=2+5t.$$

Мусбат илдизларини излаймиз:

$$-1+3t>0;\ \ 2+5t>0;\ \text{ёки }\ t>\frac{1}{3};\ \ t>-\frac{2}{5};$$

t учун $\frac{1}{3}$ дан катта исталган бутун сон олсак, x ва y нинг берилган тенгламани қаноатлантирувчи саноқсиз кўп жуфт мусбат бутун қийматларини топамиз.

7-мисол. $8x-3y=-13$ тенглама берилган. Тенгламани ечамиз:

$$y=\frac{13+8y}{3}=4+3x+\frac{1-x}{3}=4+3x+t;$$

$$\frac{1-x}{3}=t;\ \ 1-x=3t;\ x=1-3t;\ \ y=7-8t.$$

Мусбат илдизларини қидирамиз:

$$1-3t>0;\ 7-8t>0;\ \text{ёки }\ t<\frac{1}{3};\ \ t<\frac{7}{8}.$$

t нинг $\frac{1}{3}$ дан кичик ҳар бир бутун (яъни 0, 1, 2,...) қиймати x ва y учун бутун ва мусбат қийматларни беради.

2. Тенгсизликлар қарама-қарши маънода бўлиб, бири иккинчисига зид. Масалан, қуйидаги тенгсизликни олайлик:

$$t<\frac{7}{8};\ t>-1\frac{1}{3}.$$

t нинг айни вақтда иккала тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари йўқ экани очиқ кўриниб турибди. Бу ҳолда тенглама мусбат илдизларга эга бўла олмайди.

8-мисол. $4x+5y=-7$. Бу тенгламани ечайлик.

$$x=\frac{-7-5y}{4}=-2-y+\frac{1-y}{4};\ \frac{1-y}{4}=t;\ y=1-4t;\ x=-3+5t.$$

Бундан $-3+5t>0$; $1-4t>0$ ёки $t>\frac{3}{5}$; $t<\frac{1}{4}$. Бу тенгсизликлар бир-бирига зид, тенгламанинг мусбат илдизлари йўқ.

3. Тенгсизликлар қарама-қарши маънода бўлиб, бир-бирига зид эмас. Масалан, қуйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t>4\frac{1}{7};\ t<7\frac{3}{4}.$$

t нинг $4\frac{1}{7}$ билан $7\frac{3}{4}$ орасидаги барча бутун қийматлари, яъни 5, 6 ва 7 сонлар x ва y учун мусбат илдизлар бўлади. Шундай қилиб, бу ҳолда:

t учун топилган чегаралар орасида қанча бутун сон бўлса, тенгламанинг шунча бутун мусбат илдизи топилади.

Хусусий ҳолда бу ерда ҳам тенгламанинг бутун мусбат илдизлари бўлмаслиги мумкин. Бу ҳол t учун топилган чегаралар орасида ҳеч бир бутун сон бўлмаганда содир бўлади. Масалан, қуйидаги тенгсизликлар чиққан бўлсин:

$$t>1\frac{1}{4};\ t<1\frac{7}{8}.$$

Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $1\frac{1}{4}$ билан $1\frac{7}{8}$ орасида ҳеч бир бутун сон топилмайди. Демак, тенгламанинг бутун мусбат илдизлари йўқ.

9-мисол. $3x+7y=55$. Тенгламани ечамиз:

$$x=\frac{55-7y}{3}=18-2y+\frac{1-y}{3};\ \frac{1-y}{3}=t;\ y=1-3t;\ x=16+7t.$$

Бундан $1-3t>0; 16+7t>0;$ ёки $t<\frac{1}{3}; t>-2\frac{2}{7}.$ t учун фақат ушбу қийматларни олиш мумкин: 0, -1, -2 . Тенгламанинг учта илдизини ҳосил қиламиз:

3.4-жадвал

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

10-мисол. $5x+4y=3$. Тенгламани ечиб, қуйидагини оламиз:

$$x=1+4t;\ y=2-5t.$$

Бундан $t>\frac{1}{4}$; $t<\frac{2}{5}$. Тенгсизликлар бир-бирига зид эмас, лекин $\frac{1}{4}$ билан $\frac{2}{5}$ орасида бутун сонлар йўқ. Демак, тенгламанинг бутун мусбат ечимлари йўқ.

3.4-§. Лежандр символи ва унинг хоссалари. Туб модул бўйича юқори даражали таққосламалар. Иккинчи ва учинчи тартибли Диофант тенгламалари

m - натурал сон, $a_0, a_1, a_2 \in Z, a_2 \neq 0$ бўлсин. $a_0x^2 + a_1x + a_0 \equiv 0 \pmod{m}$ квадратик таққослашни қараймиз, x ўзгарувчига нисбатан тўлиқ квадрат ёрдамида, Эйлер теоремасини қўллаш орқали ажратиб ва қолдиқли бўлиш ҳақидаги хитой теоремасига асосан, таққосламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$x^2 \equiv a \pmod{m},$$

бунда, $a \in Z.$

Бундан кейин квадратик таққосламани $x^2 \equiv a \pmod{m}$, деб қараб кетамиз. Маълумки, ҳамма a лар учун, m таққосламага нисбатан ечимга эга бўла олмайди.

Изоҳ 1. a =3 ва m = 4 учун, $x^2 \equiv a \pmod{m}$, квадратик таққослашда ечимлар йўқ, уларни озгина бирма-бир кўриш билан текшириш осон.

Таъриф: Агар таққосламани ечими бўлса, у ҳолда a – m модулга нисбатан *квадратик чегирма* дейилади, акс ҳолда a сони m модулга кўра *квадрат чегирмасиз* дейилади.

Теорема-1: p > 2 туб сон учун $\frac{p-1}{2}$ га тенг квадратик чегирмалар сони ва $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмасизлар сони мавжуд.

Исбот: Биз шуни таъкидлаймизки, бунда $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod{p}$. Яъни, квадрат чегирмалар сони $\frac{p-1}{2}$ тадан ошмайди. $1^2, ..., \left(\frac{p-1}{2}\right)$сонлар орасида p модулга кўра таққосламалар йўқ эканлигини кўрсатамиз. $x^2 = y^2 \pmod{p}$ бўлсин. У ҳолда, $(x-y)(x+y) \mid p$кўринишда келтирсак, бундай бўлиши мумкин эмас, чунки $x \neq y вах + y < p$. Шундай қилиб, биз $\frac{p-1}{2}$ та квадратик чегирмани топдик.

Таъриф: *Лежандр белгиси* $\left(\frac{a}{p}\right)$- *а* бутун сон ва *р* туб сонлар учун қуйидагича $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ -1, \end{cases}$ (0 га тенг агар *а, р* га бўлинса, 1 га тенг агар *а, р* модулга кўра квадратик чегирмали бўлса, -1 га тенг , агар *а, р* га кўра квадрат чегирмасиз бўлса) аниқланади.

Лежандр белгисининг асосий хоссаларини келтирамиз: Айтайлик, $a, b \in Z, (a, p) = 1, (b, p) = 1,$ q-тоқ, туб сон $(p, q) = 1.$

$\bullet a \equiv b(\bmod p) \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right);$

$\bullet \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)|2} (\bmod p);$

$\bullet \left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{(p^2-1)|8};$

$\bullet \left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{(p-1)|2};$

$\bullet \left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{(p-1)}{2}\frac{(q-1)}{2}} \left(\frac{p}{q}\right);$

Таъриф: *n*-тоқ натурал сон бўлиб, 1 дан катта бўлсин ва $n = p_1 ... p_k$ - *n* сонини туб кўпайтувчиларга ажратмаси (ҳар хил бўлиши шарт эмас). Ихтиёрий *а* бутун сон учун, *(a,n)=1,* Якоби символи $\left(\frac{a}{n}\right)$ Лежандр символи орқали қуйидаги формула ёрдамида аниқланади.

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) ... \left(\frac{a}{p_k}\right)$$

Мисол: Оқилона таққослашни ўрганинг.

$$x^2 \equiv 983(\bmod 1103).$$

Биламизки, 1101 - туб сон. Лежандр символини ҳисоблаймиз. Квадратлараро ўзаро келишув қонунидан фойдаланиб,

$$\left(\frac{983}{1103}\right)=-\left(\frac{1103}{983}\right)=-\left(\frac{120}{983}\right)=-\left(\frac{2}{983}\right)^3\left(\frac{3}{983}\right)\left(\frac{5}{983}\right)=$$

$$\left(\frac{983}{3}\right)\left(\frac{983}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$

Шундай қилиб, $x^2 \equiv 983(\bmod 1103)$ таққослама ҳал қилиниши мумкин.

Диофант томонидан қилинган ишларни тушиниш учун алгебраик геометрия ва аниқмас тенгламалар назариясидан баъзи маълумотларни билиш керак. Ҳозирги кунда аниқмас тенгламаларни ечиш масаласи қуйидагича ифода этилади: фараз қилайлик, n та номаълумли m та кўпҳад берилган бўлсин ($m<n$): $f_1(x_1,x_2,...x_n), f_2(x_1,x_2,...x_n),..., f_m(x_1,x_2,...x_n)$ бу кўпҳадлар қандайдир K майдондан олинган коэффициентлар билан таъминланган.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,...x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1,x_2,...x_n)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

системанинг барча ечимларининг $M(K)$ тўпламини топиш ва унинг алгебраик тузилишини аниқлаш талаб этилади. Шу билан бирга $(x_1^0,x_2^0,...x_n^0)$ ечимни рационал дейилади, агар барча $x_i^0 \in K$ бўлса.

$M(K)$ тўпламнинг K майдонга боғлиқлиги маълум. Ҳақиқатдан, $x^2+y^2=3$ тенглама Q рационал сонлар майдонида биронта ҳам илдизга эга эмас, лекин $Q(\sqrt{3})$ майдонда, яъни $a+b\sqrt{3}$ $(a,b\in Q)$ кўринишдаги сонлар майдонида чексиз кўп ечимга эга.

Сонлар назарияси учун муҳим бўлган ҳоллар:

1) Қачон $K=Q$ рационал сонлар майдони ёки

2) P туб модулга кўра K чегирмалар майдони.

Диофант ана шу ҳоллардан биринчисини қараган. Бундан кейин бу ерда биз ҳам $K=Q$ деб ҳисоблаймиз.

Қуйида биз фақат Диофантнинг шундай тенгламаларини қараймизки, уларни икки номаълумли битта тенгламага, яъни $m=1, n=2$ ҳолга келтириш мумкин бўлсин:

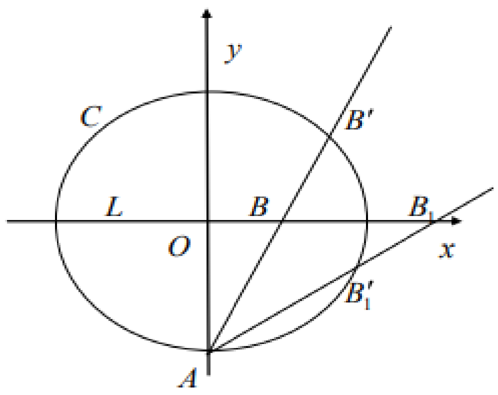
$$f(x,y)=0. \tag{3.2}$$

Бу тенглама R^2 текисликда Г алгебраик эгри чизиқни аниқлайди. (3.2) тенгламанинг рационал ечимини Г эгри чизиқнинг рационал нуқтаси деб атаймиз. Келгусида биз кўпроқ геометрик тилга мурожаат қиламиз аммо, Диофантнинг ўзи асло бундай қилмаган. (3.2) га тартиб бўйича қандайдир синфлаштиришни берамиз. (3.2) эгри чизиқнинг тартиби деганда $f(x,y)$ кўпҳаддаги ҳадларнинг максимал тартиби (бунда x ва y ларнинг даражалари йиғиндиси) тушунилади. Бу тушунчанинг геометрик маъноси эса тўғри чизиқнинг n-тартибли эгри чизиқ билан роппа-роса n та нуқтада кесишиши тушинилади. Бунда кесишган нуқталарнинг карралилари, комплекслари ва “чексиз узоқлашганлар”и қаралади.

Масалан, $x^2+y^2=1$ айлана ва $x+y=2$ тўғри чизиқни 2 та комплекс нуқтада, $x^2-y^2=1$ гипербола ва $y=x$ тўғри чизиқ 2 та чексиз узоқлашган нуқталарда, худди шу гипербола $x=1$ тўғри чизиқ билан эса 2 каррали битта умумий нуқтада кесишади.

Лекин Диофант таҳлили мақсадлари учун (бу терминни ҳозир Диофант геометрияси дейишади) тартиб бўйича классификациялаш жуда қўполга ўхшайди. Буни мисолда тушунтириш қулай. Айтайлик, $C:\ x^2+y^2=1$ айлана ва ҳар қандай рационал коэффициентли $L: y=0$ тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу айлана ва тўғри чизиқнинг рационал нуқтасини қуйидагича бир қийматли мосликка қўйиш мумкин. Буни қуйидагича аниқламиз:

C айлананинг $B^{'}$ нуқталарини L тўғри чизиқнинг B нуқталари билан уларнинг $C \cap L$ ва $(AB) \cap L$ каби кесишган жойларидаги нуқталарини мос қўйилади (3.1-расм).



3.1-расм.

Бундай ҳолда L тўғри чизиқ C айлананинг тартиблари турлича бўлсада, уларнинг Диофант таҳлили ажралмас бўлиб, уларнинг рационал ечимлари тўплами эквивалентдир.

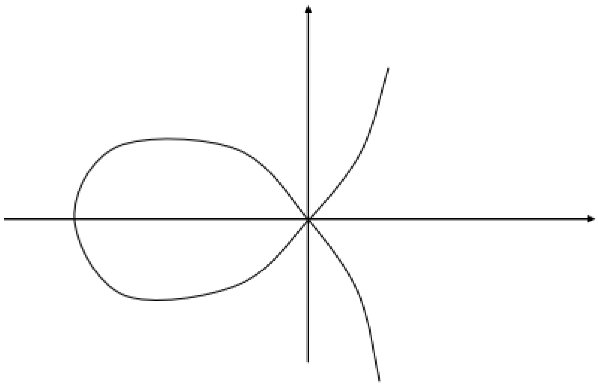
Алгебраик эгри чизиқларни жинс бўйича классификациялаш анча нозик бўлиб, буни XIX асрда Абел ва Риман киритган. Бу классификациялаш Г эгри чизиқнинг махсус нуқталари сонини ҳисобга олади.

Айтайлик, Г эгри чизиқнинг (3.2) тенгламадан иборат $f(x,y)$ кўпҳад рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган ва Г эгри чизиқнинг $P(x_0,y_0)$ нуқтасида унга ўтказилган уринманинг тенгламаси $y-y_0=k(x-x_0)$ бўлсин, у ҳолда $k=\dfrac{f_x^{'}(x_0,y_0)}{f_y^{'}(x_0,y_0)}$ Агар $P(x_0,y_0)$ нуқтада $f_x^{'}$ ёки $f_y^{'}$ нолдан фарқли масалан, $f_x^{'}(x_0,y_0)=0$ ва $f_y^{'}(x_0,y_0)\neq 0$ бўлса, $k=\propto$ бўлиб, уринма эса $P(x_0,y_0)$ нуқтада вертикал бўлади.

Агар $P(x_0,y_0)$ нуқтада ҳар иккала хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлса, яъни $f_x^{'}(x_0,y_0)=0$ ва $f_y^{'}(x_0,y_0)=0$ бўлса, $P(x_0,y_0)$ нуқтани махсус нуқта дейилади.

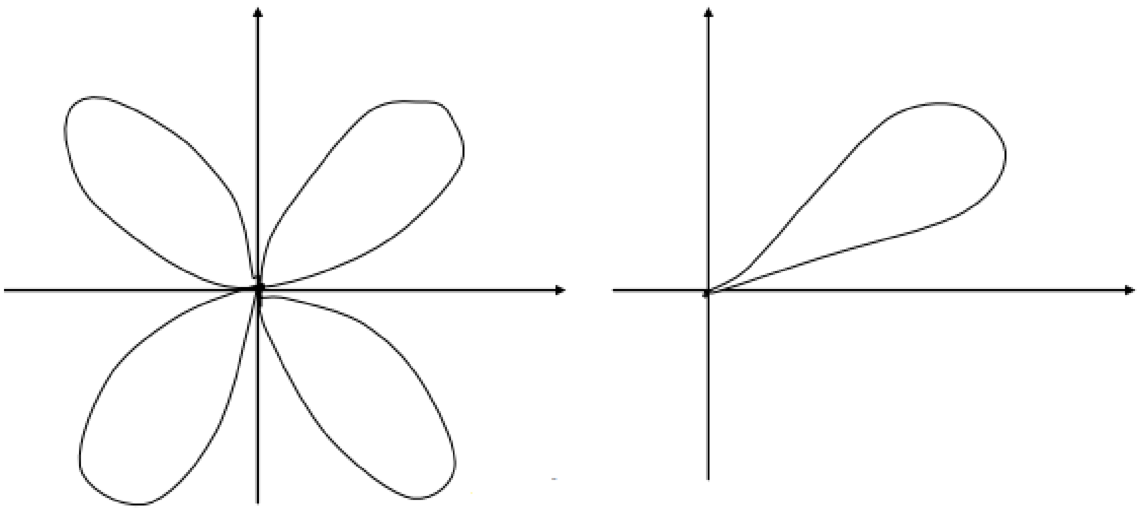
Масалан, $y^2=x^2+x^3$ эгри чизиқда $(0{,}0)$ нуқта махсус, чунки бу нуқтада $f_x^{'}=-2x-3x^2$ ва $f_x^{'}=2y$ лар нолга айланади.

Энг содда махсус нуқта каррали нуқта бўлиб, унда f''_{xx}, f''_{xy} ва f''_{yy} ҳосилалардан камида биттаси нолдан фарқли. 3.2-расмда каррали нуқта тасвирланган бўлиб, бу нуқтадан иккита турлича уринмалар ўтган.



3.2-расм.

Бундан ҳам мураккаброқ бўлган махсус нуқта 3.3-расмда тасвирланган.



3.3-расм.

Алгебраик эгри чизиқда чекли сондаги махсус нуқталар бўлиши мумкин. Айтайлик,

$$f(x, y) = 0 \qquad (*)$$

эгри чизиқ тенгламаси бўлиб, бунда $f(x, y)$ кўпҳад Q рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган бўлсин. Махсус нуқталарнинг координаталари $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$ тенгламаларни ҳамда $(*)$ тенгламани қаноатлантириши керак. Лекин бу учала алгебраик тенгламалар системаси фақат чекли сондаги ечимларга эга бўлиши мумкин. Каррали махсус нуқталардан бошқа ҳеч қандай махсус нуқталари бўлмаган бундай алгебраик эгри чизиқларнинг жинсини аниқлаймиз. Умумий ҳолда, яъни ихтиёрий алгебраик эгри чизиқ учун жинс анча мураккаб аниқланади.

Айтайлик, Г ясси эгри чизиқнинг каррали нуқталари сони $d(d \geq 0)$ га тенг бўлсин, у ҳолда Г нинг жинси ушбу $P = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ формула билан аниқланувчи P бутун сонга айтилади, бунда n сон Г эгри чизиқ тартиби; $P \geq 0$ ни кўрсатиш мумкин.

Агар Г тўғри чизиқ ёки иккинчи тартибли эгри чизиқ бўлса, келтирилган формуладан кўринадики, $P = 0$ яъни, бу эгри чизиқлар (3.2 - , 3.3-расмда жинсга эга эгри чизиқлар)дир. Учинчи тартибли эгри чизиқлар махсус нуқтага эга бўлиш бўлмаслигига боғлиқ бўлиб, 0 ёки 1 жинсга эгадир. Масалан, 1 жинсли “Ферма эгри чизиғи”дир: $x^3 + y^3 = 1$. Бироқ жинс бўйича классификациялаш эгри чизиқнинг арифметик хоссаларини тан олмайди. Масалан, $x^2 + y^2 = 1$ ва $x^2 + y^2 = 3$ эгри чизиқлар 0 жинсга эга, шу билан бирга улардан биринчисида чексиз кўп рационал нуқталар бўлиб, иккинчисида биронта ҳам йўқ.

(2) тенгламани ечишда кўпинча

$$x = \varphi(u, v,), \qquad y = \psi(u, v) \tag{3.3}$$

ўзгарувчиларни алмаштириш қиламиз; бу ерда $\varphi(u,v)$ ва $\psi(u,v)$ икки кўпҳад нисбатларидан иборат рационал функциялардир. (3.3) ни (3.2) тенгламага қўйсак,

$$G(u, v) = 0 \tag{3.4}$$

ни оламиз. Бу тенглама қандайдир Γ' эгри чизиқни ифода этади.

Айтайлик, Γ ва Γ' нинг нуқталари ўзаро бир қийматли бўлиб, бирининг нуқталарини бошқасининг нуқталарига ўтказа олсин ва қуйидаги икки шарт бажарилсин: 1) φ ва ψ лар рационал коэффициентларга эга бўлсин; 2) (3.3) тенглама тескариланувчи, яъни улардан ўз навбатида

$$u=\varphi_1(x,y,),\quad v=\psi_1(x,y)\qquad (3.3')$$

ларни топиш мумкин бўлсин, бунда φ_1 ва ψ_1 лар рационал коэффициентли рационал функциялардир.

Агар Γ ва Γ' эгри чизиқлар орасида (3.3) ва (3.3′) формулалар ёрдамида рационал коэффициентлар билан ўзаро мослик ўрнатиш мумкин бўлса, эгри чизиқларни эквивалент бирационаллар дейилади, бу алмаштиришнинг ўзини эса бирационал дейилади. Масалан, агар $\varphi(u,v)$ ва $\psi(u,v)$ лар ушбу кўринишли чизиқли, яъни

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u,v)=au+bv+c,\\ y&=\psi(u,v)=a_1u+b_1v+c_1\end{aligned}\right\}$$

функциялар бўлса, u,v ларни x,y ларнинг чизиқли рационал коэффициентли рационал функциялари орқали ифодалаш мумкин, яъни алмаштириш бирационал бўлади, бунда $\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0$.

Мураккаброқ мисол кўрамиз. Айтайлик, L эгри чизиқ ўз тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$y^2=x^4-x^3+2x-2=(x-1)(x^3+2)\qquad (**)$$

Буни $v^2=\varphi_3(u)$ ($\varphi_3(u)-$учинчи даражали кўпҳад) кўринишли L' эгри чизиққа бирационал алмаштириш мумкин. Бунинг учун (**) тенгламанинг ҳар икки томонини $(x-1)^4$ га бўлиб, $x-1=\frac{1}{u}$, $\frac{y}{(x-1)^2}=v$ деймиз. У ҳолда (**) тенглама ушбу тенгламага алмашади:

$$v^2=3u^3+3u^2+3u+1$$

Шунинг билан x ва y лар u,v орқали рационал ифода этилади:

$$x=\frac{1+u}{u},\ y=\frac{v}{u^2}\ \text{ва аксинча,}\ u=\frac{1}{x-1},\ v=\frac{y}{(x-1)^2},$$

яъни, L ва L' эгри чизиқлар бирационал эквивалентдир.

Иккита бирационал эквивалент эгри чизиқларнинг M ва M' рационал нуқталар тўпламларини нуқталарнинг чекли тўпламигача бир қийматли мослигини ўрнатиш мумкин.

Диофант таҳлили нуқтаи-назаридан иккита бирационал эквивалент эгри чизиқлар ўзаро тенг ҳуқуқли. Шу билан бирга Γ' эгри чизиқ тартиби умуман олганда Γ эгри чизиқ тартибидан фарқли.

Агар Г учинчи тартибли эгри чизиқ бўлса, у энг камида битта рационал нуқтага эга бўлиб, унинг бирационал алмаштиришлар орқали ҳосил қилинган тенгламасини

$$y^2 = x^3 + ax^2 + b \tag{3.5}$$

кўринишга келтириш мумкин, бунда a ва b лар рационал сонлар.

Фан тарихчиларининг Диофант методларига берган баҳоси.

Келгуси параграфларда иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг рационал нуқталарини аниқлашда Диофантнинг умумий методларга эга бўлганини кўрсатамиз. Пуанкаре ана шу методларни 0 жинсли барча эгри чизиқлар учун қўллаш мумкинлигини кўрсатди. Диофант, шунингдек, учинчи тартибли эгри чизиқларда рационал нуқталарни излаш учун умумий методларни топган, аммо бу методлар иккинчи тартибли эгри чизиқларга тадбиқ этилган методдан кескин фарқ қилади. Пуанкаре ишларидан кўринадики, Диофантнинг бу методлари 1 жинсли ҳар қандай эгри чизиқларга рационал нуқталарни топиш учун қўлланилиши мумкин.

Алгебраик эгри чизиқларнинг рационал нуқталарини топиш учун бошқа ҳеч қандай умумий методлар ҳозиргача мавжуд эмас.

Математика тарихида Диофантнинг метод ва ғояларидан Виет ва Фермадан то Эйлергача бўлган тадқиқотчи математиклар қандай фойдалангани ҳақида қисқача шарх берамиз. Шунингдек, кўпчилик фан тарихчилари математикларга қарама-қарши ўлароқ ҳозиргача Диофант ижодини, унинг илмий меросини баҳолай олмадилар (очиғи баҳоламадилар). Улардан кўпчилиги Диофант тенгламасининг битта хусусий ечимини топиш билан чегараланган, турлича масалалар (тенгламалар) ни ечишга турлича сунъий усулларни қўллаган деб чиқишди, масалан, Г.Ганкель ёзади: “...ҳозирги математикка Диофантнинг 100-масаласини ечишни ўрганиб олгач, 101-масаласини ечишда қийналади ... у қувониш ўрнига тезроқ кўрмай қолади”. Ганкелнинг китоби Пуанкаре ишларигача ёзилган бўлиб, унда ана шундай гаплар (баҳолар берилган) ёзилган эди. Лекин О.Беккер ва И.Гоффманларнинг 1951 йилда чиққан “Математика тарихи” номли китобининг 90-бетида ушбу жумлалар ёзилган: “Диофант ҳеч қандай умумий методни бермайди, лекин ҳар бир янги масала учун янги кутилмаган сунъий усул қўллайдики, булар шарқона усулларни эслатади”. Ана шундай мулоҳазани Ван-дер-Варден ўзининг “Пробуждающая наука” китобида ҳам келтиради: “Одатда у (яъни Диофант) битта масала ечими бутун сонни берадими ёки каср сонни берадими унга масалани ечишга алоҳида усулни қўллайди. Масалаларнинг биридан бошқасига ўтишда ечиш усулларини ўзгартириб боради. Ҳеч бир икки хил масалани бир хил усулда ечмаган”. Айниқса, 2-тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда ҳийлакорлик билан квадрат тенгламаларни рационал илдиз берадиган турларга келтириб, уларга мос хилма-хил усулларни топа олган. Г.Цейтен Диофант учун анча тўғри баҳо берган: “Умуман айтганда Диофант масала учун умумий ечимни изламай биргина ечимни топишга ҳаракат қилган; унинг масалалар ечишдаги қўллаган хусусий, сунъий, хилма-хил усуллари унинг ечимларни излашдаги ижодкорлигидан даракдир”. (“История математики в древности и среднего века”, Гонти, 1938, стр. 167-168). Г.Цейтен 2-тартибли аниқмас тенгламаларнинг рационал ечимларини топишдаги хусусий усулларини атрофлича таҳлил қилади, лекин учинчи тартибли аниқмас тенгламаларни ечишда Диофант қўллаган усулларни кўрмайди, топа олмайди. Энди Диофант масалаларини қарашга киришамиз.

3.5-§. Соннинг кўрсаткичи. Туб модул бўйича индекслар. Икки ҳадли таққосламалар. Иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар

Диофантгача ушбу кўринишдаги тенгламалар қаралган:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ва булардан биринчиси қадимги Вавилонияда ўрганилган. Бу тенгламани ечишдаги формулалар Пифагорчилар томонидан топилган:

$$x^2 = k^2 - 1, \ y = 2k, \ z = k^2 + 1.$$

Юқоридаги икки тенгламадан иккинчиси Евклиднинг “Негизлар” ида $a = 2$ учун рационл сонларда эмас, балки бутун сонлардаги ечимлари тўлиқ келтирилган. a нинг ихтиёрий квадрат бўлмаган ҳоли учун бу тенгламанинг ечимини Архимед билган (у Эратосфенга барчага маълум бўлган “буқалар ҳақидаги масала”ни қўйиган). Диофант ўзининг “Арифметика II” китобида турлича 2-тартибли аниқмас тенгламаларни қарайди ва ушбу муҳим теоремани беради:

Иккита ўзгарувчили иккинчи тартибли аниқмас тенглама биронта ҳам рационал ечимга эга эмас ёки ечимлар параметрнинг рационал функциялари сифатида ифода этилган чексиз кўп $x = \varphi(k,)$ $y = \psi(k)$ ечимларга эга, бунда $\varphi, \ \psi$ лар рационал функциялар.

Буни кўрсатиш (тушунтириш) учун “Арифметика II” китобининг 8-масаласини келтирамиз. “Берилган квадратни иккита квадратга бўлинг. Айтайлик, 16 ни иккита квадратга бўлиш таклиф қилинган бўлсин. Улардан биринчисини x^2 десак, бошқаси $16 - x^2$ бўлиб, $16 - x^2 = y^2$ бўлиши керак. Ана шу квадратланувчи сон $2x - 4$ бўлиб, квадрати $4x^2 + 16 - 16x$ бўлади ва бу $16 - x^2$ га тенг бўлиши лозим. Ҳар икки томонга манфий сонларни қўшиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаймиз, у ҳолда $5x^2 = 16x$ ва $x = \frac{16}{5}$ келиб чиқади. Бири $\frac{256}{25}$ иккинчиси $\frac{144}{25}$ буларнинг йиғиндиси $\frac{400}{25} = 16$ ва булардан ҳар бири квадрат бўлади”.

Энди Диофант методини “соф кўринишда” ажратишга ҳаракат қиламиз.

Фараз қилайлик,

$$x^2+y^2=a^2 \tag{3.6}$$

тенглама берилган бўлсин.

Бу ўз вақтида маркази координаталар бошида бўлган айланани ифода этади. Бу тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0,-a)$ бўлади. Диофант

$$\left.\begin{aligned} x&=x,\\ y&=kx-a \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ўрнига қўйиш қилади. Ихтиёрий k учун $k=2$ ни олади ва $kx-2$ нинг квадрати ҳақида гапирилиб, (3.7) нинг геометрик талқини $(0,-a)$ нуқтадан $y=kx-a$ $\left(2.7'\right)$ тўғри чизиқнинг ўтишидир. Бу тўғри чизиқ (3.6) айланани яна бир нуқтада кесади, унинг координаталари k га боғлиқ рационал функциялардир. Ҳақиқатдан, $x^2+(kx-a)^2=a^2$ ва $x=\dfrac{2ak}{k^2+1}$, $y=kx-a=a\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$.

Шундай қилиб, k нинг ҳар бир рационал қийматига (3.6) эгри чизиқнинг фақат битта рационал нуқтаси мос келади ва аксинча. Унинг исталган нуқтаси билан $(0,-a)$ нуқтани туташтирсак, рационал бурчак коэффициентли тўғри чизиқни оламиз. Диофант методининг моҳиятини “Арифметика II” китобининг 9-масаласини ечишда яққол кўрамиз; у қуйидагича ифодаланади:

“Иккита квадратлар йиғиндиси бўлмиш берилган сонни бошқа иккита квадратларга алмаштирилсин.” Диофант 13 сонини беради, у $4+9$ га тенг. Шундай қилиб, битта ечим $(2,\,3)$ эканлиги маълум. Бошқа ечимларни топиш учун биринчи сонни $x=t+2$, иккинчисини $y=2t-3$ билан белгилайди, яъни у тўғри чизиқни $(2,-3)$ нуқтадан ўтказади.

Диофант методининг мутлақо умумийлигини кўриш қийин эмас.

Агар эгри чизиқ камида битта рационал нуқтага эга бўлса, иккинчи тартибли эгри чизиқнинг барча рационал нуқталарини топишга имконият беради. Ҳақиқатдан, иккита ўзгарувчига боғлиқ 2-тартибли

$$f_2(x,y)=0 \tag{3.8}$$

тенглама берилган ва у (a,b) рационал ечимга эга бўлсин. Диофант изидан бориб, $\left.\begin{matrix} x=a+t, \\ y=b+kt \end{matrix}\right\}$ ўрнига қўйишларни қиламиз ва ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$f_2(a+t,b+kt)=f_2(a,b)+tA(a,b)+ktB(a,b)+t^2C(a,b,k)=0.$$

Лекин, $f_2(a,b)=0$ шунинг учун

$$t=\frac{A(a,b)+kB(a,b)}{C(a,b,k)}.$$

Шундай қилиб, ҳар бир рационал k учун битта ва фақат битта рационал ечим топамиз. Агар берилган тенглама

$$y^2=a^2x^2+bx+c \tag{3.9}$$

кўринишга эга бўлса, Диофант $y=ax+m$ деб тенглама кўринишини ўзгартиради ва $x=\frac{c-m^2}{2am-b}$ бўлади.

Аналитик геометрияда R^2 текисликнинг ҳар бир элементи $(x,y)\in R^2$, проектив текислик эса P^2 бўлиб, унинг элементи $(u,v,z)\in P^2$ лардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли. $(u,v,z)\in P^2$ ва $(u_1,v_1,z_1)\in P^2$ ларни бир хил деймиз, агар $u_1=ku,\ v_1=kv,\ z_1=kz\quad (k,\not\equiv 0)$ бўлса. Шундай қилиб, чексиз кўп учликлар биттагина нуқтани ифода этади. $\forall(u,v,z)\in P^2$ берилган бўлиб, агар $z\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left(\frac{u}{z},\frac{v}{z},1\right)$ нуқта ҳам ўша нуқтани аниқлайди. Бу нуқта билан $(x,y)\in R^2$ орасида бир қийматли мослик ўрнатамиз: $x=\frac{u}{z},\ y=\frac{v}{z},$ Агар $z=0$ бўлса, у ҳолда $(u,v,0)$ нуқта R^2 текисликнинг бирорта нуқтасига жавоб бермайди. Бундай нуқтани чексиз узоқлашган ёки хосмас нуқта деб атаймиз. Барча шундай нуқталар чексиз узоқлашган $z=0$ тўғри чизиқда ётади. Аффин координаталарида ёзилган $f(x,y)=0$ тенгламадан бир жинсли координаталардаги тенгламага ўтиш учун $x=\frac{u}{z},\ y=\frac{v}{z},$ деймиз. Умумий махражга келтириб, мос ўрнига қўйишларни бажариб, $\Phi(u,v,z)=0$ тенгламани оламиз. $\Phi(u,v,z)$ ифода (u,v,z) га нисбатан кўпҳад. Масалан, $x^2-y^2=1$ гипербола тенгламаси бир жинсли координаталарда $u^2-v^2=z^2$ кўринишни олади. Бу эгри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқтасини топиш учун $z=0$ деймиз (бошқача айтганда чексиз узоқлашган тўғри чизиқ билан унинг кесишган нуқтасини топамиз). У ҳолда $v=\pm u$, яъни $(1,1,0)$ ва $(1,-1,0)$ нуқталарни топамиз. Уларнинг ҳар иккаласи ҳам рационл координаталарга эга. Бундай нуқталарни чексиз узоқлашган рационал нуқталар деймиз. Диофант ўрнига қўйишларига қайтайлик. (3.9) тенглама бир жинсли координаталарда

$$v^2=a^2u^2+buz+cz^2 \tag{3.9′}$$

каби ёзилади. $(1,a,0)$ ва $(1,-a,0)$ нуқталар унинг чексиз узоқлашган рационал нуқталари бўлади. Улардан биринчиси орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Бир жинсли координаталардаги тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Au+Bv+Cz=0$ кўринишга эга. Лекин бизнинг нуқта шу тўғри чизиқда ётади, яъни, $A\cdot 1+B\cdot a+C\cdot 0=0$. Демак, $A=ka,\ B=-k,\ C=km$ ўрнига қўйишларни қилиш мумкин, бу ерда $m-$ ихтиёрий. Шундай қилиб, изланган тўғри чизиқ тенгламаси $au-v+mz=0$ бўлади ёки бундан яна аффин координаталарига ўтсак, $y=ax+b$ ни оламиз. Бу эса Диофант томонидан бажарилган ўрнига қўйишлар бўлган. У ўзининг “Арифметика III” китобининг 19-масаласида: “Берилган квадратни иккита квадратга чексиз сондаги усуллар билан ажратиш мумкин” дейди. Яна “Арифметика IV” китобида 19-масалани қуйидагича ифодалайди: “Учта сондан исталган иккитасининг кўпайтмаси бир билан биргаликда квадратни берадиган умумий (ёки аниқмас) ифодани топинг”: Диофант бу ифодаларни ушбу $x+2,\ x$ ва $4x+4$ кўринишда топади ва ёзади: “Шундай қилиб, муаммо умумий (ёки ноаниқ кўринишдаги) ифода ёрдамида ҳал бўлди, бинобарин, улардан ихтиёрий иккитасининг кўпайтмаси бир билан биргаликда x қандай танланмасин, квадратдан иборат бўлади, чунки умумий (ёки ноаниқ кўринишдаги) ифодани топиш – бу шундай формулани бериш деганики, x қандай танланмасин, уни ўрнига қўйгандан сўнг (масала) шартлари қаноатлантирилади”.

$y^2 = a^2x^2 + bx + c$ аниқмас тенгламани ечиш учун Диофант методлари “Эйлер ўрнига қўйишлари” билан устма-уст тушади (математик анализни ўқиган ҳар бир олий ўқув юрти талабасига бу Эйлер ўрнига қўйишлари таниш). У ерда ҳам, бу ерда ҳам x ва y лар битта параметрга боғлиқ рационал функциялар билан ифода этилади; бу ўрнига қўйишлар $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ интегрални ҳисоблашда бажарилади. Бу ерда $y = \sqrt{ax + t}$ ёки $y = tx + \sqrt{c}$ дейиш мумкин.

3.6-§. Учинчи тартибли аниқмас тенгламалар

Диофант ўз “Арифметика IV” китобида учинчи ва тўртинчи тартибли аниқмас тенгламаларни тадқиқ қилади. Бу ерда иш анча-мунча мураккаб: агар учинчи тартибли эгри чизиқ рационал нуқталарга эга бўлса, уларнинг координаталари умуман олганда битта параметрли рационал функциялар билан ифодаланиши мумкин эмас. Лекин, кубик эгри чизиқнинг битта ёки иккита рационал нуқтасини билган ҳолда унинг яна битта учинчи рационал нуқтасини топиш мумкин. Ҳақиқатдан, ҳар қандай тўғри чизиқ учинчи тартибли эгри чизиқни учта нуқтада кесади. Уларнинг координаталарини, масалан, Г эгри чизиқ тенгламаси

$$f_3(x, y) = 0 \tag{3.10}$$

дан y ни чиқариш билан ҳосил қилинган учинчи даражали тенгламадан топиш мумкин. Агар бу натижавий тенгламанинг илдизларидан иккитаси рационал бўлса, учинчи илдизи ҳам рационал бўлади (буни кубик тенглама илдизларининг йиғиндиси x^2 олдидаги коэффициентни тескари ишора билан олинганини x^3 олдидаги коэффициентга бўлинганига тенг эканлигини эътиборга олсак, агар тенглама коэффициентлари рационал бўлиб, унинг иккита илдизи рационал бўлса, учинчи илдизнинг рационал бўлиши маълум). Бу эслатма, масалан, ушбу иккита тасдиққа асосланади:

1) Агар P нуқта эгри чизиқнинг рационал нуқтаси бўлса, Г эгри чизиққа шу P нуқтадан k бурчак коэффициенти рационал бўлган уринма ўтказилади. У Γ билан кесишиб, яна битта рационал нуқтани ҳосил қилади (Ҳақиқатдан, уринма тенгламасини эгри чизиқ тенгламаси билан биргаликда ечиб, каррали рационал илдизга эга бўлган натижавий кубик тенгламани оламиз, демак, учинчи илдиз ҳам рационал бўлади).

2) Агар Γ эгри чизиқнинг P_1, P_2 нуқталари рационал бўлса, бу нуқталардан P_1P_2 тўғри чизиқни ўтказиб, Γ билан кесишадиган учинчи рационал нуқта изланади.

Келгусида бу усулларни Диофантнинг уринма ва кесувчи методлари деб атаймиз. Ана шу методлар тадбиқига доир унинг “Арифметика IV” китобидан олинган 24-масаласини қараймиз: “Берилган сон шундай иккита сонга ажратилсинки, уларнинг кўпайтмаси томонсиз кубга тенг бўлсин.

Айтайлик, 6 сони берилган бўлсин. Биринчи сонни x десак, иккинчиси $6-x$ бўлади. Бирининг иккинчисига кўпайтмасини томонсиз кубга тенглаш қоляпти, аммо у $6x-x^2$ бўлади; бу томонсиз кубга тенг бўлиши керак. Мен кубни қандайдир коэффициентли x-1 дан ҳосил қиламан; айтайлик, $2x-1$ бўлсин, унинг куби минус томони $8x^3+4x-12x^2$ га тенг. Бу $6x-x^2$ га тенг.

Агар иккала қисмдаги x нинг коэффициентлари тенг бўлганда эди, у ҳолда x^3 ва x^2 лик тенг ҳадлар қолар эди; бунда x рационал бўлади. Аммо $4x$ сон $3\cdot 2x$ нинг $2x$ га ошиғи билан қўшимчаси сифатида олинади; ва $3\cdot 2x-2x$ бизга $2\cdot 2x$ ни беради; бироқ, фаразимизга кўра 6 бўлиши керак. Шундай қилиб, иш x олдидаги коэффициентнинг 2 га кўпайтмаси 6 ни берадиган сонни излашга келади. Бу эса 3 бўлади.

Бинобарин, мен $6x-x^2$ нинг куб минус томонга тенг бўлишини истар эканман, у ҳолда кубнинг томонини $3x-1$ деб оламан; бу куб минус томон

$$27x^3+6x-27x^2=6x-x^2$$

ва $x=\frac{26}{27}$ бўлади.

Формулалар бўйича биринчиси = $\frac{26}{27}$, иккинчиси = $\frac{366}{26}$ бўлади”.

Энди Диофант методини соф ҳолда ажратишга ҳаракат қиламиз. Айтайлик, a сон берилган бўлсин. Изланган сонлардан бирини x билан, иккинчисини $a-x$ билан белгилаймиз. Шартга асосан,

$$x(a-x)=y^3-y \tag{3.11}$$

бўлади. Рационал ечимлардан бири $(0,-1)$ бўлади. Диофант йўлидан бориб, бу нуқта орқали

$$y=kx-1 \tag{$*$}$$

тўғри чизиқни ўтказамиз (Диофант дастлаб $k=2$ ни олади) ва унинг (3.11) эгри чизиқ билан кесишиш нуқтасини топамиз:

$$ax-x^2=k^3x^3-3k^2x^2+2kx.$$

x рационал бўлиши учун $2k=a,$ яъни

$$k=\frac{a}{2} \qquad (**)$$

дейиш етарли, буни эса Диофант қўллаган. Шундан кейин

$$x=\frac{3k^2-1}{k^3}=2\cdot\frac{3a^2-4}{a^3}$$

ни топамиз.

$(**)$ шарт $(*)$ тўғри чизиқ учун нимани билдиришини кўрамиз. Буни аниқлаштириш учун икки ўзгарувчили учинчи тартибли ихтиёрий (3.10) тенгламага Диофант методини қўллаймиз. Бу тенглама (a,b) рационал ечимга эга, яъни $f_3(a,b)=0$. $P(a,b)$ нуқта орқали

$$y-b=k(x-a) \qquad (3.12)$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x&=a+t,\\ y&=b+kt \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

тўғри чизиқни ўтказамиз. У ҳолда,

$f_3(a+t,b+kt)=f_3(a,b)+tA(a,b)+ktB(a,b)+t^2C(a,b,k)+t^3D(a,b,k)=0$. Аммо $f_3(a,b)$ ва агар

$$A(a,b)+kB(a,b)=0 \qquad (3.14)$$

десак, у ҳолда

$$k=-\frac{A(a,b)}{B(a,b)}=-\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}(P)$$

ни оламиз, яъни (2.12) тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти шундай танланиши керакки, у (2.10) эгри чизиққа $P(a,b)$ нуқтада уринсин. Шундай қилиб, бу ерда Диофантнинг уринмалар методидан фойдаланилади.

Худди шу методни қўллаб, Диофант “Арифметика VI” китобидан олинган 18-масалани ечади, ва шунингдек, Диофантнинг ўзи тасдиқлаши бўйича бизгача етиб келмаган унинг “Поризмлар” номли китобида қаралган

$$x^3 + y^3 = a^3 - b^3$$

масалани ҳам ечди.

Йўл-йўлакай Диофант уринманинг k бурчак коэффициентини аниқловчи соф алгебраик усулни олди, бу ерда $k - \frac{dy}{dx}$ ёки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f_3}{\partial x}}{\frac{\partial f_3}{\partial y}}$$

ҳосилага тенг. Лимитга ўтишни талаб этмайдиган, яъни соф алгебраик усул билан ёритиладиган бу усул ҳосилани таърифлашнинг тарихий жараёнида катта роль ўйнади, асосан Ферма ва Декартда, ҳозирги даврда эса алгебраик геометрияда кенг қўлланилади.

Энди IV китобининг кесувчи методи қўлланилган 26-масаласига ўтамиз. “Шундай иккита сон топингки, уларнинг кўпайтмаси улардан ҳар бири билан олинганда кубни берсин”.

Фараз қилайлик, биринчи сон кубга тенг коэффициент билан, айтайлик, $8x$ ва иккинчиси эса $x^2 - 1$ бўлсин. Битта шарт бажарилади, чунки кўпайтмага биринчисини қўшиш кубни беради.

Шу кўпайтмага иккинчисини қўшганда ҳам кубни берадиган ҳолни аниқлаш қолди ҳолос. Аммо, иккинчисини қўшиш $8x^3 + x^2 - 8x - 1 = куб$ ни беради. $2x - 1$ дан куб ҳосил қиламиз, бу ушбуни беради: $x = \frac{14}{13}$. Яна формула бўйича: биринчиси $\frac{112}{13}$, иккинчиси эса $\frac{27}{169}$”.

Диофант изидан бориб, биринчи номаълумни a^3x ва иккинчисини $x^2 - 1$ билан белгилаймиз. У ҳолда, масаланинг биринчи шарти бажарилади, иккинчиси эса,

$$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = y^3 \tag{3.15}$$

ни беради. Диофант алмаштиришлар бажариб, $x=\frac{a^3+3a}{1+3a^2}$ ни олади.

Бу ерда қўлланилган метод устида бироз тўхталиб ўтамиз. (3.15) тенгламанинг рационал ечимларидан бири $(0,-1)$ бўлади. Бу нуқта орқали $y=kx-1$ тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг (3.15) билан кесишиш нуқтасини топамиз:

$$\left(a^3-k^3\cdot x^3\right)+\left(1+3k^2\cdot x^2\right)-\left(q^3-3k\cdot x\right)$$

Диофант олдинги ҳолда қилинганидек, x олдидаги коэффициентни эмас, балки x^3 олдидаги коэффициентни нолга тенглайди ва натижада

$$a^3-k^3=0,\ k=a \text{ бўлади.}$$

Бундай тенглаштириш геометрик нуқтаи-назардан нимани билдиради? Бу саволни геометрик талқинда тушунтириш учун $x=\frac{u}{z},\ y=\frac{v}{z}$ деб бир жинсли координаталарда (2.15) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$a^3u^3+u^2z-a^3uz^2-z^3=y^3 \qquad (3.15)$$

Бу ердан эгри чизиқнинг иккита рационал нуқтага эгалигини кўрамиз: $P_1(0,-1,1)$ ва $P_2(1,a,0)$; буларни туташтирувчи тўғри чизиқ $v=au>z$ дан иборат. У эса (3.15) билан кесишиб, учинчи рационал нуқтани беради. Шундай қилиб, бу ерда Диофант берилган рационал нуқталардан бири чекли, иккинчиси эса чексиз узоқлашган ёки махсус бўлган ҳол учун кесувчи методини қўллайди. Диофант ўзининг уринма ва кесувчи методларини бошқа (“Арифметика IV, V, VI” китобларидан олинган) масалаларни ечишда ҳам қўллайди.

МИСОЛЛАР:

3.1. Тенглама ифодаларини барча мумкин бўлган ўзгарувчилар қийматига тўлиқ алмаштириш усули

1. $49x+51y=602$. Барча натурал ечимларини топинг.

Ечиш:

$$x=\frac{602-51y}{49}\geq 1, 602-51y\geq 49,$$

$$51y\leq 553, 1\leq \frac{1043}{51}.$$

Бу ораликдан $x=5, y=7.$ ечимларга келамиз.

Жавоб: (5;7)

2. Тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

$$x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=y^2-12.$$

Ечиш: $x>5$ да тенгламанинг чап томони 5·2, яъни ноль билан тугайди. Ўнг томони ноль билан тугаши мумкин эмас. Қуйидаги жадвални киритамиз.

3.5-жадвал

у нинг охирги рақами	y^2 нинг охирги рақами	y^2-12 нинг охирги рақами
0	0	8
1	1	9
2	4	2
3	9	7
4	6	4
5	5	3
6	6	4
7	9	7
8	4	2
9	1	9

Демак, $x \geq 5$ тенглама ечимга эга эмас. Энди қолган ҳолларда ўрганиб чиқамиз.

$x=4$: да $24=y^2-12$; $y=6$

$x=3$: да $6=y^2-12$; ечимга эга эмас.

$x=2$: да $2=y^2-12$; ечимга эга эмас.

$x=1$: да $1=y^2-12$; ечимга эга эмас.

Жавоб: (4;6).

3. Тенгламанинг бутун ечимини топинг. $x^2+1=3y$.

Ечиш: 1). Тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинади.

2). Чап томонини 3 га бўлганда қандай қолдиқ қолишини кўрамиз. Бутун сонларнинг қолдиқли бўлиш теоремасига асосан, бутун сон 3 га бўлинганда, қолдиқ 1 ёки 2 қолади.

Агар $x=3k$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг ўнг томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+1$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Агар $x=3k+2$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг чап томони 3 га бўлинмайди.

Демак, бундан келиб чиқадики тенглама ечимга эга эмас.

Жавоб: ечимга эга эмас.

3.2. Кўпайтувчиларга ажратиш усули

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг.

$$x^2-4x-y^2+6=0.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини x ва y га нисбатан квадратлар кўринишига келтирамиз.

$$(x^2-4x+4)-4-\left(y^2-2y+1\right)+1+6=0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2-\left(y-1\right)^2=-3$$

$$\left(x-y-1\right)\left(x-2+y-1\right)=-3 \Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(x+y-3\right)=-3.$$

-3 сонини бир неча хил кўринишдаги кўпайтиришлар усули билан ёзиш мумкин.

$-3=3\cdot(-1)=-3\cdot 1=-1\cdot 3=1\cdot(-3).$

$x^2-4x-y^2+6=0.$ тенгламани тўртта система кўринишда ёзиб, бутун ечимларини топамиз.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-y-1=3 \\ x+y-3=-1\end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=-3 \\ x+y-3=1\end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=-1 \\ x+y-3=3\end{cases} \\ \begin{cases} x-y-1=1 \\ x+y-3=-3\end{cases}\end{array}\right.$$ Бу системани ечимидан, (3;-1), (1;3), (3;3), (1;-1) чиқади.

Жавоб: (3;-1), (1;3), (3;3), (1;-1).

2. $1+x+x^2+x^3=2^y$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

Ечиш: Кўпҳадни кўпайтма кўринишга келтирамиз.

$$\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)=2^y,$$

$$\begin{cases} 1+x=2^m \\ 1+x^2=2^{y-m}\end{cases} \begin{cases} x=2^m-1 \\ x^2=2^{n-m}-1\end{cases}$$

$$x^2=2^{2m}-2^{m+1}+1=2^{n-m}-1,$$
$$2^{n-m}+2^{m+1}-2^{2m}=2.$$

1-ҳол. m=0 бўлсин. У ҳолда $2^y+2-1=2; 2^y=1; y=0, x=0.$ натурал ечими йўқ.

2-ҳол. $$m>0; 2^{n-m-1}+2^m-2^{2m-1}=1$$
$$2^{y-m-1}\left(1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y}\right)=1,$$
$$\begin{cases} 2^{y-m-1}=1 \\ 1+2^{2m-y+1}-2^{3m-y}=1\end{cases}, \begin{cases} y-m-1=0 \\ 2m-y+1=3m-y\end{cases},$$
$$\begin{cases} m=1 \\ y=2\end{cases}, x=2^m-1=1.$$

Жавоб: (1;2)

3. (Белорусская математическая олимпиада, г. Гомель, 2012 г) Барча (n,m) бутун сонларни топинг

$$n^2+n+1=\left(m^2+m-3\right)\left(m^2-m+5\right).$$

Ечиш: $n^2+n+1=\left(m^2+m-3\right)\left(m^2-m+5\right)=m^4+m^2+8m-15$.

Ушбу тенгламадан, $n^2+n-\left(m^4+m^2+8m-16\right)=0$. n га нисбатан квадрат тенгламани ечиб,

$D=4m^4+4m^2+32-63=\left(2m^2+2\right)^2-4\left(m-1\right)^2-59<\left(2m^2+2\right)^2$ барча m>2 натурал сонлар учун.

$$D=4m^4+4m^2+32-63=\left(2m^2+1\right)^2+32\left(m-2\right)>\left(2m^2+1\right)^2$$

$n^2+n-\left(m^4+m^2+8m-16\right)=0$ тенгламанинг натурал ечимлари m=1, m=2.

m=1 бўлса, $n^2+n+6=0,$ бундан n=-2 ёки n=-3.

m=2 бўлса, $n^2+n-20=0,$ бундан n=-5 ёки n=4. **Жавоб:** (4;2)

3.3. Бир ўзгарувчининг бошқа ўзгарувчига ифодалаш ва касрнинг бутун қисмини ажратиб кўрсатишга асосланган усул

1. $x+xy-y-2=0$. Тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: y ни x орқали ифодалаймиз.

$$y(x-1)=2-x^2,$$

$$y=\frac{2-x^2}{x-1}=-\frac{x^2-2}{x-1}=-\frac{\left(x^2-1\right)-1}{x-1}=-\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=$$
$$=-\left(x+1\right)+\frac{1}{x-1},\left(x\neq 1\right).$$

x,y бутун сонлар, у ҳолда $\frac{1}{x-1}$ бутун сон бўлиши шарт. Яъни x-1 = ±1.

$$1)\begin{cases} x-1=-1 \\ y=-x-1-1; \end{cases}\begin{cases} x=0 \\ x=-2; \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x-1=1 \\ y=-x-1+1; \end{cases}\begin{cases} x=2 \\ y=-2; \end{cases}$$ **Жавоб:** (0;-2), (2;-2)

2. Тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

$$3x+2y=7.$$

Ечиш: $2\left(x+y\right)=7-x,$ кўринишда ёзиб, 7-x, 2 га каррали, яъни 7-x=2k, $k\in Z$. Демак, x=7-2k , дастлабки тенгламадан у=3k-7 ни топиб оламиз. Бундан келиб чиқадики, ҳамма жуфтликлар (7-2k;3k-7), $k\in Z$ дан иборат.

Жавоб: (7-2*k*;3*k*-7).

2. (Заучная физико-математическая олимпиада г. Москва)

Тенгламалар системасининг бутун ечимларини топинг.

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 0 \\ x + y^2 - z^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Ечиш: Системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

$$\begin{cases} x^2 + y = z \\ x + y^2 + 6 = z^2. \end{cases}$$

У ҳолда, $\left(x^2 + y^2\right) = y^2 + x + 6$ ёки $x\left(x^3 + 2xy - 1\right) = 6$. Бундан x 6 га бўлинади, x=±1;±2;±3;±6. Бизга, қуйидаги қийматлар мос тушади. x=±1;2;3;-6.

Агар x=-1, y =2, z=3; x=1, y=3, z=4; x=2, y=-1, z=3; x=3, y=-4, z=5; x=-6, y=-18, z=18;

Жавоб: (1;3;4), (-1;2;3), (3;-4;5), (-6;-18;18).

3.4. Тўлиқ квадратни ажратиб кўрсатишга асосланган усул

1. Тенгламанинг барча бутун ечимларини топинг:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29.$$

Ечиш: Тенгламанинг чап томонини, тўлиқ квадратга кўтарамиз.

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = \left(x^2 - 6xy + 9y^2\right) + 4y^2 = \left(x - 3y\right)^2 + \left(2\right)^2 = 29.$$

Демак, $\left(2y\right)^2 \le 29.$

$y = 0; \pm 1; \pm 2.$

1. $y = 0. \left(x - 0\right)^2 = 29.$ Бутун ечимга эга эмас.
2. y=-1; $(x+3)^2+4=29$; $(x+3)^2=25$; x+3=5 ёки x+3=-5;
   x=2 ёки x=-8.
3. y=1; $(x+3)^2+4=29$; $(x-3)^2=25$; x-3=5 ёки x-3=-5;
   x=8 ёки x=-2.
4. y=-2; $(x+6)^2+16=29$; $(x+6)^2=13$;

Бутун ечимга эга эмас.

5. y=2; $(x-6)^2+16=29$; $(x-6)^2=13$. Бутун ечими йўқ.

Жавоб: (2;-1), (-8;-1), (8;1), (-2;1).

3.5. Икки ўзгарувчили тенгламани бир ўзгарувчига нисбатан квадратга кўтариб ечиш усули

1. $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$ тенгламанинг бутун ечимини топинг.

Ечиш: *x* га нисбатан квадрат тенгламани қараймиз.

$5x^2+8(y-2)x+5y^2+2y+2=0.$

$D=\left(8y-2\right)^2-4\cdot5\left(5y^2+2y+2\right)=64y^2-32y+4=-100y^2-40y-40=$

$=-36\left(y^2+2y+1\right)=-36\left(y+1\right)^2.$

Тенглама ечимга эга бўлиши учун, D=0.

$$-36(y+1)^2=0.$$

y=-1 бўлса, у ҳолда *x*=1. **Жавоб:** (1;-1)

3.6. Тенглама ифодасини баҳолашга асосланган усул

1. (Белорусская математическая олимпиада школьников, заключительный этап, г. Гомель, 2011 г). Тенгламанинг учлик натурал (x,y,z) ечимларини топинг.

$$3^x+7^y=4^z.$$

Ечиш: z=0, тенглама бутун ечимга эга эмас. *z*=1 бўлса, y=0, x=1.

z=2 бўлса, y=1, x=2.

z≥3 бўлсин. У ҳолда, $(3^x+7^y)\vdots 8.$ *x*-жуфт дейлик. 3^x-ни 8 га бўлсак 3 қолдиқ қолади. 7^y ни 8 га бўлганда 1 ёки 7 қолдиқ қолади, у ҳолда 3^x+7^y , 8 га бўлинмайди. *x=2a* манфий бўлмаган *a* учун, у ҳолда $7^y=4^z-3^x=\left(2^z-3^a\right)\left(2^z+3^a\right).$ $\left(2^z-3^a\right)$*ва*$\left(2^z+3^a\right)$ 7 сонининг даражасидир. $\left(2^z+3^a\right)>1,$ у ҳолда $\left(2^z+3^a\right)\vdots 7.$ Демак, $\left(\left(2^z-3^a\right)+\left(2^z+3^a\right)\right)\vdots 7,$ $\left(2\cdot2^z\right)\vdots 7,$ мумкин эмас. Шунинг учун, $\left(2^z-3^a\right)=1,$ яъни $2^z-1=3^a.$ *z*=2c учун, c манфий бўлмаган бутун сон. У ҳолда, $4^c-3^a=1.$ *a*=1 бўлганда, c=1 ни топамиз ва қуйидаги ечимларга эга бўламиз. x=1, z=2, y=1. Агар, *a*>1, у ҳолда $4^c=3^a+1$ ни 9 га бўлганда 1 қолдиқ қолади. Шундай қилиб, $3^a = 4^c - 1$ 7 га қолдиқсиз бўлиниши керак. Қарама-қаршиликка келдик. Демак, икки ечимдан бошқа ечим йўқ.

Жавоб: (1;0;1) ва (2;1;2).

3.7. Евклид алгоритми ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг. 24x-17y=2.

Ечиш: (24;17;2)=1. Бу Диофант тенглама, ЭКУБ(24,17)=1. Евклид алгоритмидан фойдаланиб (x_0, y_0) хусусий ечимларини топамиз:

$$\begin{aligned}&\frac{24}{17} \Rightarrow 24 = 17\cdot 1 + 7;\\ &17 = 7\cdot 2 + 3;\\ &7 = 3\cdot 2 + 1;\\ &3 = 1\cdot 3 + 0.\end{aligned}$$

ЭКУБ да чизиқли ифодасини аниқлаймиз:

1=7-3·2=7-(17-7·2)·2=7-17·2+7·4+5·7-2·17=5·(24-17·1)-2·17=5·24-5·17-2·17=5·24-7·17=24·5-17·7.

24·5-17·7=1;

24·10-17·14=2;

$$x_0 = 10,\, y_0 = 14; \begin{cases} x = 10 - 17t, \\ y = 14 - 2t, \end{cases} t \in Z.$$

Жавоб: *(10-17t, 14-24t), t∈Z.*

3.8. Занжирли каср ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1.Тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

127x-52y+1=0

Ечиш: $\frac{\mathbf{127}}{\mathbf{52}}$ ни занжир касрлар ёрдамида бўламиз.

$\frac{127}{52} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$. Ҳосил бўлган тенгликка узлуксиз каср ёки чекли занжир каср деб аталади. Бу занжир касрнинг охирги бўғинини олиб ташлаб, қуйидаги янги касрни ҳосил қиламиз. $\frac{\mathbf{127}}{\mathbf{52}}$:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{1}}}=2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9},$$

Шу билан, 127·9-52·22+1=0 ҳосил

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}.$$

қиламиз. Бундан кўриниб турибдики, x=9, y=22 лар тенгламанинг хусусий ечимлари экан.

Умумий ечими: $x=9+52t, y=22+127t\left(t=0,\pm1,\pm2,...\right)$.

3.9. Таққослаш ёрдамида Диофант тенгламасини ечиш

1. Тенгламани ечинг

$$5x-7y=6.$$

Ечиш: (5,7,6)=1 - Диофант тенглама, бунда (5,7)=1, у ҳолда, $\exists x,y\in Z$ - Диофант тенгламанинг ечими.

$y=\frac{5x-7}{6}\in Z\Leftrightarrow\frac{5x-6}{7}\Leftrightarrow 5x\equiv 6(\mathrm{mod}\,7),$ (5,6)=1, у ҳолда таққослама ягона ечимга эга бўлади.

$$5x\equiv 20\left(\mathrm{mod}\,7\right),$$
$$x\equiv 4\left(\mathrm{mod}\,7\right),$$
$$x=4+7t, t\in Z.$$
$$y=\frac{5\cdot\left(4+7t\right)-6}{7}=2+5t, t\in Z.$$
$$\begin{cases} x=4+7t, \\ y=2+5t, \end{cases} t\in Z.$$

Жавоб: (4+7*t*, 2+5*t*), $t\in Z$.

3.10. Пелля тенгламаси

Иккинчи даражали Диофант тенгламаларини Пелля тенгламаси дейилади (бундай тенгламани аниқланмаган Ферма тенгламаси деб ҳам аталади), $x^2-\alpha y^2=1$, бунда α-мусбат бутун сон, тўлиқ квадратга келмайди. Ҳар бир Пелля тенгламаси (±1;0) ечимга эга бўлиб, тривиал деб аталади. Қолган барча ечимлар тривиал эмас бўлади. Пелля тенгламаси чексиз кўп ечимга эга. Пелля тенгламаси ечимининг бир нечта усуллари бор.

1-ҳол: Формулага асосланиб ҳисоблаш усули.

$$\begin{cases} \left(x_0+\sqrt{a}y_0\right)^n = x_n+\sqrt{a}y_n, \\ \left(x_0-\sqrt{a}y_0\right)^n = x_n-\sqrt{a}y_n \end{cases}$$

Икки ўзгарувчили $x_0+\sqrt{a}y_0$ ни n-даражага кўтариш асосида ҳамма ечимлари топилади. Бу усул ечимни топишда “қўлда ҳисоблаш” орқали қулай, чунки бутун сонлар билан ишлаш керак, “кам” операциялар бажарилади ва энг кичик ечимлардан ташқари ҳеч қандай маълумот талаб этилмайди. Аммо компьютерда амалга оширишда муаммолар вужудга келади. Биринчидан, намоён қилиш мураккаблигидир. Кўпгина қўшимча ўзгарувчиларни шакллантириш, Паскаль учбурчагини ва *n+1* йиғиндисини киритиш, даражага “катта” рақамларни киритиш, бунинг учун кўп дастурлаш тилларида алоҳида функция шакллантириш талаб этилади. Иккинчидан, *n+1* ни “катта” рақамлар (агарда a>4294967295 бўлса, a рақамини “катта” деб атаймиз) билан ишлаш лозим, бунинг учун янги типдаги рақамлар яратиш ва улар учун зарур операцияларни (умумийлаштириш, кўпайтириш, фарқлаш, бўлиш, сақлаш) ишлаб чиқиш талаб этилади. Ундан ташқари энг кичик ечимни топиш талаб этилади, бу эса муаммодир.

2-ҳол. Иккинчи усул “гиперболик буриш” амалига асосланган, графикдаги бир бутун нуқтани кейингисига қуйидаги формула асосида ўтказиш:

$$\begin{cases} x_n = x_0x_{n-1}+ay_0y_{n-1}, \\ y_n = x_0y_{n-1}+y_0x_{n-1.} \end{cases}$$

Бу формула математик индукция ёрдамида осон исботланади.

3-ҳол. (Ҳинд усули). Даставвал иккита бутун сонни олиб, Пелля тенгламасининг ўнг томонига қўйиб, натижа топилади. Шундай сонни олиш керакки, ўнг томон бирга яқинроқ бўлиши керак. Кейинчалик ҳосил бўлган тенгламани Пелля тенгламасига кўпайтирилади. Қавслар очилади, тўлиқ квадратга келтирилади ва тенгсизликни қаноатлантирувчи бошқа сон танланади. Тенгламанинг иккала томони уларнинг ЭКУБ ига қисқартирилади ва яна Пелля тенгламасига кўпайтирилади ва ҳоказо давом эттирилади, токи ўнг томони бирга тенг бўлмагунича. Бу алгоритм жуда ҳам мураккаб бўлиб, ўзгарувчиларни бажаришини текшириш тўпламида талаб қилинади ва жуда кўп вақтни олади. Қўлда ҳисоблаганда кичик алгоритмнинг ўзидаёқ хатоликка йўл қўйиш мумкин.

4-ҳол. (Инглиз усули). Занжирли каср асосида алгоритмнинг бажарилиш тартиби қуйидагича: $\sqrt{a}$ ни иккинчи тўлиқ бўлинмадан бошлаб даврий бўлган занжирли касрга ёямиз. Шундай *k* даврни топамизки ва уни *kn* тартибда ҳисоблайди, бунда *n* энг кичик натурал сон, *kn* эса жуфт. Пелля тенгламасининг ҳамма ечимлари мос касрнинг сурат ва махражларидан иборат. Ҳинд ва инглиз усулларини занжирли касрларда қўллаш тўхтатилган.

Мисол. (2012 й. МГУ -олимпиадаси**)** Пелля тенгламасини ечинг.

$$x^2-8y^2=1.$$

Ечиш:

1) (x_0,y_0) кичик сонни топамиз. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}=[2,1,4,1,4,....]$;
2) S=2;
3) $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}}=\frac{P_1}{Q_1}=2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1},$ бундан $x_0=3$, $y_0=1$.

Қолган ечимларни қуйидаги формула ёрдамида топамиз.

$$x_n=\frac{1}{2}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n+\left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right],$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(x_0+\sqrt{d}y_0\right)^n+\left(x_0-\sqrt{d}y_0\right)^n\right].$$

3.11. Каталана тенгламаси

1842 йил Белгия математиги Эжен Шарл Каталан қуйидаги тасдиқни исботлаган. $x^a-y^b=1, бунда, x,y,a,b>1$ натурал сонларда ягона ечимга эга: x=3, y=2, a=2, b=3. (Каталана гипотезаси).

3.12. Марков тенгламаси

1879 йилда 23 ёшли Петербург университети талабаси Марков ўзининг "Мусбат аниқланган бинар квадратик формалар" мавзусидаги магистрлик диссертация ишида ўрганган

$$x^2+y^2+z^2=3xyz$$

тенгламасига Марков тенгламаси дейилади.

3.13. Икки ёки ундан юқори бўлган Диофант тенгламаларини ечиш усули.

$$x^2+y^2=z^2$$

кўринишдаги тенгламалар.

1. (Москва олимпиада масаласи) Бутун сонларда ечинг.

$$6x^2+5y^2=74.$$

Ечиш: Тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз: $6x^2-24=50-5y^2$, яъни $6\left(x^2-4\right)=5\left(10-y^2\right)$. Бундан, $x^2-4=5u, 10-y^2=6v$ ва u=v. Шундай қилиб,

$$x^2=4+5u;\ 4+5u\geq 0,\ \text{бундан}\ u\geq -\frac{4}{5};$$

$$10-y^2=6v;\ 10-y^2\geq 0,\ \text{бундан}\ u\geq -\frac{5}{3};$$

демак u=0 ёки u=1.

u=v=0 бўлса, 10=y^2, бунда y- бутун сон, нотўғри.

u=v=1 га тенг бўлсин, у ҳолда $x^2=9, y^2=4.$

Жавоб: (3;2), (3;-2), (-3;2), (-3;-2).

3.14 Диофант тенгламасининг баъзи тадбиқларига доир ечимлари

1. Тенгламани ечинг.

$$\cos 3x+\cos 4x=2.$$

Ечиш: $\cos 3x\leq 1; \cos 4x\leq 1,$ у ҳолда берилган тенглама қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради.

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 4x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2\pi k, \\ 4x = 2\pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\pi k}{3}, k \in Z, \\ x = \dfrac{n\pi}{2}, n \in Z. \end{cases}$$

Охирги системанинг кесишмасидан: $\dfrac{2\pi k}{3} = \dfrac{n\pi}{2} \Leftrightarrow 4\pi k = 3n\pi \Leftrightarrow 4k = 3n, n \in Z.$

$4k = 3n$ тенгламадан қуйидаги ечимларга эга бўламиз: $k = 3t, n = 4t, t \in Z$ ва тенгламалар системасининг умумий ечимидан қуйидаги тенгламага келамиз. $x = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\pi 3t}{3} = 2\pi t, t \in Z.$

Жавоб: $2\pi t, t \in Z.$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР

I. БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. Агар бўлинувчи ва бўлинма берилган бўлса, бўлувчи ва қолдиқни топинг.

а) 25 ва 3; б) – 30 ва – 4.

2*. Исботланг:

а) тоқ натурал соннинг квадратини 8 га бўлганда 1 қолдиқ қолади;

б) кетма-кет икки натурал сон квадратлари йиғиндисини 4 га бўлганда 1 қолдиқ қолади.

3*. 15 сони ҳар қандай натурал даражага кўтарилиб, 7 га бўлинса 1 қолдиқ қолишини исботланг:

4*. Агар $mn + pq$ $m - p$ га бўлинса, у ҳолда $mq + np$ ҳам $m - p$ га бўлинишини кўрсатинг, бу ерда $m, n, p, q \in Z$.

5*. a, b, c, d, n – бутун сонлар. $ad - bc$, $a - b$ сонлар n га бўлинади ва b, n сонлар бирдан фарқли натурал бўлувчиларга эга эмас. $c - b$ ни n га бўлинишини исботланг:

6. Ихтиёрий бутун n сон учун исботланг:

а) $n^3 - n$ сон 3 га бўлинади; б) $n^7 - n$ сон 7 га бўлинади;

с*) $n^5 - n$ сон 30 га бўлинади.

7*. Олти хонали сон 5 билан тугайди, агар бу сонни чап томонга биринчи ўринга ўтказсак, у ҳолда берилган сондан 4 марта катта сон ҳосил бўлади. Шу сонни топинг.

8*. $n(n+1)(2n+1)(n \in N)$ сонни 6 га бўлинишини исботланг:

9*. Каср соннинг сурати, икки тоқ соннинг квадратлари айирмаси, махражи эса, шу сонлар квадратлари йиғиндисига тенг. Шу каср сурат ва махражини иккига қисқартириш мумкин, 4 га эса қисқармаслигини кўрсатинг.

10*. Тўла квадрат бўлган тўрт хонали соннинг минглар ва ўнлар хонасидаги рақамлари бир хил, юзлар хонасидаги рақам бирлик рақамдан 1 га катта. Шу сонни топинг.

11*. Кетма-кет жойлашган бешта бутун сонлар квадратларининг йиғиндиси тўла квадрат бўлмаслигини исботланг:

12*. Агар бирор сонни 9 га бўлганда қолдиқ 2, 3, 5, 6, 8 сонлардан бирортаси бўлса, шу сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

13. $S_n = 7 + 77 + 777 + ...77...7$ 7 кетма-кетликнинг + 77 + 777 + ... + 77...7

n -та ҳадлари йиғиндисини топинг.

14*. 16 сонининг рақамлари ўртасига 15 сони ёзилган, 1156 сони ўртасига яна 15 ёзилган ва ҳоказо. Шу сонлар тўла квадрат бўлишини кўрсатинг.

15*. Ҳар қандай натурал m ва n лар учун $mn(m^4 - n^4)$ сонни 30 га бўлинишини исботланг:

16*. Ҳеч қандай бутун x учун $3x^2 + 2$ сон тўла квадрат бўла олмаслигини кўрсатинг.

17*. $3^n (n \in N)$ та бир хил рақамлардан тузилган натурал сонни 3^n га бўлинишини исботланг:

2 - §

18. Евклид алгоритми ёрдамида сонларнинг ЭКУБ ва ЭКУК и ни топинг.

а) 546 ва 231; б) 1001 ва 6253; с) 2737, 9163 ва 9639;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

19. Сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиб сонларнинг ЭКУБ и ни топинг.

а) 360 ва 504; б) 220 ва 6600; с) 187 ва 533;

д) 420, 126 ва 525; е) 529, 1541 ва 1817.

20*. Агар $a = cq + r, b = cq_1 + r_1;$ бўлиб, a, b, q, q_1, r, r_1 - бутун номанфий сонлар; с – бутун мусбат сон бўлса,

$(a,b,c)=(c,r,r_1)$ тенгликни исботланг. Бу тенгликдан (a,b,c) ни топиш қоидасини келтириб чиқаринг ва шу қоидани n та сон учун умумлаштиринг.

21. 20-масаладан фойдаланиб, қуйидаги сонларни ЭКУБ и ни топинг.

а) 299, 391 ва 667; б) 588, 2058 ва 2849;

с) 31605, 13524 , 12915 ва 11067.

22. $\left[a,b\right]=\dfrac{ab}{(a,b)}$ формуладан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг ЭКУК и ни топинг.

а) 252 ва 468; б) 279 ва 372; с) 178 ва 381;

д) 299 ва 234; е) 493 ва 221.

23*. Агар $(a,b)=1$ бўлса, қуйидагиларни топинг.

а) $((a,b), [a,b])$; б) $(a+b, ab)$; с) $(a+b, [a,b])$.

24*. Икки сон йиғиндиси 667, ЭКУК и ва ЭКУБ и нисбатлари 120 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

25*. Икки сонни ҳар бирини уларнинг ЭКУБ и га бўлганда ҳосил бўлган бўлинмалар йиғиндиси 18 га тенг. Сонларнинг ЭКУК и 975 га тенг бўлса, шу сонларни топинг.

26*. $a = 899$, $b = 493$ берилган. $d = (a,b)$ ни топинг ва шундай x ва y ларни аниқлангки, $d=ax+by$ кўринишда ифодалаш мумкин бўлсин.

27. 26-масалани қуйидаги жуфтликлар учун бажаринг.

а) $a = 1445$, $b = 629$; б) $a = 903$, $b = 731$; с) $a = 1786$, $b = 705$.

28*. Системаларни натурал ечимларини топинг.

а) $\begin{cases}(x,y)=45\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{11}{7}\end{cases}$; б) $\begin{cases}(x,y)=20\\ xy=8400\end{cases}$;

с) $\begin{cases}(x,y)=28\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{9}\end{cases}$; д) $\begin{cases}xy=20\\ \left[x,y\right]=10\end{cases}$

29*. Агар a, b, c – тоқ сонлар бўлса, $(a,b,c)=\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+c}{2},\dfrac{b+c}{2}\right)$ ни исботланг:

30*. Исботланг:

а) $\left[a,b,c\right]=\dfrac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$;

б) $\left(a,b\right)\left(a,c\right)\left(b,c\right)\left[a,b\right]\left[a,c\right]\left[b,c\right]=a^2b^2c^2$.

31*. $N=10a+b\left(0\le b\le 9\right)$ натурал сон $m=10q+1$ сонга бўлиниши учун фақат ва фақат $a-bq;m$ га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг:

32*. Ҳисобланг.

а) $(n,2n + 1)$; б) $(10n + 9, n + 1)$; с) $(3n + 1, 10n + 3)$.

33*. $N = 10a+b$ $(0 \le b \le 9)$ натурал сон m=10q+9 га бўлиниши учун фақат ва фақат $a+b(q+1)$ ни m га бўлиниши кифоя эканлигини исботланг:

34. Ихтиёрий натурал a ва b лар учун:

$$\left(a,b\right)=\left(5a+3b,13a+8b\right)$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг:

35. Агар $(a,b) = 1$ бўлса, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+b}-$ қисқармас каср эканлигини исботланг:

3 - §

36. Сонлар орасида жойлашган туб сонларни топинг.

а) 200 ва 220; б) 2540 ва 2570; с) 1200 ва 1250.

37*. $n > 1$ натурал сонлар учун m^4+4 ва n^4+n^2+1 мураккаб сонлар бўлишини исботланг:

38*. Қандай туб p сон учун $4p^2+1$ ва $6p^2+1$ туб сонлар бўлади.

39*. Қандай туб p сон учун $p + 10$ ва $p + 14$ туб сонлар бўлади.

40*. Агар $a > 3$, натурал m ва n сонларни 3 га бўлганда мос равишда 1 ва 2 га тенг қолдиқга эга бўлса, a, $a + m$, $a + n$ сонлар бир вақтда туб бўла олмаслигини кўрсатинг.

41*. n ва $n!$ $(n > 2)$ сонлар орасида ҳеч бўлмаганда битта туб сон борлигини исботланг:

42*. Барча $2p + 1$ кўринишдаги бутун сонлар ичида битта сон тўла куб бўлишини исботланг, бу ерда p – туб сон.

43*. Агар туб сонларни 5 туб сондан бошлаб номерлаб чиқилса, у ҳолда ҳар бир туб сон ўзини учланган номеридан катта бўлишини исботланг:

44*. Агар $p > 5$ туб сон бўлса, унинг квадратини 30 га бўлганда қолдиқ 1 ёки 19 бўлишини кўрсатинг.

45*. p ва q – 3 дан катта туб сонлар бўлса, $p^2 - q^2$ сон 24 га каррали бўлишини кўрсатинг.

46*. Сонлар бир вақтда туб сон бўла олмаслигини исботланг:

а) $p + 5$ ва $p + 10$;

б) p, $p + 2$ ва $p + 5$.

47*. Агар тоқ p сонни икки сон квадратлари айирмаси шаклида ягона равишда ифодалаш мумкин бўлса, у туб, акс ҳолда мураккаб бўлишини исботланг:

48*. 47 масала ечимидан фойдаланиб тоқ сонларни кўпайтувчиларга ажратиш усулини келтириб чиқаринг.

а) 6643; б) 1769; с) 3551; д) 6497 сонларни кўпайтувчиларга ажратинг.

49*. Агар N сон икки сонлар квадратлари йиғиндиси шаклида икки хил ифодаланса, яъни $N = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, у ҳолда N мураккаб сон бўлишини исботланг:

50*. $235^2 + 972^2$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

51*. $3^{10} + 3^5 + 1$ сонни кўпайтувчиларга ажратинг.

52*. Агар $1+2^к$ туб сон бўлса, $к = 0$ ёки $к = 2^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) бўлишини исботланг:

53*. Ўзаро туб a,b сонлар учун $a^\alpha + b^\beta$ туб сон бўлса, $(\alpha, \beta) = 1$ ёки $(\alpha, \beta) = 2^k$ ўринли бўлишини кўрсатинг.

54. Агар $2^n - 1$ туб сон бўлса, n – туб сон эканлигини кўрсатинг.

4 - §

55. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a) 2,71828; b) \frac{103993}{33102}; c) \frac{99}{170}; d) \frac{355}{113}.$

56. Касрларни узлуксиз касрларга ёйинг.

$a)\frac{247}{74};b)\frac{77}{187};c)\frac{333}{100};d)\frac{103993}{3302}.$

57. Узлуксиз касрларга ёйилмасидан фойдаланиб, касрларни қиқартиринг.

$a)\frac{3953}{871};b)\frac{6059}{1241};c)\frac{6821}{2147};d)\frac{10027}{32671};e)\frac{3653}{3107}.$

58. Берилган касрни узлуксиз касрга ёйинг ва уни $\frac{P_4}{Q_4}$ каср билан алмаштиринг. Алмаштириш хатосини топинг ва хатоси кўрсатилган ҳолда тақрибий алмаштиришга мос тенглигини ёзинг.

$a)\frac{29}{37};b)\frac{648}{385};c)\frac{571}{359}.$

59. Кўрсатилган чекли узлуксиз касрларга мос оддий қисқармайдиган касрларни топинг.

$\frac{a}{b}=(2,3,1,4);b)\frac{a}{b}=(1,1,2,3,4);c)\frac{a}{b}=(1,3,2,4,3,1,1,1,5);$

$d)\frac{a}{b}=(2,1,1,2,1,6,2,5);e)\frac{a}{b}=(-2,3,1,5,4,2);\ f)\frac{a}{b}=(0,1,3,2,2,2,1,1,7).$

60. Тенгламани ечинг.

$a)(x,2,3,4)=\frac{73}{30};b)(2,1,2,x)=\frac{19}{7}.$

5 - §

61. Ҳисобланг.

$a)[-2,7];b)\left[2+\sqrt[3]{987}\right];c)\left[\frac{7-\sqrt{21}}{2}\right];d)\left[\frac{10}{3+\sqrt{3}}\right];$

62*. Барча ҳақиқий x ва y лар учун $[x + y] \geq [x] + [y]$ тўғрилигини исботланг:

63*. $[ax] = m$ тенгламани ечимини топинг, бу ерда $a \neq 0$, $x \in P$.

64*. m нинг қандай бутун мусбат қиймати учун $[12{,}4 \cdot m] = 86$ тенглик ўринли бўлади.

65*. Агар $p > 2$ туб сон бўлса, $\left[\frac{p}{4}\right]$ нинг қиймати $\frac{p-1}{4}$ ёки $\frac{p-1}{4}$ га тенглигини исботланг:

66*. a сонни m га бўлганда қолдиқ r бўлса, $\left[\frac{a}{m}\right]=\frac{a-r}{m}$ тенгликни исботланг:

67*. Агар m тоқ сон бўлса, $\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m-1}{2}$ ни исботланг:

68*. Тенгламани ечинг.

$a)\left[x^2\right]=2; b)\left[3x^2-x\right]=x+1; c)\left[x\right]=\frac{3}{4}x; d)\left[x^2\right]=x.$

69*. 10^6 ва 10^7 сонлар орасида 786 га каррали бўлган нечта натурал сон бор?

70*. 1000 дан кичик натурал сонлардан нечтаси 5 ва 7 га бўлинади?

71*. 100 дан катта бўлмаган натурал сонлардан нечтаси 36 билан ўзаро туб?

72. 1000! нинг каноник ёйилмасида 11 нечанчи даражада келади?

73. 1964! сони нечта нол билан тугайди?

74. 2311 дан ошмайдиган ва 5, 7, 13, 17 ларга бўлинмайдиган бутун мусбат сонлар сони нечта?

75. 12317 дан катта бўлмаган ва 1575 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

76. 1000 дан катта бўлмаган ва 363 билан ўзаро туб бўлган бутун мусбат сонлар сонини топинг.

77. r^n ! нинг каноник ёйилмасига p туб сон нечанчи даражада келади?

78. Сонларни каноник ёйилмасини топинг.

а) 10! ; б) 15! ; с) 20! ; д) 25! ; е) 30! .

79. $\frac{20!}{10!10!}$ ни каноник ёйилмасини топинг.

80*. α нинг шундай энг катта қийматини топингки, бунда

$$N=\frac{101\cdot102\cdot...\cdot1000}{7^{\alpha}}-\text{ бутун сон бўлсин.}$$

81*. (2m+1)!! нинг каноник ёйилмасида p туб сон нечанчи даражада бўлишини аниқланг.

82*. $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, эгри чизиқли трапецияда бутун координатали нуқталар сони нечта? Бу ерда a ва b – натурал сонлар; $f(x)$ – берилган кесмада узлуксиз ва номанфий функция.

83. $x^2 + y^2 = 6{,}52$ доирада нечта бутун координатали нуқта бор?

84*. Агар $(a, 4) = 1$ бўлса,

$\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=\frac{3(a-1)}{2}$ тенглик тўғрилигини исбтоланг:

85*. Агар $(a, m) = 1$, $m \ge 2$, $a \ge 2$ бўлса,

$\left[\frac{a}{m}\right]+\left[\frac{2a}{m}\right]+\ldots+\left[\frac{(m-1)a}{m}\right]=\frac{(m-1)(a-1)}{2}$ тенглик тўғрилигини исботланг:

86*. x нинг қандай қийматларида $[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]=1$ тенглик ўринли.

87*. $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{x}{m-1}\right]$ тенгламани ечинг, бу ерда m = 2, 3, 4 ... .

88. Қандай шартлар бажарилганда $[ax^2 + bx + c] = d$ тенглама ечимга эга бўлади, бу ерда $a \ne 0$, $d \in Z$.

89. Ҳисобланг. а)$\{2{,}6\}$; b)$\{\frac{8}{3}\}$; c))$\{7\}$; d) $\{-2\frac{1}{2}\}$.

90. Берилган сонларни натурал бўлувчилари ва улар йиғиндисини топинг.

а) 375 ; б) 720 ; с) 957 ; д) 988 ; е) 990 ; ф) 1200.

91. Берилган сонларнинг барча бўлувчиларини топинг:

а) 360 ; б) 375.

92*. $S(m) = 2m - 1$ шарти қаноатлантирувчи натурал m сонлар чексиз кўплигини исботланг:

93*. Агар $(m,n) > 1$ бўлса, $\tau(mn)$ ёки $\tau(m)\,\tau(n)$ лардан қайси бири катта, $S(mn)$ ва $S(m)\,S(n)$ ларчи?

94. Агар $m = 1968$ бўлса, $\tau(m)$, $S(m)$, $\delta(m)$ ларни топинг.

95*. Ўзининг натурал бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган барча натурал сонлар тўплами барча туб сонлар тўплами билан устма-уст тушишини исботланг:

96*. a натурал соннинг барча натурал бўлувчиларининг n-даражаси ($n \in Z$) йиғиндиси $S_n(a)$ формуласини келтириб чиқаринг.

97. Ҳисобланг. а) $S_2(12)$; б) $S_2(18)$; с) $S_2(16)$.

98. 28, 496, 8128 сонлар мукаммал, яъни ўзининг бўлувчилари йиғиндисининг ярмига тенглигини исботланг:

99*. *Евклид теоремасини* исботланг: 2^{α} $(2^{\alpha+1}$ - $1)$ кўринишдаги жуфт натурал сонлар мукаммал сонлардир, бу ерда $2^{\alpha+1} - 1$ – туб сон.

100*. *Эйлер теоремасини* исботланг: 2^{α} $(2^{\alpha+1}$ - $1)$ кўринишдаги натурал сонлар, ягона мукаммал жуфт сонлардир, бу ерда $2^{\alpha+1} - 1$ – туб сон.

101*. *Ферма масаласи*: $2^{\alpha}\cdot\ r_1\ r_2$ кўринишдаги шундай энг кичик сон топингки, унинг барча бўлувчилари йиғиндиси ўзидан уч марта катта бўлсин, бу ерда r_1 ва r_2 – туб сонлар.

102*. Шундай сон топингки, унинг иккита туб бўлувчиси бўлиб, барча бўлувчиларининг сони 6 га, йиғиндиси эса 28 га тенг бўлсин.

103*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 15 та бўлса, унинг куби нечта бўлувчига эга?

104*. Натурал сон иккита туб бўлувчига эга. Шу сон квадратининг барча бўлувчилари сони 81 та бўлса, унинг куби нечта бўлувчига эга?

105*. Исботланг:

$$N = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + d_n}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{n-1}} + \frac{1}{d_n}},$$

бу ерда $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – N соннинг барча бўлувчилари.

106*. Агар $N = a^{\alpha}\ b^{\beta}\ \ldots\ m^{\mu}$ $(a, b, \ldots, m \in Z)$ бўлса, шу сонни иккита сон кўпайтмаси шаклида неча хилда ёзиш мумкин?

107*. $N = 2^{\alpha}\ 5^{\beta}\ 7^{\gamma}$ сон берилган. Агар $5N$, N дан кичик 8 та бўлувчига эга ва $8N$, N дан катта бўлса, N ни топинг.

108. $N = 2^{x}\ 3^{-y}\ 5^{z}$ сон берилган. Агар N ни 2 га бўлсак, янги соннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 30 та кам; агар N ни 3 га бўлсак, янги соннинг бўлувчилари N нинг бўлувчиларидан 35 та кам; агар N ни 5 га бўлсак, янги соннинг бўлувчиларидан 42 та кам. Шу сонни топинг.

109. Агар бирор сон тўла квадрат бўлиши учун фақат ва фақат унинг бўлувчилари сони тоқ бўлишини исботланг:

110. Қуйидагиларни аниқ қийматини ҳисобланг.

а) π (4); б) π (7); с) π (10); д) π (12); е) π (25);

ф) π (50); г) π (200); х) π (500).

111. $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}$ формула ёрдамида қуйидагиларни тақрибий қийматини ва натижанинг нисбий хатосини топинг.

а) π (50), б) π (100); с) π (500).

112*. Чебышев тенгсизлиги ёрдамида $\frac{\pi(x)}{x}\to 0(x\to+\infty)$ ни исботланг:

113*. Ихтиёрий p туб сон учун $\frac{\pi(p-1)}{p-1}<\frac{\pi(p)}{p}$ ўринли, лекин m – мураккаб сон бўлса, $\frac{\pi(m)}{m}<\frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ўринли эканлигини кўрсатинг.

114. Топинг: $a)\varphi(375);b)\varphi(720);c)(988);d)\varphi(1200);e)\varphi(1500);f)\varphi(4320)$.

115. Кўпайтма қийматини топмасдан кўпайтувчиларнинг Эйлер функциясини қийматини топинг.

а) φ (5 · 7 · 13) ; б) φ (12 · 17); с) φ (11 · 14 · 15·); д) φ (990 · 1890).

116. 1 дан 120 гача сонлар интервалида 30 билан ўзаро туб бўлмаган сонлар нечта?

117*. Агар а = $3^{\alpha} 5^{\beta} 7^{\Upsilon}$ ва φ (a) = 3600 бўлса, a ни топинг.

118*. Агар $a = pq$, $p - q = 2$ ва φ (a) = 120 бўлса, a ни топинг.

Бу ерда p ва q – ҳар хил туб сонлар.

119*. Агар $a = p^2 q^2$ ва φ (a) = 11424 бўлса, a ни топинг.

p ва q – ҳар хил туб сонлар.

120*. Агар $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\left(\alpha_1>1,\alpha_2>1,...,\alpha_n>1\right)$ ва $\varphi(a)=462000$ бўлса, a ни топинг.

121*. m дан кичик ва у сон билан ўзаро туб сонлар йиғиндиси $S=\frac{1}{2}m\cdot\varphi(m)$ формула ёрдамида ҳисобланишини исботланг:

122. $S=\frac{1}{2}a\cdot\varphi(a)$ формулани қуйидаги сонлар учун қўлланг.

а) 12; б) 18; с) 375.

123*. Исботланг:

а) $\varphi(2^{\alpha})=2^{\alpha}-1$; б) $\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha-1}\varphi$ (р); с) $\varphi(a^{\alpha})=a^{\alpha-1}\varphi(a)$, $a\in N$.

124. $\varphi(2a)$ ни $\varphi(a)$ ёки $2\varphi(a)$ га тенглигини исботланг. Шу сонлар ўринли бўладиган шартларни топинг.

125*. Исботланг: φ $(4n + 2) = \varphi$ $(2n + 1)$; b) $\varphi(4n)=\begin{cases}2\varphi(n), агар\,(n,2)=1\\ 2\varphi(2n), агар\,(n,2)=2\end{cases}$

126. Тенгламаларни ечинг. а) φ $(5^x) = 100$; б) φ $(7^x) = 294$;

с) φ $(7^x) = 705894$; д) φ $(r^x) = r^{x-1}$, $x\in N$.

127. Берилган b махражли нечта тўғри қисқармас мусбат касрлар мавжуд?

128. 129 масала ёрдамида махражлари қуйидагилар бўлган қисқармас мусбат касрлар сонини топинг.

а) 10; б) 16; с) 36; д) 72.

129. $\frac{a}{b}$ мусбат, тўғри қисқармас каср бўлсин. Агар b = 2 дан b = n гача қийматлар қабул қилса, бундай касрлар нечта?

130. 131 масала шартида b: а) 2 дан 5 гача; б) 2 дан 10 гача; с) 2 дан 15 гача қийматлар қабул қилса, касрлар сонини топинг.

131*. 300 дан кичик натурал сонлар ичида 20 билан тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

132. 1665 дан кичик натурал сонлар ичида у билан 37 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

133. 1476 дан кичик натурал сонлар ичида у билан 41 га тенг умумий бўлувчига эга бўлган сонлар нечта?

134*. а ≥ 3 лар учун φ (a) нинг қиймати доимо жуфт сон бўлишини исботланг:

135*. Агар φ (x) = a тенглама $x = m$ илдизга эга бўлса, $x = 2m$ ҳам тенглама илдизи бўлишини исботланг, бу ерда $(m,2) = 1$.

136*. $(m,n) > 1$ бўлса, $\varphi(mn)$ ёки $\varphi(m)\cdot\varphi(n)$ ларни солиштиринг?

137*. $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\cdot\dfrac{d}{\varphi(d)}$ тенгликни исботланг, бу ерда $(m,n) > 1$.

138*. $\varphi(mn) = \varphi(\delta)\ \varphi(\mu)$ тенгликни исботланг, бу ерда $\delta=(m,n)$, $\mu=[m,n]$.

139. $\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^\alpha)$, $\alpha \in N$ ни ҳисобланг.

140. $\varphi\left(\dfrac{a}{d_1}\right)+\varphi\left(\dfrac{a}{d_2}\right)+\ldots+\varphi\left(\dfrac{a}{d_k}\right)$ ни ҳисобланг, бу ерда d_I –a нинг барча бўлувчилари?

141. Қуйидаги сонлар учун $\sum\limits_{d|a}\varphi(d) = a$ тўғрилигини текширинг.

а) 80; б) 360; с) 375; д) 957; е) 2800.

142. Тенгламаларни ечинг. а) φ (x) = 2^α; б) $\varphi(p^x) = 6 \cdot p^{x-2}$.

143. Тенгламаларни ечинг. а) φ (x) = 14; б) φ (x) = 8; с) φ (x) = 12.

144*. Тенгламани ечинг. $\varphi(2x) = \varphi(3x)$.

145. $\varphi(5x) = \varphi(7x)$ тенглама бутун сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини исботланг:

146. Тенгламаларни ечинг.

а) φ (x) = $\varphi(px)$;

б) $\varphi(px) = p\varphi(x)$;

с) $\varphi(p_1x) = \varphi(p_2x)$ (p_1 , p_2 – турли туб сонлар).

147*. Тенгламани ечинг.

а) $\varphi(x) = \dfrac{x}{2}; \varphi(x) = \dfrac{x}{3}; \varphi(x) = \dfrac{x}{4};$

148. $\varphi\left(p^x\right) = a;$ тенгламани текширинг.

149. Сонларни қўшинг.

a) $1001010_2 + 1101001_2$

b) $1543_6 + 42_6$

c) $65004_8 + 70645_8$

d) $7489(12)_{13} + 5762_{13}$

e) $43(10)(11)7_{12} + 3(10)6_{12} + 5(11)38_{12}$

f) $47(10)9_{11} + 84567_{11}$

g) $(12)724(11)(10)_{13} + 478(10)953_{13}$

150 Сонларни айиринг.

a) $10101011_2 - 110111_2$

b) $1131043_5 - 342144_5$

c) $23042_6 – 5354_6$

d) $783041_9 - 27605_9$

e) $46(10)37_{12} - 72(11)48_{12}$

f) $1(11)(10)9(10)_{13} – (12)(11)9(11)_{13}$

151. Сонларни кўпайтиринг.

a) $4203_5 \cdot 42_5$

b) $5034_6 \cdot 545_6$

c) $50624_7 \cdot 56_7$

d) $42(11)3_{12} \cdot 789_{12}$

e) $343224_7 \cdot 1256_7$

f) $258(10)3_{11} \cdot 56_{11}$

152. Рақамларни бўлишни бажаринг.

a) $111100011_2 : 10101_2$

b) $1141043_5 : 23_5$

c) $471222_8 : 27_8$

d) $51(10)3406_{11} : 548_{11}$

153. g сонлар тизимида g-1 бўлиниш белгисини бажаринг.

154. Юлдузчаларни рақамлар билан алмаштиринг бунда:

a) $7*8(10)5_2$ рақами 11 га бўлинсин;

b) 36*05 рақами 6 га бўлинсин;

c) $51*2_6$ рақами 4 га бўлинсин;

d) $25{*}{*}_8$ рақами 32 га бўлинсин.

155. Бир саноқ системасидан бошқа саноқ системасига ўтишни амалга оширинг.

a) $37051_8 = x_6$; b) $42013_5 = x_7$; c) $890721 = x_8$; d) $45253_7 = x_{12}$;

e) $6785_9 = x_{12}$; *f*) $(11)89(10)_{12} = x_{14}$; g) $6276_8 = x_{13}$; i) $(10)983_{11} = x_{13}$.

156. m ва n ларни g асосли сонлар тизимида ёзинг ва m ни n га қолдиқли бўлинг.

a) $m = 54326_9$, $n = 35_7$, g = 8;

b) $m = 70463_8$, $n = 124_5$, g = 7;

c) $m = 23012_4$, $n = 158_9$, g = 5.

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

157. Қуйидаги таққосламалардан қайсилари тўғри:

a) $1 \equiv -5 \pmod 6$; b) $546 \equiv 0 \pmod{13}$; c) $1956 \equiv 5 \pmod{12}$;

d) $23 \equiv 1 \pmod 4$; e) $3m \equiv -1 \pmod m$?

158*. Берилган модул бўйича ҳар қандай бутун сон ўзининг қолдиғи билан таққосланишини исбот қилинг.

159. Қуйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган x нинг барча қийматларини топинг:

a) $x \equiv 0 \pmod 3$; b) $x \equiv 1 \pmod 2$.

160. Қуйидаги таққосламаларни қаноатлантирадиган m нинг барча қийматларини топинг: $3r + 1 \equiv r + 1 \pmod m$.

161. Агар $x = 13$ сони $x \equiv 5 \pmod m$ таққосламани қаноатлантирса, модулнинг мумкин бўлган қийматларини топинг.

162*. Агар n – тоқ сон бўлса, у ҳолда $n^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$ таққослама ўринли эканлигини кўрсатинг.

163*. Агар $100a + 10b + c \equiv 0$ $(mod\ 21)$ бўлса, у ҳолда $a - 2b + 4c \equiv 0$ $(mod\ 21)$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

164. Агар $3^n \equiv -1$ $(mod\ 10)$ бўлса, у ҳолда $3^{n+4} \equiv -1$ $(mod\ 10)$ $(n \in N)$ таққосламанинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

165*. $2^{11 \cdot 31} \equiv 2$ $(mod\ 11 \cdot 31)$ таққосламанинг тўғрилигини кўрсатинг.

166*. Агар $x = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2,....$ бўлса, у ҳолда $1 + 3^x + 9^x$ нинг 13 га бўлинишини кўрсатинг.

167. $N = 11 \cdot 18 \cdot 2322 \cdot 13 \cdot 19$ сони 7 модул бўйича абсолют қиймати бўйича энг кичик қандай сон билан таққосланади?

168. $3^{14} \equiv -1$ $(mod\ 29)$ ни текширинг.

169. $1532^5 - 1$ ни 9 га бўлганда ҳосил бўладиган қолдиқни топинг.

170*. Агар $a \equiv b$ $(mod\ p^n)$ бўлса, у ҳолда $a^p \equiv b^p$ $(mod\ p^{n+1})$ ни исботланг.

171. Агар $ax \equiv bx$ $(mod\ m)$ бўлса, у ҳолда $a \equiv b\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{(x,m)}\right)$ ни исботланг.

172*. Агар $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} \equiv 0 \pmod{33}$ бўлса, у ҳолда $a_4 + \overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} \equiv 0 \pmod{33}$ ни исботланг. $a_{i+1}= 0$ да $a_{i+1}a_i=a_i$ деб олинг.

173*. Берилган соннинг охирги иккита рақамини топинг: а) 9^9 ; b) 7^9.

174. 10 модул бўйича чегирмаларнинг ҳамма синфларини таққосламалар кўринишида ёзинг.

175. 10 модул бўйича чегирмаларанинг ҳамма синфларини

$$x = 10q + r,\ 0 \le r < 10$$

кўринишда ёзинг.

176. Қуйидаги модуллар бўйича кўрсатилган чегирмаларнинг синфларини ёзинг.

а) 10 модул билан ўзаро туб бўлган; б) 10 модул билан ЭКУБ и 2 га тенг бўлган;

с) 10 модул билан ЭКУБ и 5 га тенг бўлган; д) 10 модул билан ЭКУБ и 10 га тенг бўлган.

177. Берилган модуллар бўйича чегирмаларнинг тўла ва келтирилган системаларининг барча турларини ёзинг: а) $m = 9$; б) $m = 8$; с) $p = 7$; д) $m = 12$.

178*. 25, -20, 16, 46, -21, 18, 37, -17 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилишини кўрсатинг.

179. 32, -9, 15, 42, -18, 30, 6 сонларни p=7 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

180. 21, 2, -18, 28, -19, 40, -22, -2, 15 сонларнинг 9 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

181. 24, 18, -19, 37, 28, -23, -32, 5, 41, -35, -33 сонларнинг 11 модул бўйича чегирмаларнинг тўла системасини ташкил этишини кўрсатинг.

182. 19, 23, 25, -19 сонларнинг 12 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

183. 11, -1, 17, -19 сонларнинг 8 модул бўйича чегирмаларнинг келтирилган системасини ташкил этишини кўрсатинг.

184*. 24, 14, 25, 37, -8, -19, -40 сонларнинг 6 модул бўйича энг кичик манфий бўлмаган, абсолют қиймати бўйича энг кичик мусбат бўлмаган ва абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларини топинг. Бу сонлар берилган модул бўйича нечта ҳар хил синфларга тегишли бўлади? Қайси сонлар берилган модул бўйича бир синфга тегишли бўлади?

185. Манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $5x^2 – 15x + 22 \equiv 0$ (mod 3); б) $x^2 + 2x + 2 \equiv 0$ (mod 5); с) $3x \equiv 1$ (mod 5);

д) $8x \equiv 3$ (mod 14); е) $x^3 - 2 \equiv 0$ (mod 5); ф) $x^2 - 2x + 1 \equiv 0$ (mod 4);

г) $27x^2 - 13x + 11 \equiv 0$ (mod 5).

186. Таққосламаларнинг хоссалари ёрдамида дастлаб соддалаштириб, сўнгра абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмаларни бевосита синаш усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $12x \equiv 1$ (mod 7); б) $8x \equiv 1$ (mod 5); с) $3x \equiv 13$ (mod 11); д) $6x \equiv 3$ (mod 7); е) $6x + 5 \equiv 1$ (mod 7); ф) $90x^{20} + 46x^2 - 52x + 46 \equiv 0$ (mod 15).

187. Қуйидаги таққосламаларни ечимга эга эмаслигини кўрсатинг.

а) $2x - 3 \equiv 0$ (mod 6); б) $x^2 - 2x + 3 \equiv 0$ (mod 4); с) $x^3 + x + 4 \equiv 0$ (mod 5);

д) $x^4 + 2 \equiv 0$ (mod 5); е) $x^5 – 2x^3 + 13x - 1 \equiv 0$ (mod 4).

188. Номаълумнинг ихтиёрий бутун қийматлари қуйидаги таққосламаларни қаноатлантиришини кўрсатинг.

а) $x^2 - x + 6 \equiv 0 \ (mod\ 2)$; б) $x(x^2 - 1) \equiv 0 \ (mod\ 6)$;

с) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \equiv 0 \ (mod\ 4)$; д) $x^r - x \equiv 0 \ (mod\ p)$.

189. Таққосламанинг хоссаларидан фойдаланиб, алмаштиришлар орқали қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $2x \equiv 7 \ (mod\ 15)$; б) $5x \equiv 2 \ (mod\ 8)$; с) $7x \equiv 2 \ (mod\ 13)$;

д) $3x \equiv 23 \ (mod\ 37)$; й) $27x \equiv 14 \ (mod\ 25)$; ф) $13x \equiv 10 \ (mod\ 11)$;

г) $5x \equiv 3 \ (mod\ 11)$; ҳ) $7x \equiv 5 \ (mod\ 24)$.

190. x нинг қандай бутун қийматларида $5x^2 + x + 4$ квадрат учҳад 10 га бўлинади?

191. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \ (mod\ 6)$ таққосламани $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \ (mod\ 2)$ зарурий шартдан фойдаланиб ечинг.

192. $x^{\varphi(30)} \equiv 1 (mod\ 30)$ таққосламани ечинг.

193. $x^{\varphi(м)} \equiv 1 (mod\ m)$ таққослама нечта ечимга эга?

194*. Агар $(n,m)=1$ бўлса, у ҳолда n-даражали $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\equiv0(mod\ m)$ таққосламани янги y ўзгарувчини киритиш билан $(n$-$1)$ даражали ҳади қатнашмайдиган $y^n+b_2x^{n-2}+...+b_n\equiv0(modm)$ таққосламага келтириш мумкинлигини кўрсатинг.

195*. Олдинги масаладан фойдаланиб, $x^3+5x^2+6x-8\equiv0(mod13)$ таққосламани уч ҳадли $y^3+ry+q\equiv0(mod13)$ таққосламага келтиринг.

196. Эйлер усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $5x \equiv 7 \ (mod\ 10)$; б) $3x \equiv 8 \ (mod\ 13)$; с) $7x \equiv 5 \ (mod\ 17)$;

д) $13x \equiv 3 \ (mod\ 19)$; е) $27x \equiv 7 \ (mod\ 58)$.

197. Узлуксиз касрлар усули билан қуйидаги таққосламаларни ечинг.

а) $7x \equiv 4 \ (mod\ 19)$; b) $143x \equiv 41 \ (mod\ 221)$; c) $13x \equiv 178 \ (mod\ 153)$;

d) $67x \equiv 64 \ (mod\ 183)$; e) $89x \equiv 86 \ (mod\ 241)$; f) $213x \equiv 137 \ (mod\ 516)$;

g) $111x \equiv 81 \ (mod\ 447)$; h) $186x \equiv 374 \ (mod\ 422)$; j) $129x \equiv 321 \ (mod\ 471)$.

198. Қулай усул билан қуйидаги таққосламаларни ечинг.

a) $12x \equiv 9 \ (mod\ 18)$;

b) $20x \equiv 10 \ (mod\ 25)$;

c) $-50x \equiv 67 \ (mod\ 177)$;

d) $-73x \equiv 60 \ (mod\ 311)$;

e) $-53x \equiv 84 \ (mod\ 219)$;

f) $90x + 18 \equiv 0 \ (mod\ 138)$;

g) $78x \equiv 42 \ (mod\ 51)$.

Жавобларни берилган таққосламага қўйиш билан текшириб кўринг.

199*. Биринчи даражали 21 модул бўйича қуйидаги таққосламаларни тузинг. а) фақат ягона ечимга эга бўлган;

б) 3 ва 7 та ечимга эга бўлган;

c) 2, 10, 15 та ечимга эга бўлган.

200. Туғилган куннинг 12 га кўпайтмаси ва ойнинг 31 га кўпайтмаларининг йиғиндиси 198 бўлса, туғилган кунни топинг.

201*. 523 сонининг чап томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 7, 8 ва 9 га бўлинсин.

202. 629 сонининг ўнг томонидан шундай уч хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган олти хонали сон 5, 8 ва 11 га бўлинсин.

203. 723 сонининг ўнг томонидан шундай икки хонали сонни ёзингки, ҳосил бўлган 5 хонали сонни 31 га бўлганда 7 қолдиқ қолсин.

204. Қуйидаги тенгламаларни бутун сонларда ечинг.

a) $3x + 4y = 13$;

b) $8x - 13y = 63$;

c) $43x + 37y = 21$;

d) $45x - 37y = 25$;

e) $81x - 48y = 33$;

f) $26x + 3y = 13$;

g) $53x + 17y = 25$;

h) $47x - 105y = 4$;

i) $18x - 33y = 112$;

j) $11x + 16y = 156$;

k) $12x - 37y = -3$;

l) $23x + 15y = 19$.

205. Дон ташиш учун 60 кг ва 80 кг лик қоплар бор. 440 кг донни ташиш учун шу қоплардан нечта керак бўлади?

206. 14900 сўмга 300 сўмлик ва 500 сўмлик чипталардан нечтадан сотиб олса бўлади?

207. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг.

a) $\begin{cases} x \equiv 4\pmod 5 \\ x \equiv 1\pmod{12} \\ x \equiv 7\pmod{14} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x \equiv 1\pmod{25} \\ x \equiv 2\pmod 4 \\ x \equiv 3\pmod 7 \\ x \equiv 4\pmod 9 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x \equiv 7\pmod{13} \\ 5x \equiv 8\pmod{17} \\ 3x \equiv 7\pmod{31} \\ 14x \equiv 35\pmod{19} \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x \equiv 7\pmod{13} \\ x \equiv 2\pmod{17} \\ 5x \equiv 3\pmod 9 \\ 8x \equiv 4\pmod{14} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 3x \equiv 7\pmod{10} \\ 2x \equiv 5\pmod{15} \\ 7x \equiv 5\pmod{12} \end{cases}$; f) $\begin{cases} 4x \equiv 1\pmod 9 \\ 5x \equiv 3\pmod 7 \\ 4x \equiv 5\pmod{12} \end{cases}$;

208. 2, 3, 4 га бўлинганида 1 қолдиқ қоладиган ва 5 га қолдиқсиз бўлинадиган барча натурал сонларни топинг.

209. 4, 5, 7 га бўлинганида мос равишда 3, 4, 5 қолдиқ қоладиган 200 ва 500 сонлари орасидаги барча бутун сонларни топинг.

210. Қуйидаги таққосламалар системаларини ечинг.

a) $\begin{cases} x+3u \equiv 5 \\ 4x \equiv 5 \end{cases}\pmod 7$; b) $\begin{cases} x-2u \equiv 1 \\ x \equiv 2 \end{cases}\pmod 4$; d) $\begin{cases} 3x-5u \equiv 1 \\ 9u \equiv 15 \end{cases}\pmod{12}$;

c) $\begin{cases} 9u \equiv 15 \\ 3x-7u \equiv 1 \end{cases}\pmod{12}$; e) $\begin{cases} x+2u \equiv 0 \\ 3x+2u \equiv 2 \end{cases}\pmod 5$

f) $\begin{cases} 3x+4u \equiv 29 \\ 2x-9u \equiv -84 \end{cases}\pmod{143}$.

III БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. $x^2-2y^2=1.$ тенгламани қаноатлантирувчи барча x, y ларни топинг.

212. $x^2-y^2=7$ тенгламанинг натурал ечимларини топинг.

213. $x^4\left(x^2-x^4+2y\right)=y^2+1999$ тенгламанинг бутун ечимларини топинг.

214. $x^3+y^3=8^{30}$. x ,y – ларнинг бутун қийматини топинг.

215. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2)=2005.$ x, y ,z ларнинг натурал ечимини топинг.

216. $10x^2+11xy+3y^2=7$ x, y ларни бутун ечимларини топинг.

217. $n^2+n=m^2+2m-9$ (n,m)-ларнинг бутун қийматини топинг.

218. $2x^3+x^2+10x+5=2\cdot p^n$. (x,n,p) ларни x, n –натурал ва p –туб сонларни топинг

219. $(m+n)^{m^2+n^2}=(m^2+n^2+2)^{mn}$ барча натурал ечимларини топинг.

220. $(n!)^m!$-$(m!)^n!$=28. m ва n ларнинг натурал ечимларини топинг.

221. $y^2-11x^2=1.$ Пелля тенгламасини натурал ечимини топинг.

222. . $34x^4+24y^3=100000.$ тенгламанинг бутун қийматли ечимини топинг.

223. $\cos 2x+\cos\frac{6}{5}x=-2.$ тенгламани ечинг.

224. . $\sin ax+\sin bx=2.$ тенгламани ечинг.

225. . $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$ тенгламани ечинг.

226. 1.13x+4y=13; 24. 81x−48y=33;

227. 1.28x−13y=63; 25. 26x+34y=13;

228. 1.37x−19y=23; 26. 122x+129y=2;

229. 1.439x−22y=10; 27. 258x+172y=56;

230. 1.517x−25y=117; 28. 38x+117y=209;

231. 1.643x+37y=21; 29. 119x−68y=34;

232. 1.753x+47y=11; 30. 258x−175y=113;

233. 1.845x−37y=25; 31. 41x+114y=5.

Тенгламаларни узлуксиз каср ва таққосламалар ёрдамида ечинг.

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

I. БОБ. БУТУН СОНЛАР ХАЛҚАСИДА БЎЛИНИШ МУНОСАБАТИ

1 - §

1. а) $q = 7$; 8 ва $r = 2$; 6; б) $q = 8$; 9 ва $r = 2$; 6.

2. а) Ечиш: $(2n+1)^2 = 4n(n+1) + 1$, бу ерда $n(n+1)$ 2 га бўлинади;

б) Ечиш: $n^2 + (n + 1)^2 = 2n\,(n + 1) + 1$, бу ерда $n\,(n+ 1)$ 2 га бўлинади.

3. Кўрсатма. $15 = 7\cdot 2 + 1$. Агар $15n = 7q+1$, у ҳолда $15n+1 = 5n \cdot 15 = 7 + 1$.

4. Ечиш. Масала шарти бўйича, $\frac{mn+pq}{m-p} = t -$бутун сон.

$$\frac{mq+np}{m-p} - t = \frac{mq+np}{m-p} - \frac{mn+pq}{m-p} = \frac{q(m-p)-n(m-p)}{m-p} = q - n..$$

Бундан $\frac{mq+np}{m-p} = q - n + t$ бутун сон. Демак, $mq + np; m - p$ га бўлинади.

5. Ечиш. Масала шартига кўра, $ad\text{-}bc=nt$ ва $a - b = nt_1$. Иккинчи тенгликни d га кўпайтириб, биринчисидан айирамиз:

$b(c\text{-}d) = n\,(dt_1 - 1)$.

Бундан b ва n га қўйилган шартларларга асосан $c–d$ ни n га бўлиниши келиб чиқади.

6. с) Ечиш. $$\begin{aligned} m^5 - m &= (m-1)m(m+1)(m^2+1) = (m-1)m(m+1)\cdot[(m^2-4)+5] = \\ &= (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2) + 5(m-1)(m+1). \end{aligned}$$.

Қўшилувчиларнинг ҳар бири 30 га бўлинади, чунки k та кетма-кет сонлар кўпайтмаси $k!$ га бўлинади (бу $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k} -$ бутун сон бўлишидан келиб чиқади). Бундан йиғинди ҳам 30 га бўлинади, демак $m^5 - m$ 30 га бўлинади.

7. Ечиш. $10x + 5$ – изланаётган сон бўлсин. 5 рақамни чап томондан биринчи ўринга қўйиб $5\cdot 10^5 + x$ ни ҳосил қиламиз . Берилган шартларга кўра, $5\cdot 10^5 + x = 4\,(10x + 5)$ тенгламага келамиз. Бундан, $x = 112820$ келиб чиқади.

8. Ечиш. Масала шартини қуйидагича ёзиб оламиз:

$n(n+1)\,(2n+1) = n\,(n+1)\,[(n-1) + (n+2)] = (n-1)\,n\,(n+1) + n\,(n+1)(n+2)$.

Ҳар бир қўшилувчи 6 га бўлинишидан (6 масала ечимидан) йиғиндини 6 га бўлиниши келиб чиқади.

9. Ечиш. $\frac{(2m+1)^2-(2n+1)^2}{(2m+1)^2+(2n+1)^2}=\frac{4(m+n+1)(m-n)}{2[2(m^2+n^2+m+n)]}$ ҳосил бўлган касрни фақат 2 га қисқартириш мумкин.

10. Ечиш. $N^2 = 1000x + 100(y+1) + 10x + y = 101(10x + y) + 100.$

Бундан, $10x+1=\frac{(N+10)(N-10)}{101}, N=91, N^2=8181.$

11. Ечиш. $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = 5(n^2 + 2)$ тўла квадрат бўлиши учун $n^2 + 25$ га каррали бўлиши керак ёки $н^2$ нинг охирги рақами 8 ёки 3 бўлиши керак, бу мумкин эмас.

12. Ечиш. Ҳар қандай бутун сонни қуйидагилардан бирортаси шаклида ёзиш мумкин: $9k$, $9k \pm 1$, $9k \pm 2$, $9k \pm 3$, $9k \pm 4$. Бу сонлар квадратлари:

$(9k)^2 = 9(9k^2)$; $(9k \pm 1)2 = 9(9k^2 \pm 2k) + 1$; $(9k \pm 2)2 = 9(9k^2 \pm 4k) + 4$;

$(9k \pm 3)^2 = 9(9k^2 \pm 6k + 1)$; $(9k \pm 4)^2 = 9(9k^2 \pm 8k + 1) + 7$. Натижада бутун сон квадрати 9 га бўлганда қолдиқ фақат 0, 1, 4, 7 бўлиши мумкинлиги келиб чиқади.

13. Ечиш.

$$S_n = 7(1+11+111+\ldots+111\ldots11) = 7(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}) = \frac{7}{81}(10^{n+1}-9n-10).$$

14. Ечиш.

$$111\ldots11555\ldots56=\frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot10^{n+1}+5\cdot10\cdot\frac{10^n-1}{9}+6=(\frac{10^{n+1}+2}{3})^2=(\frac{10^{n+1}-1}{3}+1)^2=(333\ldots33+1)^2.$$

15. Ечиш. $m(m^4 - n^4) = n(m^5 - m) - m(n^5 - n)$ 30 га каррали (1 мисолга кўра).

16. Ечиш. $y^2 = 3x^2 + 2$ тенглама бутун сонларда ечимга эга эмас. Ҳақиқатдан ҳам, уни $y = 3n$ ёки $y = 3n \pm 1$ шакллардан бирортаси кўринишида ифодалаш мумкин ва бундан y^2 ни 3 га бўлганда қолдиқ фақат 0 ёки 1 бўлади. Масала шартига кўра, қолдиқ 2 бўлиши керак.

17. Ечиш. Математик индукция усулини қўллаймиз: $\overline{aaa}$ сон 3 га бўлинади, чунки $a + a + a = 3a$; Агар $\overline{aa\ldots a}$ сон 3^n га бўлинса, у ҳолда

$\overline{aa...a} = \overline{aa...a}\overline{aa...a}\overline{aa...a} = \overline{aa...a}\cdot\left(10^{3^n}\right)^2 + \overline{aa...a}\cdot 10^{3^n} + \overline{aa...a} = aa...a\cdot 100...0100...01$ 3^{n+1} га бўлинади.

2 - §

18. а) 21, б) 13; с) 119; д) 3; е) 23.

19. а) 2520; б) 138600; с) 99671; д) 881200.

20. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = cq + r$, $b = cq_1 + q_1$ дан $d|r$ ва $d|r_1$ келиб чиқади. $d = (c, r, r_1)$ ни исботлаймиз. $(c, r, r_1) = D$ бўлсин. $a = cq + r$ ва $b = cq_1 + r_1$ тенгсизликлардан $D|a$, $D|b$ ва шарт бўйича $D|c$. Бундан $D = (a, b, c)$ ва демак, $D = d$. n та сон учун $(a_1a_2,...,a_n) = (a_n, r_1, r_2,..., r_{n-1})$ ни оламиз, бу ерда $(r_1, r_2,..., r_{n-1} - a_1a_2,..., a_{n-1})$ сонларни a_n га бўлгандаги қолдиқ.

21. а) 23; б) 7; с) 21.

22. а) 3776; б) 1116; с) 67818; д) 5382; е) 6409.

23. а) Ечиш. $(d,m) = (d, [dx, dy]) = d(1, [x, y]) = d$. Агар $d = (a_1a_2,...,a_n)$ ва $m = (a_1a_2,...,a_n)$ деб олсак, натижа ўзгармайди;

б) Ечиш. Агар $p = a + b$ ва $a\cdot b$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлса, у ҳолда a ёки b сонлардан бирортаси p га бўлиниши керак. $a + b$ ни p га бўлинишидан p сон a ва b ларни умумий бўлувчиси эканлиги келиб чиқади. Бу масала шартига зид, чунки $(a, b) = 1$;

с) Ечиш. $(a, b) = d$ ва $a = dx$, $b = dy$ бўлсин, бунда $(x, y) = 1$. Бу ҳолда $(a + b, m) = (d(x + y), dxy) = d(x + y, xy) = d$. Демак, $(a+b, [a,b]) = (a, b)$.

24. Ечиш. x ва y – изланаётган сонлар бўлсин ва $(x, y) = d$, бундан $x = dm$ ва $y = dn$ ва $(m, n) = 1$. Шартга кўра, $x + y = d(m+ n) = 667 = 23\cdot 29$. Шарт бўйича $\frac{[x,y]}{(x,y)} = 120$, бундан $[x,y]=120\cdot(x,y)=120d$, бошқа томондан $[x,y] = \frac{xy}{d} \Rightarrow \frac{xy}{d} = 120d$ ёки $xy = 120d^2$. Булардан $\begin{cases} x + y = 23\cdot 29 \\ xy = 120d^2 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз. $d(m+ n) = 23\cdot 29$ дан $d = 23$ ва $d = 29$ ($d = 1$ ёки $d = 23\cdot 29$ - ўринли бўлмайди) бўлиши мумкин. $d = 23$ бўлганда, $x = 552$, $y = 115$. $d = 29$ да $x = 435$, $y = 232$.

25. Ечиш. x ва y – номаълум сонлар ва $(x,y) = d$ бўлсин. У ҳолда $\frac{x}{d}=m, \frac{y}{d}=n,$ бунда $(m,n) = 1$. Шарт бўйича $m+n = 18$,

$\left[x, y\right]=\frac{xy}{d}=\frac{dm\cdot dn}{d}=mnd=975=3\cdot 5^2\cdot 13.$ Бундан $\begin{cases} m+n=18 \\ mnd=3\cdot 5^2\cdot 13 \end{cases}$ ни ҳосил қиламиз ва унинг ечими $m = 5$, n =13, d =15 бўлади. Демак, $x = 75$, $y = 195$.

26. Ечиш. Шарт бўйича, $a = 899$, $b = 493$. Евклид алгоритмига кўра: $a = b\cdot 1 + 406$, $b = 406\cdot 1 + 87$, $406 = 87\cdot 4 + 58$, $87 = 58\cdot 1 + 29$, $58 = 29\cdot 2$ бўлади. Охирги иккинчи тенгликдан бошлаб,

$$29 = 87–58 = 87–(406–87\cdot 4) = 87\cdot 5–406 = (b-406)\cdot 5–406 = 5b-406\cdot 6 =$$
$$5b-(a-b)6 = a(-b)+b\cdot 11 \text{ ни оламиз.}$$

$29 = 899x + 493y$ билан солиштирсак, $x = -6$, $y = 11$ келиб чиқади.

27. а) $17 = a\,(-10) + б \cdot 23 = ax + by$;

б) $43 = a \cdot (-4) + б \cdot 5 = ax + by$;

с) $47 = a \cdot 2 + б\,(-5) = ax + by$.

28. а) Ечиш. $x = 45u$ ва $y = 45v$, бу ерда $(u,v) = 1$, $\frac{u}{v}=\frac{11}{7}$ дан

$u = 11$ ва $v = 7$, демак $x = 495$ ва $y = 315$;

б) Ечиш. $x = 20u$ ва $y = 20$v, бу ерда $(u,v) = 1$, $uv = 21$ дан $u = 1; 3; 7; 21$ ва $x = 20; 60; 140; 420$. $y=\frac{8400}{x}$ бўлганлиги сабабли $y = 420, 140, 60, 20$.

д) $x = 140$, $y = 252$.

29. Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md$, $b = nd$, $c = kd$ $\frac{a+b}{2}=\frac{m+n}{2}d; \frac{a+c}{2}=\frac{m+k}{2}d; \frac{b+c}{2}=\frac{n+k}{2}d.$ Бундан, d сон $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ сонларнинг умумий бўлувчиси бўлишини кўрсатади.

Фараз қиламиз, $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})=D$ бундан $d|D$ $\frac{a+b}{2}=m_1D;$ $\frac{a+c}{2}=n_1D;$ $\frac{b+c}{2}=k_1D$. Биринчи ва иккинчи тенгликлар йиғиндисидан учинчи тенгликни айириб, $a=\left(m_1+n_1-k_1\right)D$ ни топамиз. Шу усулда $b=\left(m_1-n_1+k_1\right)D, c=\left(-m_1+n_1+k_1\right)D$ ларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликлардан *a, b, c* ларни *D* га бўлиниши келиб чиқади ва демак, $D|d$. Натижада $D=d$ яъни, $(a,b,c)=(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2})$.

30. а) Ечиш. $(a, b, c) = d$ бўлсин, у ҳолда $(a, b) = md$, $(a, c) = nd$, $(b,c) = kd$, бу ерда $(m,n,k) = 1$. Бу тенгликдан *adm* ва *dn* га бўлиниши келиб чиқади, демак, $a = dmn\alpha$. Худди шундай: $b = dmk\beta$; $c = dnk\gamma$. Бу ерда $(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

$$[a,b,c] = dmnk\alpha\beta\gamma = \frac{\alpha^4 m^2 n^2 k^2 \alpha\beta\gamma}{d^2 mnk} = \frac{(bmn\alpha)(dmk\beta)(dnk\gamma)d}{dm\cdot dn\cdot dk} = \frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)};$$

б) Кўрсатма: $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$ дан фойдаланинг.

31. Ечиш. $qN = 100q + bq = 100q + a - a + bq = am - (a - bq)$, бундан тасдиқ тўғрилиги келиб чиқади, чунки $(q,m) = 1$.

32. а) 1;

б) Ечиш. $(10n + 9, n + 1) = d$ ва $10n + 9 = dx$, $n + 1 = dy$ бўлсин. У ҳолда $10(dy - 1) + 9 = dx$ ёки $10dy - 1 = dx$ ва натижада $d = 1$.

С) Ечиш. Агар $(3n + 1, 10n + 3) = d$ бўлса, у ҳолда

$\begin{cases} 3n+1 = dx \\ 10n+3 = dy \end{cases}$ ёки $\begin{cases} 30n+10 = 10dx \\ 30n+9 = 3dy \end{cases}$, бундан $1 = d(10x - 3y)$ ва $d = 1$. Масалани Евклид алгоритми ёрдамида ҳам ечиш мумкин.

33. Ечиш. $(q + 1)N = 10a(q + 1) + b(q + 1) = am + [a + b(q + 1)]$, бу ерда $(q + 1, 10q + 9) = 1$ (32 масалага қаранг).

34. Ечиш. $(a, b) = d$ бўлсин, у ҳолда $a = md$, $b = nd$, $(m,n) = 1$. $5a + 3b = (5m + 3n)d$, $13a + 8b = (13m + 8n)d$ тенгликлардан $5a + 3b$ ва $13a + 8b$ ларнинг умумий бўлувчиси *d* бўлади. $(5a + 13b, 13a + 8b) = D$ бўлсин, у ҳолда $D|d$, $5a + 3b = m_1 D$, $13a + 8b = n_1 D$.

Бундан $a = (8m_1 - 3n_1)D$, $b = (5n_1 - 13m_1) = D$ ва *D*, *a* ва *b* ларнинг бўлувчиси, демак, $D|d$. Натижада $d = D$.

35. Ечиш.

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} = \frac{2a+b}{a(a+b)}.(a,b) = 1$ дан $(a, 2a + b) = 1$ келиб чиқади.

$(2a + b, a + b) = 1$ ни кўрсатамиз. $(2a + b, a + b) = d > 1$ бўлсин, у ҳолда $2a + b = dm$, $a + b = dn$, $(m,n) = 1$ ва демак, $a = d\,(m-n)$, $b = d\,(2n - m)$, яъни $d|a$, $d|b$ масала шартига зиддир.

3 - §

36. а) 211;

б) 2543, 2549, 2551, 2557;

с) 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249.

37. Ечиш.

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = \left(n^2 + 2n + 2\right)(n^2 - 2n + 2).$$

38. Ечиш. Барча натурал сонларни $5n$, $5n \pm 1$, $5n \pm 2$ кўринишда ёзиш мумкин. $5n$ кўринишдаги сон туб сон бўлади, агар n=1 бўлса, у ҳолда p=5, $4p_2$+1=101, $6p^2$+1=151. Бу p нинг қиймати масала шартини қаноатлантиради.

Бошқа бундай сонлар мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Агар p=5n±1 бўлса, у ҳолда $4p^2+1=5(20n^2\pm 8n+1)$ – мураккаб сон, агар $p=5n+2$ бўлса, $6p^2+1=5(30n^2\pm 24\,n+1)$ – мураккаб сон бўлади.

39. Ечиш. Барча натурал сонларни $6k$, $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, $6k \pm 3$ кўринишда ёзиш мумкин. 2 ва 3 дан ташқари $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб бўлиши мумкин (тескариси ҳамма вақт ўринли эмас, яъни ҳар қандай $6k \pm 1$ кўринишдаги сонлар туб сон бўлмаслиги ҳам мумкин). Агар $p = 6k - 1$ бўлса, у ҳолда $p + 10 = 6k - 1 + 10= 3\,(2k + 3)$ – мураккаб сон; агар $p = 6k + 1$ бўлса, у ҳолда $p + 14 = 6k + 1 + 14 = 3(2k + 5)$ – мураккаб сон. Шундай қилиб, бир вақтда $p + 10$ ва $p + 14$ сонлар туб бўладиган 3 дан катта p туб сон мавжуд эмаслигини кўрсатдик.

Агар $p = 2$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ – мураккаб сонлар бўлади. Агар $p = 3$ бўлса, $p + 10$ ва $p + 14$ – туб сонлар бўлади. Демак, битта $p = 3$ сон масала шартини қаноатлантиради.

40. Ечиш. Шарт бўйича, $a > 3$, $m = 3t + 1$, $n = 3t_1 + 2$. 2 ва 3 дан фарқли туб сонларни $p = 6k \pm 1$ кўринишда ифодалаш мумкин (39 масалага қаранг). Агар $a= p = 6k + 1$, у ҳолда $a + n = 6k + 1 + 3t + 2 = 3\,(2k + t+ 1)$ – мураккаб сон; агар $a = p = 6k–1$, у ҳолда $a + m = 6k - 1 + 3\,t + 1 = 3(2k + t)$ мураккаб сон.

41. Ечиш. p – n! нинг туб бўлувчиси. $p \leq n! - 1$ бўлганлиги сабабли p<n!

Бошқа томондан n! p га бўлинмайди, бундан n < p. Шундай қилиб, n<p<n! (бу исботдан туб сонлар сони чексиз кўплиги келиб чиқади).

42. Ечиш. Шарт бўйича, $2p + 1$ – тўла куб, яъни
$2p + 1 = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x(4x^2 + 6x + 3) + 1$, бундан
$p = x(4x^2 + 6x + 3)$. p – туб сонлигидан $x = 1$ ва $p = 13$, шунинг учун
$2p + 1 = 27 = 3^3$ – ягона сон.

43. Ечиш. Олдин натурал сонлар қаторида 5 дан бошлаб учта кетма-кет келган тоқ сонлар барчаси туб бўла олмаслигини кўрсатамиз. Фараз қиламиз, ҳар бир туб сонлар жуфти ораларида битта мураккаб сон жойлашган (эгизак сонлар). Туб сонларни бундай жойлашиши етарлича зич бўлади. У ҳолда туб сонларни $6n$–1 ва $6n$+1 шаклида тасвирлаш мумкин ва уларнинг номерлари $2n$–1 ва $2n$ бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, n=1, 2, 3, 4, 5, 6, … деб $6n$–1=5, 11, 17, 23, 29, 35, … (бу сонлар номерлари $2n$–1=1, 3, 5, 7, 9, 11,…) ва $6n$+1=7, 13, 19, 25, 31, 37, … (бу сонлар номерлари 2n=2, 4, 6, 8, 10, 12,…). Бундан кўринадики, ҳар бир сон ўзининг номери учланганидан катта: $6n - 1 > 3(2n - 1)$ ва $(6n + 1) > 3 \cdot 2n$.

44. Кўрсатма:

Натурал сонлар қаторидаги сонларни $30k$, $30k \pm 1$, $30k \pm 2$, …, $30k \pm 15$ шаклида тасвирлаймиз. Бу сонлардан $p = 30k \pm 1$; $30k \pm 7$; $30k \pm 11$, $30k \pm 13$ лар туб сонлар бўлиши мумкин.

45. Ечиш. Агар p–1 ва p+1 сонлар орасига 3 дан катта p сон жойлаштирилса, $(p-1)p(p+1)$ кўпайтма 3 га бўлинади. p>3 бўлганлиги сабабли $(p-1)(p+1)$ кўпайтма 3 га бўлиниши керак. Бошқа томондан $(p-1)(p+1)$ 8 га бўлинади, чунки агар p–12 га бўлинса, p+1 – ҳеч бўлмаса 4 га бўлиниши керак. $p^2 - q^2 = (p-1)(p+1) - (q-1)(q+1)$, бу ерда $(p-1)(p+1)$ ва $(q-1)(q+1)$ лар ҳар бири 3 га ва 8 га бўлинади. Демак, $p^2 - q^2$ 24 га бўлинади.

46. а) Ечиш. Агар p=2 бўлса, у ҳолда p+10 – мураккаб сон. Агар $p=2q+1$(q=1, 2, …) бўлса, у ҳолда p+5 – мураккаб сон.

47. Ечиш. $p=2k+1$ кўринишдаги тоқ сон. $p=mn\ (m>n)$ кўринишда кўпайтувчиларга ажралсин. У ҳолда, шундай x ва y сонлар топиладики, булар учун қуйидаги система ўринли:

$\begin{cases} x+y=m \\ x-y=n \end{cases}$, бундан $x=\dfrac{m+n}{2}, y=\dfrac{m-n}{2}$. Демак, мураккаб p учун:

$$p=mn=(x+y)(x-y)=x^2-y^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

Агар p туб бўлса, уни $p=(2k+1)\cdot 1$ ягона шаклда ёзиш мумкин. Бу ҳолда $m=2k+1=p$, $n=1$, демак, $p=\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2=\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$.

Шундай қилиб, $p=\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланиш ягона бўлса, у ҳолда p –туб сон; агар $p=\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2-\left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2$ кўринишда тасвирланган бўлса, p – мураккаб сон.

48. 47-масала шартидан тоқ сонларни $(x+y)\cdot(x-y)$ кўринишдаги кўпайтувчиларга ажратишнинг қуйидаги усули келиб чиқади: $p=x^2-y^2$ тенгликдан $p+y^2=x^2$, яъни x ни топиш учун p га шундай y $\left(y\le\dfrac{p-1}{2}\right)$ натурал сон квадратини қўйиш керакки, натижада $p+y^2$ йиғинди квадратдан (x^2) иборат бўлсин. Шу усулда y ва x ни топиб, $p\ (x+y)\ (x-y)=mn$.

а) Квадратлар жадвалидан фойдаланиб, 6643 сонига яқин бўлган сон $6724=82^2$ оламиз. $6724–6643=81=9^2$. Демак, $6643=82^2–9^2=(82+9)\ (82-9)=91\cdot 73 =7\cdot 13\cdot 73$;

б) $1769=61\cdot 29$; с) $3551=67\cdot 53$; д) $6497=89\cdot 73$.

49. Ечиш. $N=a^2+b^2=c^2+d^2$ ва a ва b, c ва d – сонларнинг жуфт тоқлиги ҳар хил бўлсин. a ва c, b ва d – ларнинг жуфт тоқлиги бир хил деб оламиз.

$(a-c)\ (a+c)=(d-b)\ (d+b)$ тенгликдан, $\dfrac{a-c}{d-b}+\dfrac{d+b}{a+c}=\dfrac{u}{v}$ келиб чиқади. Бунда биринчи касрни t га ва иккинчи касрни c га қисқартирилган деб олсак, яъни

$a-c=tu$, $d+b=cu$, $ak=cv$, $d-b=tv$. У ҳолда, $a=\frac{tu+sv}{2}, b=\frac{su-tv}{2}$ бўлади.

Натижада, $N=a^2+b^2=\frac{1}{4}\left[(tu+sv)^2+(sn-tv)^2\right]=\frac{1}{4}(u^2+v^2)(t^2+s^2)$

50. Ечиш. $972^2 + 235^2 = 1000009 = 1000^2 + 3^2$ дан 1000009 сон икки усулда икки сон квадратлари йиғиндиси кўринишда ёзилиши келиб чиқади, демак, бу сон мураккаб ва $293 \cdot 3413$ га тенг.

51. Ечиш. Қуйидаги ёйилмани кўрамиз:

$$a^{10}+a^5+1=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1);$$

Бу ерда $a^{12}+a^9+a^6+a^3+1$ кўпҳад $a^4+a^3+a^2+a+1$ кўпҳадга кўпҳадларни бўлиш қоидасига асосан бўлинган. Натижада,

$$3^{10} + 3^5 + 1 = (3^2 + 3 +1)(3^8 - 3^7 + 3^5 - 3^4 + 3^3 - 3 + 1) = 13 \cdot 4561.$$

52. Ечиш. Агар q – тоқ бўлса, $1 + 2k$ сон $1 + 2 = 3$ га каррали. Агар k – жуфт бўлса, у $k = 2n$ га ёки $k = 2nm$ ($m \geq 1$ ва тоқ сон), ёки $k = 0$. Лекин $1+2^k=1+2^{2^n m}=\left(1+2^{2^n}\right)^m;1+2^{2^n}$ га каррали (агар $k = 0$ бўлса, 2 га каррали). $1+2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади. Демак, барча $k = 2^n$ дан фарқли k лар учун $1+2^{2^n}$ сон мураккаб сон бўлади.

53. Ечиш. $(\alpha, \beta)=1$, $(\alpha, \beta)=2^n$ шартларни қаноатлантирувчи барча α ва β лар учун $a^\alpha+b^\beta$ мураккаб сон эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатдан ҳам, $(\alpha, \beta)=1$ – бўлиб, тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha=dm$, $\beta=dk$, $(m,k)=1$ ва $a^\alpha+b^\beta=(a^m)^d+(b^k)^d$ a^m+b^k га каррали. Агар, $(\alpha, \beta) = 2^n d$ жуфт сон бўлиб, $d>1$– тоқ бўлса, у ҳолда $\alpha=2^n dm$, $\beta = 2^n dk$ бундан, $a^\alpha+b^\beta=\left(a^{2^n m}\right)^\alpha+\left(b^{2^n k}\right)^\alpha$ сон $\left(a^{2^n m}\right)+\left(b^{2^n k}\right)$ га каррали. Демак, $(\alpha, \beta)=1$ ва $(\alpha, \beta)=2n$ шартларни қаноатлантирувчи α ва β лардан ташқари барча ҳолларда $a^\alpha+b^\beta$ сон мураккаб бўлади. Тескари тасдиқ нотўғри, масалан $2^4+3^2=25$ – мураккаб сон.

54. Ечиш. n – мураккаб сон бўлсин, $n = ab$ ($a > 1$, $b > 1$), у ҳолда $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$ – мураккаб сон. Тескари тасдиқ нотўғри: $2p - 1$ ҳамма вақт туб эмас, масалан $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$; $2^{23} - 1 = 47 \cdot 178421$.

4 - §

55. $a)\ \frac{271828}{10^5}=(2,1,2,1,1,4,1,1,6,10,1,1,2);$

$b)\ \frac{103993}{33102}=(3,7,15,1,292);$

$c)\ \frac{99}{170}=(0,1,1,2,1,1,6,2);$

$d)\ \frac{355}{113}=(3,7,16);$

56. $a)\ \frac{247}{47}=(3,2,1,2,2);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{4}{3},\frac{11}{3},\frac{15}{4},\frac{131}{35},\frac{277}{74}.$

$b)\ \frac{77}{187}=(0,2,2,3);$ муносиб касрлари: $\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{7}{12};$

$c)\ \frac{333}{100}=(3,3,3,3);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{10}{3},\frac{333}{100};$

$d)\ \frac{103993}{3302}=(3,7,15,1,292);$ муносиб касрлари: $\frac{3}{1},\frac{22}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102},\frac{277}{74}.$

58. а) $\frac{29}{37}$ сонни узлуксиз касрга ёямиз: $a)\ \frac{29}{37}=(0,1,3,1,1,1,2);$

Жадвал ёрдамида

K		0	1	2	3	4	5	6
q_k		0	1	3	1	1	1	2
P_k	1	0	1	3	4	7	1 1	2 9
Q_k	0	1	1	4	5	9	1 4	3 7

касрларни топамиз.

$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{7}{9}\qquad \frac{1}{Q_4Q_5}=\frac{1}{9\cdot 14}=\frac{1}{126}=0,008<0,01;\ \ \frac{7}{9}=0,78$ ортиғи билан.

59. $a)\ \frac{43}{19};b)\ \frac{73}{43};c)\ \frac{2633}{1810};d)\ \frac{1421}{552};e)\ \frac{157}{225};\ f)\ -1\frac{159}{215};g)\ \frac{893}{11953}.$

60. *a*) x=2; *b*) x=2.

5 - §

61. a) – 3; b) 11; c) 1; d) 2;

62. Ечиш.

$x = [x]+ \theta_1$ ва $y = [y]+ \theta_2$ бўлсин, бу ерда $0 \le \theta_1 < 1$, $0 \le \theta_2 < 1$ у ҳолда $x + y= [x]+ [y]+ (\theta_1 + \theta_2)$. Агар $0 \le \theta_1 + \theta_2 < 1$, $[x + y]= [x]+ [y]$;
агар $1\le \theta_1 +\theta_2<2$ бўлса $[x + y]> [x]+ [y]$ бўлади. Натижаларни бирлаштирсак, $[x + y] \ge [x] + [y]$ ни ҳосил қиламиз.

63. Ечиш. $[x]$ ни таърифига кўра, масала шартига асосан $ax = m + \theta$, бу ерда $0 \le \theta < 1$ ва $a \ne 0$, бу тенгликдан $x = \frac{m+\theta}{a}$ ни ҳосил қиламиз.

64. Ечиш. $12{,}4\, m = 86 + \theta$, бу ерда $0 \le \theta < 1$. Тенгликни 5 га кўпайтирамиз: $62m = 430 + 5\theta$, бундан $m = \frac{430+5\theta}{62} = 6 + \frac{58+5\theta}{62}$. $0 \le \theta < 1$ дан $0\le 5\theta < 5$ ва m бутун мусбат сон бўлиши учун $t = \frac{58+5\theta}{62}$ бутун бўлиши лозим. $t = 1$ деб олсак, $\theta = \frac{4}{5}$ ва $m = 7$ ни ҳосил қиламиз.

65. Ечиш. $\left[\frac{p}{4}\right]_{p=4n+1} = n = \frac{p-1}{4}$; $\left[\frac{p}{4}\right]_{p=4n+3} = n = \frac{p-3}{4}$;

66. Ечиш.

$a = mq + 1, 0 \le r < m, ёки\, \frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}, 0 \le \frac{r}{m} < 1,$ бу ердан $q = \left[\frac{a}{m}\right]; ва \left[\frac{a}{m}\right] = \frac{a-r}{m}.$

67. $\left[\frac{m}{2}\right]_{m=2k+1} = \left[k + \frac{1}{2}\right] = k = \frac{m-1}{2}.$

68. a) Ечиш. $2 \le x^2 < 3$ ёки $\sqrt{2} \le |x| < \sqrt{3},$ бундан $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}; ва \sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$ ни оламиз;

б) Ечиш. $x + 1$ нинг қийматлари ва бундан x нинг қийматлари ҳам бутун бўлиши зарур. Бу қийматларда $3x^2 – x$ ҳам бутун бўлади ва берилган тенглама $3x^2 – x= x + 1$ га тенг кучли бўлади, бундан $x = 1$ ни оламиз.

c) Ечиш. Берилган тенгламани $0 \le x < 4$ қийматлар қаноатлантиради, бу қийматларда $\frac{3}{4}x$ бутун қийматларни қабул қилади, яъни ; x=0; $1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3}$.

д) x=0; 1.

69. $\left[\frac{10^7}{786}\right]-\left[\frac{10^6}{786}\right]=11450.$

70. Ечиш. $999-\left[\frac{999}{5}\right]-\left[\frac{999}{7}\right]+\left[\frac{\left[\frac{999}{5}\right]}{7}\right]=686.$

71. Ечиш. $100-\left[\frac{100}{2}\right]-\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{6}\right]=33.$

72. 98.

73. 488.

74. *B* (2311; 5, 7, 13, 17) = 1378;

75. *B* (12317; 3,5,7) = 5634.

76. 393.

77. $\left[\frac{p^n}{p}\right]+\left[\frac{p^n}{p^2}\right]+...+\left[\frac{p^n}{p^{n-1}}\right]+\left[\frac{p^n}{p^n}\right]=p^{n-1}+...+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}.$

78.

$a)10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7;$

$b)15!=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13;$

$c)20!=2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19;$

$d)25!=2^{22}\cdot 3^{10}\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23;$

$e)30!=2^{26}\cdot 3^{14}\cdot 5^7\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29;$

79. $\frac{20!}{10!10!}=2^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19.$

80. Ечиш. ,

$N=\frac{1000!}{100!7^{\alpha}}$, бу ерда α $\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{49}\right]+\left[\frac{1000}{301}\right]=\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{49}\right]+\alpha$ шартни қаноатлантиради, бундан α = 148 келиб чиқади.

81. Ечиш. $(2m+1)!!=\frac{(2m+1)!}{(2m)!!}=\frac{(2m+1)!}{m!2^m}$. Агар p > 2 бўлса, у ҳолда $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{2m+1}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{p^i}\right]$, бу ерда $p^k\le 2m+1<p^{k+1}$.

82. Ечиш. Ихтиёрий бутун $x = k$ $(a \le k \le b)$ абсцисса учун $[\varphi(x)]+1$ бутун ординатали ва берилган трапециянинг ичида ва чегарасида жойлашади. Демак, нуқталар сони $\sum_{k=a}^{b}([f(k)]+1)$ га тенг.

83. 126.

84. Ечиш. Шартга асосан, $a = 4q + 1$ ёки $a = 4q + 3$ га тенг. Биринчи ҳолда $\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=q+2q+3q=6q=\frac{3(a-1)}{2}$. Иккинчи ҳол ҳам худди шундай текширилади.

85. Ечиш. $a = mq + r$ бўлсин, бу ерда $0 \le r < m$ ва $(r,m) = 1$. $(r,m) = 1$ шарт барча $m \le 2$ лар учун бажарилишидан $r = 1$ келиб чиқади. Демак,

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[i\left(q+\frac{1}{m}\right)\right]=q\sum_{i=1}^{m-1}i=\frac{a-1}{m}\cdot\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(a-1)(m-1)}{2}.$$

86. Ечиш. $x = [x]+\alpha$, $0 \le \alpha < 1$ бўлганлигидан $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$, бундан

$\frac{1}{2}\le\alpha+\frac{1}{2}<1\frac{1}{2}$; ва $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$ 0 га ёки 1 га тенг. $2x = 2[x]+ 2\alpha$ ва $[2x] = 2[x] + [2\alpha]$ бўлганлигидан $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[2\alpha]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]$.

Бу ерда $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]=0,$ ёки $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]=1.$

87. Ечиш. Тенгламанинг ҳар бир қисмини y деб белгилаб, $y\le\frac{x}{m}<\frac{x}{m-1}<y+1$ ни оламиз, $my\le x<(m-1)(y+1)$. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи x лар мавжуд бўлиши учун $my<(m-1)(y+1)$ ёки $y < m - 1$ шартлар бажарилиши зарур ва етарли. Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$my \le x <(m - 1)(y + 1)$, бу ерда $x - y< m - 1$ шартни қаноатлантирувчи бутун сон.

88. Ечиш. $ax^2 + bx + c$ функция ва шу билан биргаликда $[ax^2 + bx + c]$ функция $a > 0$ да қуйидан, $a < 0$ да эса юқоридан чегараланган.

Иккала ҳолда ҳам $[ax^2 + bx + c]$ функция чегараси $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ сонга тенг. Шу сабабли $a > 0$ да берилган тенглама ечимга эга бўлади, агар ; $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \le d -$ шарт бажарилса ва фақат шартда, агар $a < 0$ бўлса, бу шарт қуйидагича: $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \ge 1.$

89. а) 0, 6; б) $\frac{2}{3}$; с) 0; д) $\frac{1}{2}$.

90. а) 624; б) 2418; 30; с) 1440; 8; д) 1960; 12; е) 2808; 24; ф) 3844;30.

91. а) 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360;

б) 1, 5, 25, 125, 3, 15, 75, 375.

92. Ечиш. $S(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2\cdot 2^\alpha - 1$, демак, $m = 2^\alpha$, $\alpha\in N$.

93. Ечиш. Агар p сон m ёки n нинг каноник ёйилмаларининг бироpтасига α кўрсаткич кирса, у ҳолда $\tau(mn)$, ва $\tau(m)\cdot\tau(n)$ да $\alpha + 1$ кўпайтма мавжуд. Агар m ва n нинг каноник ёйилмаларида мос равишда ρ^α ва ρ^β лар бўлса, у ҳолда mn нинг каноник ёйилмасида $\rho^{\alpha+\beta}$ мавжуд ва $\tau(mn)$ даги $\alpha + \beta + 1$ кўпайтмага $\tau(m)$ $\cdot\tau(n)$ да қатнашувчи $(\alpha + \beta)(\beta + 1) > \alpha + \beta + 1$ кўпайтма мос келади. Демак, агар $(m,n)>1$, у ҳолда $\tau(m)\,\tau(n) > \tau(mn)$. Агар r m ёки n нинг каноник ёйилмасига қатнашса, юқорида қайд қилинганидек, $S(x)$ ни ҳисоблаш мумкин.

Иккинчи ҳолда S(mn) га кирувчи $\frac{p^{\alpha+\beta+1}}{p^{-1}}$, кўпайтмага $S(m)\,S(n)$ га кирувчи $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} = \frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\alpha+1}}{(p-1)^2} + \frac{p^{\beta+1}+1}{(p-1)^2}$, кўпайтма мос келади.

$\frac{p^{\alpha+\beta+2}-p^{\beta+1}+1}{p-1} - \left(p^{\alpha+\beta-1}-1\right) = \frac{p\left(p^\alpha-1\right)\left(p^\beta-1\right)}{p-1}$. тенгликни ўринлилигини осонгина кўрсатиш мумкин, бундан $\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{\beta+1}-1}{p-1} > \frac{p^{\alpha+\beta-1}-1}{p-1}$.

Демак, агар $(m,n) > 1$ бўлса, $S(m)\,S(n) > S(mn)$ бўлади.

94. $\tau(m) = 20$, $S(m) = 5208$, $\delta(m) = 196810$.

95. Ечиш. Ўзининг барча бўлувчилари кўпайтмасига тенг бўлган m натурал сон $m=\sqrt{m^{\tau(m)}}$, тенглама ёрдамида аниқланади, яъни $\tau(m) = 2$ бундан масала ечими келиб чиқади.

96. $S_n(a)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{n(\alpha_i+1)}-1}{p_i^n-1}$. *Кўрсатма.* Математик индукция усулидан фойдаланинг.

97. а) $S_2(12) = 120$; б) $S_2(18) = 455$; с) $S_2(16) = 341$.

99. Ечиш. $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)= m$ ва $2^{\alpha+1}-1 = p$, бўлсин, у ҳолда $S(m) = S(2^\alpha\cdot p)=(2^{\alpha+1}-1)(p+1) = (2^{\alpha+1}-1)2^{\alpha+1} = 2m$.

100. Ечиш. 99-масалага асосан, ҳар қандай мукаммал сон $2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$, кўринишда бўлишини исботлаш керак, бу ерда $2^{\alpha+1}-1$ – туб сон. $m = 2^\alpha q$ бўлсин, $(q,2) = 1$ ва $S(m) = 2m$, яъни $(2^{\alpha+1}-1)\,S(q) = 2^{\alpha+1}\cdot q$, бундан $S(q)= 2^{\alpha+1}\cdot k$ ва $q=(2^{\alpha+1}-1)k$, $k\in N$. k ва $(2^{\alpha+1}-1)k$ сонлар q нинг бўлувчилари бўлиб улар йиғиндиси $k\cdot 2^{\alpha+1} = S(q)$ га тенг, бундан q бошқа натурал бўлувчиларга эга эмас. Демак $q=(2^{\alpha+1}-1)k$ – туб сон, бундан $k = 1$ ва $2^{\alpha+1}-1$ – туб сондир.

101. Ечиш. $S(m) = 3m$ тенглама $m = 2^\alpha\cdot p_1p_2$ учун
$(2^{\alpha+1}-1)(1+p_1)(1+p_2) = 3\cdot 2^\alpha p_1p_2$ кўринишга эга. Агар $\alpha = 0$ бўлса $(1+p_1)(1+p_2) = 3p_1p_2$ ёки $1 + p_1 + p_1$, бундан p_1 ва p_2 жуфт сон бўлиши керак, бу эса ўринли эмас, чунки $1 + p_1$ ва $1 + p_2$ жуфт сонлар. Демак $\alpha\neq 0$. Агар $\alpha = 1$ $(1+p_1)(1+p_2) = 2p_1p_2$ ёки $1 + p_1 + p_2 = p_1p_2$, яъни $1 + p_1 = p_2(p_1 - 1)$; $p_1 - 1 = 2n$ бўлганлигидан $n + 1 = p_2n$, бундан $n=1$ ва $p_2 = 2$, бу эса ўринли эмас. Демак $\alpha\neq 1$. Агар $\alpha = 2$ бўлса, $7(1+p_1)(1+p_2) = 12p_1p_2$ ёки $7 + 7(p_1+p_2) = 5p_1p_2$, бундан $p_1 = 7$ (ёки $p_2 = 7$) ва $p_2 = 2$ (ёки $p_1 = 2$), бундай бўлиши мумкин эмас. Демак $\alpha\neq 1$. $\alpha = 3$ бўлганда $5(1+p_1)(1+p_2) = \gamma p_1p_2$ ёки $5 + 5(p_1+p_2) = 3p_1p_2$, бундан $p_1 = 5$ ва $p_2 = 3$. Шундай қилиб, масала шартини қаноатлантирувчи энг кичик натурал сон $m=23\cdot 3\cdot 5 = 120$ бўлади.

102. Ечиш. Шарт бўйича, $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ ва $(1+p_1)(1+p_2) = 6$, бўлганлигидан $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ ва $m=p_1p_2^2$. Бундан ташқари, $S(m)=28$, яъни $(1+p_1)(p_2^2+p_2+1)=28$, бундан $1+p_1=4$ ва $p_2^2+p_2+1=7$, яъни $p_1=3$, $p_2=2$. Демак, $m=3\cdot 2^2=12$.

103. Ечиш. Масала шартига кўра, $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)=15$, бундан $2\alpha_1+1=3$ ва $2\alpha_2+1=5$, яъни $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$. Демак, $\tau(m^2)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)=4\cdot 7=28$.

104. Ечиш. Шарт бўйича, $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 81$, икки ҳол ўринли бўлиши мумкин: $(1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) = 3 \cdot 27$ ва $(1 + 2\alpha_1)(1+2\alpha_2) = 9 \cdot 9$, яъни $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2=13$ ва $\alpha_1=\alpha_2=4$, булардан $\tau(m^3) = 160$ ёки $\tau(m^3) = 169$.

105. Кўрсатма. $d_1 = \frac{N}{d_n}, d_2 = \frac{N}{d_{n-1}}, \ldots$ дан фойдаланинг.

108. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$.

109. Ечиш. . $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ бўлсин, у ҳолда $\tau(m)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)$. Агар $\tau(m)\equiv 1(mod 2)$ бўлса, у ҳолда $1+\alpha_i\equiv 1(mod 2)$ бўлади, бундан $\alpha_i\equiv 0(mod 2)$, бу эса , m – бутун сонни квадрати бўлишини кўрсатади. Тескаридан, агар m – бутун сонни квадрати бўлса, у ҳолда $\alpha_i\equiv 0(mod\ 2)$ ва бундан $\tau(m)\equiv 1(mod\ 2)$ ни ҳосил қиламиз.

110. а) 2; б) 4; c) 4; д) 5; е) 9; ф) 15; г) 46; ҳ) 95.

111. а) ≈13; 13%; б) ≈ 22; 12%; c) ≈ 80; 16%.

113. Ечиш. $\pi(p) < p$ тенгсизликдаги $-p < -\pi(p)$, $p\pi(p) - p < (p - 1)\pi(p)$ ва $\frac{\pi(p)-1}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ ни ҳосил қиламиз. $\pi(p)-1 = \pi(p - 1)$ дан $\frac{\pi(p-1)}{p-1} < \frac{\pi(p)}{p}$ келиб чиқади. $\pi(m-1) = \pi(m)$ тенгсизликдан $\frac{\pi(m)}{m} < \frac{\pi(m-1)}{m-1}$ ни оламиз.

114. а) 200; б) 192; c) 432; д) 320; е) 400; ф) 1152.

115. а) 288; б) 24; c) 480; д) 388800.

116. 88.

117. Ечиш. Масала шарти бўйича, $a = 3^{\alpha} 5^{\beta} 7^{\Upsilon}$. Бу сонинг Эйлер функцияси $\varphi(a) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 5^{\beta-1} 4 \cdot 7^{\Upsilon-1} \cdot 6 = 2^4 3^{\alpha-1} 5^{\beta-1} 7^{\gamma-1}$. Шартга кўра, $\varphi(a) = 3600 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^2$, демак $2^4\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta-1}\cdot 7^{\gamma-1} = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^2$, бундан $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$ ва $a=3^2\cdot 5^3\cdot 7 = 7875$.

118. Ечиш. Шарт бўйича: φ (a) = φ (pq) =(p - 1) (q – 1) = 120 ва p-q = 2. Натижада $\begin{cases}(p-1)(q-1)=120\\ p-q=2\end{cases}$; системани ҳосил қиламиз. Унинг ечими p=13, q=11. Демак, a=pq=143.

119. Ечиш. Шарт бўйича φ (a) = φ (p_2q_2)= $p(p-1)q(q-1)$ ва φ (a) = 11424=2^5·3·7·17. Демак, $p(p-1)q(q-1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ ёки $p(p-1)q(q-1)=17 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 6$ бундан p = 17, q = 7 ва $a = 17^2 \cdot 7^2 = 14161$.

120. Ечиш. Шарт бўйича,

$\varphi(a)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)...p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$ ва φ (a)=462000=2^4·3· 5^3 ·7·11.

Демак, $\varphi(a)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)...p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$= 24 · 3 · 53 · 7 ·11

Ўнг томондаги кўпайтувчиларни чап томондаги каби кўринишда кўпайтувчиларни ўрнини алмаштирамиз:

$\varphi(a)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)...p_n^{\alpha_n-1}(p_n-1)$= (11·10)(7 · 6)($5^2$ · 4), бундан p_1 = 11 ва α_1 = 2; p_2 = 7 ва α_2 = 5; p_3 = 2 ва α_3 = 3; a =$11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^3$ = 741125.

121. Ечиш. (a, m)=1 шарт бажарилганда (a, m-a) = 1 ни бажарилишини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз, яъни (a, m - a) = d > 1, у ҳолда $a = dk$, $m - a = dt$, бундан $m = d(t+k)$ ва (a, m) = d > 1, бу эса (a, m)= 1 шартга зиддир. m дан кичик ва у билан туб бўлган сонларни тартиб билан ёзамиз: 1, a_1, a_2, …, $m - a_2$, $m - a_1$, m – 1; бу қаторда φ (m) та сон бор. Ҳар қандай a_i сонга $m - a_i$ сон мос келади; улар йиғиндиси $a_i + (m - a_i) = m$, бу жуфтликлар сони $\frac{1}{2}\varphi(m)$ ва демак $S=\frac{1}{2}m\varphi(m)$

122. а) 24; б) 54; с) 37500.

124. Биринчи ҳол (a, 2) = 1 бўлганда ўринли, иккинчи ҳол эса (a, 2) = 2 бўлганда ўринли бўлади.

125. а) Ечиш. φ (4n + 2) = φ (2) φ (2n + 1) = φ (2n + 1);

б) Ечиш. Агар (n, 2)=1 бўлса, у ҳолда φ(4n) = φ(4) φ(n) = 2 φ(n). Агар $n=2^\alpha \cdot k$ бўлиб, (k, 2) = 1 бўлса, у ҳолда

$$\varphi(4n) = \varphi(2^{\alpha+2} \cdot k) = 2^{\alpha+1} \cdot \varphi(k) = 2 \cdot \varphi(2^{\alpha+1} \cdot k) = 2\varphi(2n).$$

126. а) $x = 3$; б) $x = 3$; с) тенглама $p > 2$ да ечимга эга эмас. $p = 2$ да ихтиёрий натурал сонлар учун ўринли.

127. φ (b).

128. а) 4 каср: $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$. с) 12 каср.

129. φ (2) + φ (3) +…+ φ (n).

130. а) 9; б) 31; с) 71.

131. Ечиш. Шарт бўйича, (300, x) = 20 ва барча x лар 300 дан кичик, 20 га қисқартиргандан сўнг (15, y) = 1, бу ерда барча y лар 15 дан кичик ва 15 билан ўзаро туб; улар сони φ (15) = 8. Бу y = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 сонлар ва бундан x =20, 40, 80, 140, 160, 220, 260, 280.

132. φ (45) = 24.

133. φ (36) = 12.

134. Кўрсатма. φ (a) нинг жуфтлиги 121 масала ёрдамидан келиб чиқади.

135. Ечиш. Агар (m, 2) = 1 бўлса, у ҳолда φ (m) = φ (2m).

136. Ечиш. m ва n ларнинг туб бўлувчиси p учун φ (mn) сонда $1-\frac{1}{p}$, кўпайтувчи бор, φ (m) φ (n) – сонида еса $(1-\frac{1}{p})^2$, кўпайтувчи бор. $1-\frac{1}{p}<1$, бўлганлиги сабабли φ (m) φ (n) < φ (mn). Хусусий ҳолда $\varphi^2(m) \le \varphi(m^2)$, тенглик m = 1 бўлганда бажарилади.

138. Ечиш. $\varphi(mn) = \varphi(\delta\mu) = \varphi(\delta)\,\varphi(\mu)\cdot\frac{\delta}{\gamma^t} = \delta\,\varphi(\mu)$.

139. p^{α}.

140. m.

142. а) Ечиш. Гаусс формуласидан $x = 2^y\, 3^z\, 5^y$ ($y \ge 0$, z = 0; 1 ва u = 0; 1) келиб чиқади. $x = 2^y$; $2^y \cdot 3$; $2^y \cdot 5$; $2^y \cdot 15$; 3; 5; 15 имкониятларни текшириши $x = 2^{\alpha+1}$; $2^{\alpha} \cdot 3$; $2^{\alpha-1} \cdot 5$; $2^{\alpha-2} \cdot 15$ ($\alpha \ge 2$); 15 ($\alpha = 3$)ларни беради;

б) $p \ne 3$ да ечим йўқ. $r = 3$ да тенгламаларни ихтиёрий бутун $x \ge 2$ қийматлар қаноатлантиради.

143. а) ечими йўқ;

II. БОБ. ТАҚҚОСЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

158. Ечилиши. Агар $a = mq+r$ бўлса, у ҳолда $a - r = mq$ ва $a \equiv r \ (mod\ m)$.

159. а) х = $3q$; в) х = $1+2q$.

160. $2r$ нинг бўлувчилари.

161. 8 нинг бўлувчилари.

162. Ечилиши. Агар n тоқ сон бўлса, у ҳолда n-1 ва n+1- кетма-кет келадиган жуфт сонлар. Агар улардан бири 2 га каррали бўлса, у ҳолда иккинчиси камида 4 га каррали, шунинг учун: $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \equiv 0 \ (mod\ 8)$, ёки $n^2 \equiv 1 (mod\ 8)$.

163. Ечилиши. Берилган таққосламани иккала томонини 4 га кўпайтирамиз:

$400a + 40b + 4c \equiv 0 \ (mod\ 21)$, лекин $400a \equiv a \ (mod\ 21)$, $40b \equiv -2 \ (mod\ 21)$, $4c \equiv 4 \ (mod\ 21)$.

Охирги учта тақосламани ҳадма-ҳад қўшамиз:
$400a + 40b + 4c \equiv a - 2b + 4c (mod\ 21)$. Бу ердан $a - 2b + 4c \equiv 0 (mod\ 21)$ ни ҳосил қиламиз.

165. Ечилиши. $11\cdot31-1=340=5\cdot68$ ва $2^5 \equiv -1 (mod 11)$ бўлганлиги учун охирги таққосламани иккала томонини 68-даражага кўтариб, $(25)^{68}=2340=211\bullet31-1 \equiv 1$(мод11) ни ҳосил қиламиз. Сўнгра $25 \equiv 1$(мод31) дан $(2^5)^{68}=2^{11\bullet31-1} \equiv 1$(мод31) ни топамиз. Бу ердан $2^{11\bullet31-1} \equiv 1$(мод$11\cdot31$). Бу таққосламани иккала томонини 2 га кўпайтириб изланаётган таққосламага эришамиз.

166. Ечилиши. х = $3n + 1$ бўлганда бўлинувчи $1+3\cdot27^n + 9\cdot729^n$ га тенг бўлади. Берилган модул бўйича $27^n = 729^n \equiv 1$, шунинг учун

$1 + 3\cdot27^n + 9\cdot729^n \equiv 1 + 3 + 9 = 13$.

169. 4.

170. Ечилиши. Шартга асосан, $a = b + pnq$ (q=0, ±1, ±2, ...). Бу тенгликнинг иккала томонини r – даражага кўтариб, $a^p = b^p + p^н+1 \cdot \alpha$ (α = 0, ±1, ±2, ...) ни ҳосил қиламиз.

172. Кўрсатма. $a^4 \cdot 10^4 + a_3a_2 \cdot 10^2 + a_1a_0 \equiv 0(mod\ 33)$ таққосламанинг чап томонидан модулга каррали бўлган $999a_4 + 99a_3a_2$ сонни айириш керак.

173. Ечилиши. а) $9^{10} \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун $9^{10q+r} \equiv 9^r\ (mod\ 100)$. $9^9 \equiv 9(mod\ 10)$ бўлганлиги учун $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89\ (mod\ 100)$. Изланаётган рақамлар 8 ва 9;

б) $7^4 = 2401 \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун $7^{100} \equiv 1(mod\ 100)$, бу ердан $7^{9^{9^9}} \equiv 7^{100q+89} \equiv 7^{89}\ (mod\ 100)$. $7^{88} \equiv 1(mod\ 100)$ бўлганлиги учун
$7^{89} \equiv 7\ (mod\ 100)$. Изланаётган рақамлар 0 ва 7.

174. $x \equiv 0; 1; 2; ... ; 9\ (mod\ 10)$.

176. а) $x \equiv 1; 3; 7; 9\ (mod\ 10)$; б) $x \equiv 2; 4; 6; 8\ (mod\ 10)$; с) $x \equiv 5\ (mod\ 10)$; д) $x \equiv 0\ (mod\ 10)$.

177. а) $m = 9$ да чегирмаларнинг тўла системалари:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.
Чегирмаларнинг келтирилган системалари:
1, 2, 4, 5, 7, 8; -8, -7, -5, -4, -2, -1; -4, -2, -1, 1, 2, 4.

б) $m = 8$ да чегирмаларнинг тўла система лари:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0; -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
ёки -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.
Чегирмаларнинг келтирилган системалари: 1, 3, 5, 7; -7, -5, -3, -1; -3, -1, 1, 3.

178. Ечилиши. Берилган синф сонларининг умумий кўринишидан қуйидагиларни топамиз:

$25 = 8\cdot3 + 1$; $-20 = 8(-3) + 4$; $16 = 8\cdot2 + 0$; $46 = 8\cdot5 + 6$; $-21 = 8(-3) + 3$;

$18 = 8\cdot2 +2$; $37 = 8\cdot4 + 5$; $-17 = 8(-3) + 7$. Ҳосил қилинган қолдиқларнинг ҳаммаси ҳар хил ва улар манфий бўлмаган энг кичик чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, демак, берилган сонлар ҳам чегирмаларнинг тўла системасини ташкил қилади.

184. Ечилиши. Ҳар бир сонни 6 га бўлиб: 0, 2, 1, 1, 4, 5, 2 қолдиқларни ҳосил қиламиз. Топилган манфий бўлмаган чегирмалардан (нолдан ташқари) 6 ни айириб, 0, -4, -5, -5, -2, -1, -4 –абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик мусбат бўлмаган чегирмаларни ҳосил қиламиз. Абсолют қиймати жиҳатидан энг кичик чегирмалар 0, 2, 1, 1, -2, -1, 2 лардан иборат.

185. a) $x_1 \equiv 1(mod\ 3)$, $x_2 \equiv 2\ (mod\ 3)$;

b) $x_1 \equiv 1(mod\ 5)$, $x_2 \equiv 2\ (mod\ 5)$;

c) $x \equiv 2\ (mod\ 5)$;

d) ечимлари йўқ;

e) $x \equiv 3\ (mod\ 5)$;

f) $x_1 \equiv 1(mod\ 4)$, $x_2 \equiv 3\ (mod\ 4)$;

g) $x_1 \equiv 1(мод\ 5)$, $x_2 \equiv 3\ (mod\ 5)$.

186. a) $x \equiv 3\ (mod\ 7)$; б) $x \equiv 2\ (mod\ 5)$; c) $x \equiv -3\ (mod\ 11)$;
d) $x \equiv -3\ (mod\ 7)$; e) $x \equiv -1\ (mod\ 7)$; f) $x \equiv -4\ (mod\ 15)$.

189. a) $x \equiv 11\ (mod\ 15)$; b) $x \equiv 2\ (mod\ 8)$;
c) $x \equiv 4\ (mod\ 13)$; d) $x \equiv 20\ (mod\ 37)$;
e) $x \equiv 7\ (mod\ 25)$; f) $x \equiv 5\ (mod\ 11)$; g) $x \equiv 5\ (mod\ 11)$; h) $x \equiv 11\ (mod\ 24)$.

194. Ечилиши. $x = u + \alpha$ алмаштиришни киритиб,

$(u+\alpha)^n + a_1(y + \alpha^{n-1} + ...+ a_n) \equiv 0(mod\ m)$ ни ҳосил қиламиз. Бу ердан қавсларни очиб чиқиб, қайтадан группалашлардан сўнг

$u^n + (n\alpha + a_1)\, y^{n-1} + ...+(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ...+ a_n) \equiv 0(mod\ m)$ ни ҳосил қиламиз. α ни шундай танлаймизки, $n\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ ўринли бўлсин. Натижада u^{n-1} ни ўзида сақлайдиган ҳад йўқолади: $u^n + b_1y^{n-2} + ... + b_n \equiv 0\ (mod\ m)$.

195. Ечилиши. $n^\alpha + a_1 \equiv 0\ (mod\ m)$ таққосламани тузамиз. Шартдан
$3\alpha + 5 \equiv 0\ (mod\ 13)$ келиб чиқади, унинг ечими: $\alpha \equiv 7\ (mod\ 13)$, демак,
$x = u + 7$ алмаштириш оламиз. Бу алмаштиришни берилган таққосламага қўйиб,
$(u+7)^3 + 5(y + 7)^2 + 6(u + 7) - 8 = u^3 + 26y^2 + 223u + 622 \equiv u^3+2u-2\equiv 0(mod 13)$ ни ҳосил қиламиз.

196. a) (5,10)=5 ва 7 сони 5 га бўлинмаслиги учун берилган таққослама ечимга эга эмас. б) $x \equiv 7(mod\ 13)$; c) $x \equiv 8\ (mod\ 17)$; д) $x \equiv 9\ (mod\ 19)$;
e) $x \equiv 11\ (mod\ 58)$.

197. a) $x \equiv 6(mod\ 19)$; b) ечими йўқ; c) $x \equiv 49(mod\ 153)$; d) $x \equiv 3(mod 183)$;

e) $x \equiv 47$ (*mod* 241). f) ечими йўқ; g) $x \equiv 41,190, 339$ (*mod* 447);

h) $x \equiv 61, 248$ (*mod* 422); j) $x \equiv 39, 196, 353$ (*mod* 471).

198. a) ечими йўқ; b) $x \equiv 3, 8, 13, 18, 23$ (*mod* 25); c) $x \equiv 73$ (*mod* 177);

d) $x \equiv 29$ (*mod* 311); e) $x \equiv 48$ (*mod* 219);

f) $x \equiv 9, 32, 55, 78, 101, 124$ (*mod* 138); g) $x \equiv 11, 28, 45$ (*mod* 51).

199. Ечилиши. a) $ax \equiv b$ (*mod* 21), бу ерда $(a, 21) = 1$, $b \in Z$;

b) $ax \equiv b$(*mod* 21) таққослама ечимга эга бўлиши учун, масалан, 3 та ечимга эга бўлиши учун $(a, 21)=3$ ва b сони 3 га бўлиниши зарур ва етарлидир;

c) бундай таққосламани тузиш мумкин эмас.

200. 1 июнь.

201. Ечилиши. Қўшиб ёзиладиган сонни x билан белиглаймиз, у ҳолда

$523 \cdot 10^3 + x \equiv 0$ (*mod* $7 \cdot 8 \cdot 9$), бу ердан $x \equiv -523000 \equiv -352 \equiv 152$ (*mod* 504), ёки $x = 504t + 152$. x нинг қиймати $t = 0$ ва $t = 1$ да уч хонали бўлади. Бу ердан $x_1 = 152$, $x_2 = 656$.

202. $x \equiv 200$ (*mod* 440), яъни $x \equiv 200; 640$.

203. $x \equiv 30$ (*mod* 31), яъни $x = 30, 61, 42$.

204. a) $x = 3 + 4t$, $y = 1 – 3t$; b) $x = 3 + 13t$, $y = -3 + 8t$;

c) $x = 22 – 37t$, $y = - 25 + 43t$; d) $x = 17 + 37t$, $y = 20 +45t$;

e) $x = 1 + 16t$, $y = 1 + 27t$; f) ечимга эга эмас

g) $x = 4 + 17t$, $й = -11 – 53t$; h) $x = 47 + 105t$, $y = 21 + 47t$; i) ечими йўқ;

j) $x = 4 + 16t$, $y = 7 – 11t$; k) $x = 9 + 37t$, $y = 3 + 12t$; l) $x = -7 + 15t$, $y = 12 – 23t$.

205. $x = 2 – 4t$, $y = 4 + 3t$. $t = 0$ ва $t = -1$ да талаб қилинган ҳосил бўлади.

206. $x = 3 – 5t$, $y = 28 + 3t$.

207. a) $x \equiv 49$ (mod 420); b) $x \equiv 4126$ (mod 6300);

c) $x \equiv 85056$ (mod 130169); d) $x \equiv 9573$ (mod 13923);

e) ечими йўқ; f) ечими йўқ;

208. $x \equiv 25$ (mod 60).

209. 299 ва 439.

210. *a)* $x \equiv y \equiv$ □□□*mod* 7); b) ечими йўқ; c) ечими йўқ;

d) $x_1 \equiv$□□*mod* 12), $y_1 \equiv$ 7(*mod* 12) $x_2 \equiv$ 4 (*mod* 12), $y_2 \equiv$ 7 (*mod* 12); $x_3 \equiv$ 8 (*mod* 12), $y_3 \equiv$ 7 (*mod* 12).

III. БОБ. ДИОФАНТ ТЕНГЛАМАЛАРИ

211. (3,2)

212. (4,3)

213. (10,9001), (10,10999), (-10, 10999), (-10,9001)

214. (2^{30};0), (0;2^{30})

215. (16;12;1)

216. (-4;9), (14;-21), (4;-9), (-14;21)

217. (-10;-11), (-10;9), (-3;-5), (-3;3), (2;-5), (2;3), (9;9), (9;-11)

218. (1;2;3), (3;2;7

219. m=1,n=1

220. n=2, m=3

221. . x=10, y=3

222. . *ечимга эга эмас.*

223. . $\frac{5\pi}{2}+5\pi t, t\in Z.$

224. . $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\left(q+\left(1+4q\right)t\right)\right), b=\frac{1+4p}{1+4q}a, a\neq 0, q, t, p\in Z.$

225. . $\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\frac{\pi}{10}+\frac{m\pi}{5}, n, m\in Z.$

ГЛОССАРИЙ

№	Ўзбек тилида	Рус тилида	Инглиз тилида
1.	Тўплам	Множество	Lots of
2.	Тўплам элементи	Элементы множества	Elements of the set
3.	Бўш тўплам	Пустое множество	Empty set
4.	Тўплам қисми	Подмножество	Subset
5.	Тўпламлар тенглиги	Равенства множеств	Equalities of sets
6.	Сонлар	Чисел	Numbers
7.	Соннинг кўрсаткичи	Показател количества	Quantity indicator
8.	Бутун сонлар	Селых чисел	Of numbers
9.	Туб сонлар	Номера ванны	Tub numbers
10.	Мураккаб сонлар	Сложные числа	Compleks numbers
11.	Арифметик прогресия	Арифметическая прогрессия	Arithmetic progression
12.	Геометрик прогресия	Геометрическая прогрессия	Geometric progression
13.	Ўзаро бир қийматли мослик	Взаимно однозначные соотвецтвия	Mutual value compatubility
14.	Эквивалент тўпламлар	Эквивалентные множества	Eqiuvalent paskages
15.	Тўплам қуввати	Мощност множества	Paskage capacity
16.	Саноқли тўплам	Счетное множество	Countless collection
17.	Саноқсиз тўплам	Несчетное множество	Countless collections
18.	Натурал сонлар	Натуралные числа	Natural numbers
19.	Бўлиниш муносабати	Разделителный подход	The division approach
20.	Энг катта умумий бўлувчи (ЭКУБ)	Крупнейший генерал глава	The largest general head
21.	Энг кичик умумий каррали (ЭКУК)	Минималная общая кратност	Minimum total multiplicity
22.	Алгоритм	Алгоритм	Algorithm
23.	Касрлар	Фраксии	Fractions

24.	Занжир касрлар	Цепные дроби	Chain fractions
25.	Чексиз занжир касрлар	Бесконочные цепные дроби	Infinite chain fractions
26.	Узлуксиз касрлар	Непрерывные дроби	Continuous fractions
27.	Тенгламалар	Уравнения	Equations
28.	Чизиқли тенгламалар	Линейные уравнения	Linear equations
29.	Икки номаълумли тенгламалар	Два неизвестных уравнения	Two unknown equations
30.	Аниқмас тенгламалр	Неопределенные уравнения	Indefinite equations
31.	Ечимлар	Решения	Solutions
32.	Мусбат ечимлар	Положителные решения	Positive solutions
33.	Номаълум сон	Неизвестный номер	Unknown number
34.	Функциялар	Функции	Features
35.	Таққосламалар	Сравнения	Comparisons
36.	Юқори даражали таққосламалар	Сравнения высокого уровня	High-level comparisons
37.	Икки ҳадли таққосламалар	Двумерные сравнения	Two-dimensional comparisons
38.	Тенгсизликлар	Неравенства	Inequalities
39.	Чегирмалар синфи	Дискотный класс	Discount class
40.	Кўпайтувчиларга ажратиш	Разделит на множители	Divide into multipliers
41.	Комбинаторлик масала	Комбинаторная задача	Combinarny sum
42.	Комбинаторика	Комбинаторика	Combinatoricc
43.	Ўрин алмаштириш	Перастановки	Permutations
44.	Коэффициент	Коэффициент	Coefficient
45.	Комбинация	Комбинация	Combination
46.	Ньютон биноми	Бином Ньютона	Nyuton bean
47.	Биномиал коэффициэнт	Биноминалные коэффициенты	Binomial coefficients

48.	Ўринлаштириш	Перемещение	Moving
49.	Умумий ечим	Общее решение	Common decision
50.	Бир жинсли система	Однородная система	Homogeneous system
51.	Скаляр	Скаляр	Scalar
52.	Натурал сонлар тўплами	Множества натуралных чисел	Sets of natural numbers
53.	Бутун сонлар тўплами	Множества селых чисел	Lots of numbers
54.	Рационал сонлар тўплами	Множества рационалных чисел	Sets of rational numbers
55.	Иррационал сонлар тўплами	Множества иррационалных чисел	Sets of irrational numbers
56.	Ҳақиқий сонлар тўплами	Множества действителных чисел	Reality numbers
57.	Кўпҳад	Многочлен	Polynomial
58.	Модул	Модул	Module
59.	Мусбат	Положителный	Positive
60.	Манфий	Отрицателный	Negative

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Брадис В.М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. — М.: Учпедгиз, 1959.

2. Уфановский В. А. Математический аквариум. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая механика”, 2000.

3. Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.

4. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. Серия популярные лекции по математике — Вып. 21.— М.: Наука, 1961.

5. Соминский И. С. Метод математической индукции. Серия популярные лекции по математике — Вып. 3. — М.: Наука, 1974.

6. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. Серия “Популярные лекции по математике”— Вып. 43. — М.: Наука, 1979.

7. Аврамов А. Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля // Квант, №11. 1980.

8. Бендукидзе А. Треугольник Паскаля // Квант, № 10. 1982.

9. Бендукидзе А., Сулаквелидзе А. Вычисление сумм // Квант, № 9. 1970.

10. Кузьмин Е., Ширшов А. О числе *e* // Квант, № 8. 1979.

11. Зарубежные математические олимпиады / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; под ред. И. Н. Сергеева – М. : Наука, Физматлит, 1987.

12. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington. 2000.

13. A. Engel. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York Inc. 1998.

14. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007

15. Аюпов Ш., Риҳсиев Б., Қучқоров О. “Математика олимпиадалар масалалари” 1,2 қисмлар. Т.: Фан, 2004

16. “Математика в школе” (Россия), “Квант” (Россия), “Соровский образовательный журнал” (Россия), “Crux mathematicorum with mathematical Mayhem” (Канада), “Физика, математика ва информатика” (Ўзбекистон) журналлари.

17. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008.

18. Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1995.

19. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия “Популярные лекции по Математике”— Вып. 39. — М.: Наука, 1963.

20. Б. Абдураҳмонов. Математик индукция методи/ Тошкент, 2008 й.

21. Сонлар назарияси асосларидан масала ва машқлар. “Алгебра ва сонлар назарияси” фанидан амалий машғулотлар учун услубий тавсиялар. . Услубий қўлланма. – Самарқанд: СамДУ нашри, 2011. – 80 бет.

22. Ш.А.Аюпов, Б.Б. Рихсиев, О.Ш. Қўчқоров /Математика олимпиада масалалари/ I ва II қисм. Тошкент ЎзРФАк. “Фан нашриёти”2004

23. Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов “Алгебра и теория чисел” Сборник задач для математических школ.-М.: МЦНМО, 2002,-264с.

24. H. Lee. Problems in elementary number theory. http://my.netian.com/ideahitme/ eng.html

25. Math Links, http://www.mathlinks.ro

26. Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com

27. Math Pro Press, http://www.mathpropress.com

28. Математические задачи, http://www.problems.ru

МУНДАРИЖА