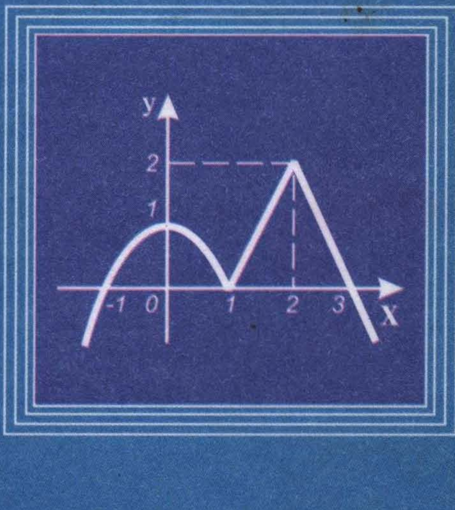
M. XUSHVAQTOV

Matematik analiz

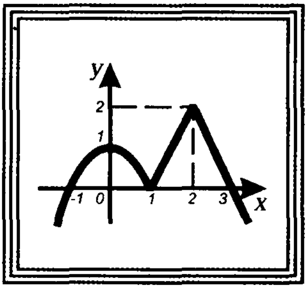


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

M. XUSHVAQTOV

Matematik analiz

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma
sifatida tavsiya etgan



TOSHKENT
«YANGIYUL POLIGRAPH SERVICE»
2008

22.161
X-96

Xushvaqtov, Mamalatif.
Matematik analiz: Oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘l./M. Xushvaqtov; O‘zR oliy va o‘rta-maxsus ta’lim vazirligi. — Toshkent: Yangiyul poligraph service, 2008. — 336 b.

BBK 22.161ya73

Mazkur o‘quv qo‘llanma universitetlar, pedagogika universiteti va institutlari fizika va astronomiya ta’lim yo‘nalishi talabalariga mo‘ljallangan bo‘lib, unda matematik analiz kursi bo‘yicha bakalavriat bosqichida o‘qitiladigan o‘quv materiallari bayon qilingan. Qo‘llanma mavjud adabiyotlardan farqli o‘laroq talabalar uchun sodda tilda yozilgan.

Qo‘llanmadan iqtisodiyot, texnika va harbiy oliy ta’lim muassasalari talabalari, shuningdek, matematik analiz kursini mustaqil o‘rganuvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:

T.A. Azlarov — O‘zbekiston Fanlar akademiyasi haqiqiy a’zosi, fizika-matematika fanlari doktori, professor;
E.Z. Imamov — fizika-matematika fanlari doktori, professor.
O‘. Toshmetov — fizika-matematika fanlari nomzodi, professor.

ISBN 978-9943-309-60-9

SO‘ZBOSHI

Matematik analiz fani oliy matematikaning asosiy va ayni vaqtda, birinchi kurs talabalari duch keladigan dastlabki jiddiy bo‘limi bo‘lib, u universitetlarning, pedagogika universiteti va institutlarining matematika, fizika, mexanika-matematika, fizika-matematika fakultetlarida, tegishli o‘quv dasturlari asosida alohida predmet sifatida o‘qitiladi. Shuningdek, texnika, iqtisodiyot, qishloq xo‘jaligi va harbiy oliy ta’lim muassasalari talabalari ham oliy matematika kursini o‘rganish jarayonida matematik analiz asoslari bilan tanishadilar.

«Matematik analiz» degan atama predmetning asl mohiyatini to‘laroq aks ettiradigan «cheksiz kichiklar yordamida analiz qilish» degan iboraning so‘nggi vaqtlardagi qisqa ko‘rinishi bo‘lib, unda funksiyalar va ularning umumlashmalari (funksionallar, operatorlar va boshqalar) cheksiz kichiklar metodi yordamida analiz qilinadi. Bu fan XVII asrda paydo bo‘lgan bo‘lib, unga buyuk ingliz fizigi va matematigi I.Nyuton (1643—1727) va nemis matematigi G.Leybnits (1646—1716) asos solganlar. Ular matematik analizning asosini (differensial va integral hisobni) yaratdilar. Albatta, hali u paytda differensial va integral hisobning biz o‘rganadigan hozirgi qat’iy matematik nazariyasi vujudga kelmagan edi. Bu nazariya XIX asrning ikkinchi yarmida (fransuz matematigi O.Koshi (1789—1857) tomonidan limit tushunchasining aniq ta’riflanishi munosabati bilan qisqa vaqt ichida nemis matematiklari K.Veyershtrass (1815—1897), R.Dedekind (1831—1916) va G.Kantor (1845—1918) lar bir-birlariga bog‘liq bo‘lmagan ravishda haqiqiy sonning o‘zaro teng kuchli bo‘lgan turli nazariyalarini yaratganlaridan so‘ng) bir qancha olimlarning ilmiy-uslubiy izlanishlari natijasida paydo bo‘lgan.

Matematik adabiyotlar ichida matematik analizga oid bir qancha klassik va zamonaviy adabiyotlar mavjud. Ularning ko‘pchiligi u yoki bu ixtisoslikning o‘ziga xos jihatlarini aks ettiruvchi dasturlar asosida rus tilida yaratilgan yoki xorijiy tillardan rus tiliga tarjima qilingan adabiyotlardir. Ko‘p yillik pedagogik faoliyatimizdan ma’lumki, o‘zbek tilida ta’lim olayotgan birinchi kurs talabalarining aksariyati rus tilida yozilgan yoki rus tilidan o‘zbek tiliga tarjima qilingan adabiyotlardan foydalanishda ma’lum qiyinchiliklarga duch keladilar. Bu qiyinchiliklarni bartaraf qilish maqsadida so‘nggi yillarda oliy matematikaning turli bo‘limlari, xususan, matematik analiz bo‘yicha o‘zbek tilida bir nechta o‘quv qo‘llanma va darsliklar nashr qilindi. Ular oliy ta’lim muassasalarida tayyorlanayotgan kadrlarning matematik salohiyatini zamonaviy talablar darajasiga ko‘tarishda muhim omil bo‘lib xizmat qilmoqda.

Mamlakatimizda oliy ta'limning ikki bosqichli (bakalavriat va magistratura) tizimga o'tilishi munosabati bilan o'quv rejalari va fan dasturlarida ro'y bergan o'zgarishlar hamda fizika va astronomiya ta'lim yo'nalishi talabalariga mo'ljallangan matematik analiz kursini o'qitishning o'ziga xos xususiyatlari mazkur o'quv qo'llanmaning yozilishiga turtki bo'ldi.

Qo'llanma mavjud adabiyotlardan farqli ravishda, o'qituvchining talabalarga o'qiydigan leksiyalari tiliga yaqin tilda yaratildi. Bundan ko'zda tutilgan asosiy maqsad, birinchidan, talabalarni o'qituvchi nutqini «so'zma-so'z» yozib olishdan xalos qilish va bu bilan o'qituvchining leksiya materiallarini erkinroq bayon qilishi uchun imkon yaratish; ikkinchidan, analiz kursini mustaqil o'rganuvchilarga va mazkur kurs bo'yicha leksiya o'qiydigan yosh o'qituvchilarga ko'mak berishdan iborat.

Qo'llanma uchta bobdan tashkil topgan bo'lib, unda haqiqiy sonlar nazariyasi, limitlar nazariyasi, bir argumentli funksiyalarning differensial va integral hisobi bayon qilingan. Har bir bob matematik aniqlik, qat'iylik va ilmiylikka putur yetkazilmasdan, sodda va ravon qilib yozilgan hamda kerakli misol va chizmalar bilan ta'minlangan. Muallif ushbu qo'llanmani yozishda mavjud adabiyotlarda uchraydigan an'anaviy misollar bilan birgalikda o'zi tanlagan misollardan ham foydalandi va mavzularni o'z talqinida ixcham va tushunarli tarzda bayon qilishga harakat qildi. Jumladan, ikkinchi ajoyib limit haqidagi teorema bir tomonli limitlar yordamida isbot qilindi; adabiyotlarda bir nechta teorema ko'rinishida ifodalanadigan Lopital qoidasi bitta teorema shaklida ifodalandi va Bernulli-Lopital teoremasi deb ataldi.

Muallif qo'llanmadagi mavzular ketma-ketligini tuzishda va ularni tanlashda fizik-bakalavrlar tayyorlash bo'yicha ushbu fanning namunaviy o'quv dasturiga amal qildi va mavjud ([5—8], [15]) adabiyotlardan keng foydalandi. Kitobda berilgan ta'riflar, teoremalar, formulalar va eslatmalar kitobning har bir paragrafida alohida belgilandi.

Qo'llanmaning dastlabki variantini o'qib, foydali maslahatlar bergani hamda maxsus muharrir sifatida qimmatli fikr va mulohazalar bildirgani uchun O'zFA haqiqiy a'zosi, professor T.A.Azlarovga minnatdorchilik bildiraman.

Kitobni qo'lyozma holatida o'qib, o'zlarining qimmatli maslahatlarini va xolisona baholarini berganliklari uchun Toshkent Davlat Pedagogika Universiteti matematik analiz kafedrasi professori O'.Toshmetovga hamda fizika-matematika fanlari doktori, professor E.Z.Imamovga tashakkur bildiraman.

Kitobdagi kamchiliklarni bartaraf etish va uning sifatini yanada yaxshilash maqsadida qimmatli fikr va mulohazalarini bildiradigan kitobxonlarga oldindan minnatdorchilik izhor qilamiz.

I BOB
MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

1- §. MATEMATIK ANALIZ PREDMETI. TO‘PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1.1. Matematik analiz predmeti. Matematika fani miqdorlar haqidagi aniq abstrakt fan bo‘lib, u tevarak-atrofimizni qurshab olgan moddiy dunyoning miqdoriy munosabatlarini va fazoviy shakllarini o‘rganadi. Uning aniqligi qo‘llaydigan metodlarining qat’iy mantiqiy mulohazalarga asoslanganligi va xulosalarining qat’iy mantiqiy shaklda jamlanganligi bilan tavsiflanadi, abstraktligi esa tushunchalarining u yoki bu tabiiy (fizika, kimyoviy, biologik, iqtisodiy va hokazo) jarayonni analiz qilish maqsadida yaratilgan mantiqiy modellar ekanligi bilan xarakterlanadi.

Matematikaning fan sifatida shakllanishida va tarixiy taraqqiyoti jarayonida geometriya hamda fizikaning, ayniqsa, mexanikaning xizmatlari beqiyos darajada katta bo‘lgan. Buning dalili sifatida asosiy matematik tushunchalarning kelib chiqishiga bir nazar tashlash kifoya. Narsalarni sanash, geometrik va fizik kattaliklarni o‘lchash jarayonida **son** tushunchasi, moddiy nuqtaning mexanik harakatini o‘rganish jarayonida esa **funksiya** tushunchasi paydo bo‘lgan. Harakatdagi moddiy nuqtaning oniy tezligini aniqlash masalasi **hosila** tushunchasiga, hosilalarni hisoblash masalasi esa **funksiya limiti** va **uzluksizligi** tushunchalariga olib keldi. Harakatdagi moddiy nuqtaning tezligiga ko‘ra uning harakat qonunini tiklash masalasi **boshlang‘ich funksiya** va **aniqmas integral** tushunchalarining, egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash va harakatdagi moddiy nuqtaning berilgan vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘lini hisoblash masalalari esa **aniq integral** tushunchasining vujudga kelishiga sabab bo‘ldi. Siz bu tushunchalar bilan dastlabki tarzda maktab, kollej, litsey matematika kurslarida tanishgansiz.

Oliy ta'lim muassasalarida o'qitiladigan fizika va astronomiyaga oid fanlar yuqorida aytilgan matematik tushunchalarni mukammal bilishni va boshqa bir qator yangi mamematik tushunchalarni va matematik metodlarni o'rganishni talab qiladi.

Matematik analizda funksiyalar va ularning umumlashmalari (funksionallar, operatorlar va boshqalar) limitlar metodi (cheksiz kichiklar metodi) vositasida analiz qilinadi. Biz o'rganadigan matematik analiz kursi to'plamlar va ular ustida amallar, haqiqiy sonlar nazariyasi, limitlar nazariyasi, differensial va integral hisob, qatorlar nazariyasi, oddiy differensial tenglamalar, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi elementlari, Furye qatorlari va integrallari kabi asosiy mavzulardan tashkil topgan. Uning o'qitilishidan ko'zda tutilgan asosiy maqsad, birinchidan, talabalarda fizika va astronomiyaning turli sohalarida differensial va integral hisobdan foydalanish ko'nikmalarini hosil qilish, ikkinchidan, talabalarni matematikaning matematik-fizika metodlari, kompleks analiz, funksional analiz, differensial va integral tenglamalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi kabi jiddiy bo'limlarini o'rganishga tayyorlashdan iborat.

Matematik analiz kursini o'rganishni to'plam, son va funksiya tushunchalarini o'rganishdan boshlaymiz.

1.2. To'plam tushunchasi. Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri to'plam tushunchasidir. Bu tushuncha boshqa sodda matematik tushunchalar orqali ta'riflanmaydi. Biz «to'plam» deganda aniq belgilari bo'yicha bitta guruhga birlashgan obyektlar (sonlar, odamlar, kitoblar, funksiyalar, uchburchaklar, ko'phadlar va hokazo) majmuasini tushunamiz. Masalan, o'zbek adabiy tilidagi unli nutq tovushlari to'plami (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *o*'); $x^2-3x+2=0$ tenglamaning ildizlari to'plami; barcha butun sonlar to'plami; barcha ratsional sonlar to'plami; barcha irratsional sonlar to'plami; barcha haqiqiy sonlar to'plami va hokazo.

To'plamni tashkil etuvchi obyektlar shu *to'plamning elementlari* deyiladi. Bunda aynan bir-biriga teng obyektlar to'plamning bitta elementi deb hisoblanadi. Odatda, to'plam lotin alifbosining bosh harfi yoki indeksli bosh harfi (masalan, A_i) bilan, to'plamning elementlari esa shu alifboning kichik harflari yoki indeksli kichik harflari (masalan, a_i) bilan belgilanadi. «a obyekt A to'plamning elementi» degan ibora $a \in A$ ko'rinishda, «a obyekt A to'plamning elementi emas» degan jumla esa $a \notin A$ shaklida yoziladi. Bu yerdagi $\in$ belgi «tegishli» degan ma'noni bildiruvchi belgi bo'lib,

$a \in A$ va $a \notin A$ yozuvlar mos ravishda «a obyekt A to‘plamga tegishli» va «a obyekt A to‘plamga tegishli emas» deb o‘qilishi ham mumkin.

Matematikada asosan matematik obyektlardan (sonlar, funksiyalar va hokazo) tashkil topgan to‘plamlar qaraladi. Elementlari sonlardan iborat bo‘lgan to‘plam *sonli to‘plam* deb ataladi. Qulaylik maqsadida ba’zi bir eng muhim to‘plamlar maxsus harf va belgilar (simvollar) bilan belgilanadi. Masalan, barcha natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{N}$, barcha butun sonlar to‘plami $\boldsymbol{Z}$, barcha ratsional sonlar to‘plami $\boldsymbol{Q}$, barcha haqiqiy sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$, barcha kompleks sonlar to‘plami $\boldsymbol{C}$ deb belgilanadi. Elementlari a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... bo‘lgan to‘plamni $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ ko‘rinishda, umumiy $P(x)$ shartga bo‘ysunadigan x obyektlar to‘plamini esa $\{x \mid P(x)\}$ yoki $\{x : P(x)\}$ ko‘rinishda yozamiz. Shuni esda saqlashimiz lozimki, a va $\{a\}$ lar turli obyektlar bo‘lib, ularning birinchisi — a bilan belgilangan obyektni, ikkinchisi esa yagona a elementdan tashkil topgan to‘plamni bildiradi.

Bitta ham elementga ega bo‘lmagan «to‘plam» *bo‘sh to‘plam* deb ataladi va $\varnothing$ ko‘rinishda belgilanadi. Masalan, $\sin x < -1.001$ tengsizlikning yechimlari to‘plami bo‘sh to‘plamdir.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plam *chekli to‘plam* deb ataladi. Chekli bo‘lmagan to‘plam *cheksiz to‘plam* deyiladi.

Masalan, $\varnothing$, $\{1, 3, 5\}$ — chekli to‘plam, $\{x: \operatorname{tg} x = 0\}$ to‘plam esa cheksiz to‘plamdir.

Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning elementi bo‘lsa, bu holda A to‘plam B to‘plamning *qismi* (yoki *qismiy to‘plami)* deyiladi va $A \subset B$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$. Har qanday A to‘plam uchun $\varnothing$ va A to‘plamlar A to‘plamning qismiy to‘plami deb hisoblanadi va ular (A to‘plamning yuqorida ta’riflangan xos qismiy to‘plamidan ajralib turishi uchun) A to‘plamning *xosmas qismiy to‘plamlari* deb ataladi.

Endi *to‘plamlarning tengligi* tushunchasi bilan tanishamiz. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, bu holda A va B to‘plamlar bir-biriga teng deb aytiladi va $A = B$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $A = \{-1; 1\}$ va $B = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x^4 - 2x^2 + 1 = 0\}$ bo‘lsin. Bu yerda $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ bikvadrat tenglamaning ildizlari to‘plami -1 va 1 sonlardan tashkil topishini e’tiborga olsak, $A = B$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

1.3. To'plamlar ustida amallar. Ikkita A va B to'plamning elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning *birlashmasi* (yoki *yig'indisi*) deb ataladi va $A \cup B$ ko'rinishda yoziladi:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}.$$

Ikkita A va B to'plamning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning *kesishmasi* (yoki *ko'paytmasi*) deb ataladi va $A \cap B$ ko'rinishda yoziladi:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}.$$

A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning *ayirmasi* deyiladi va $A \setminus B$ yoki $A - B$ ko'rinishda yoziladi:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \notin B\}.$$

To'plamlar ustida bajariladigan $\cup$ va $\cap$ amallar quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik);

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik);

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivlik);

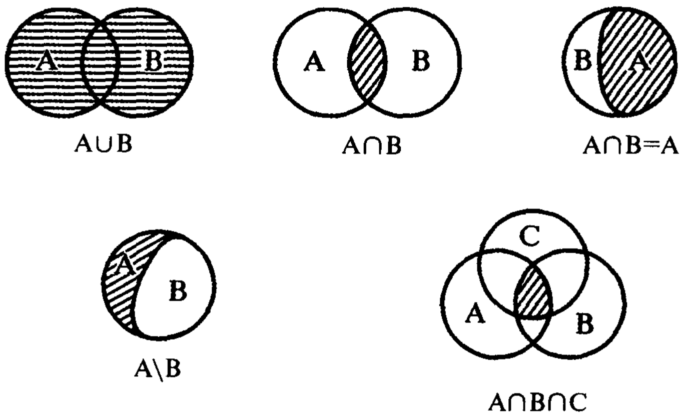
4) $A \subset (A \cup B)$, $B \subset (B \cup A)$; $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$;

5) $A \subset B \Rightarrow (A \cup B = B;\ A \cap B = A)$.

Bu yerdagi $\Rightarrow$ belgi matematik mantiqning implikatsiya belgisi bo'lib, har doim $M_1 \Rightarrow M_2$ yozuvda M_1 mulohazadan M_2 mulohazaning kelib chiqishini bildiradi. Masalan, 5) xossani so'z orqali «agar A to'plam B to'plamning qism to'plami bo'lsa, u holda bu to'plamlarning yig'indisi B to'plamga, ko'paytmasi esa A to'plamga teng bo'ladi» deb aytish mumkin. $\Leftrightarrow$ belgi **ekvivalensiya** belgisi deb ataladi. $M_1 \Leftrightarrow M_2$ yozuv har doim M_1 va M_2 mulohazalarning teng kuchliligini bildiradi. $M_1 \not\Rightarrow M_2$ yozuv $M_1 \Rightarrow M_2$ mulohazaning inkorini bildiradi. 1)—5) xossalarni Eyler-Venn* diagrammalari deb ataladigan chizmalar (1- rasm) yordamida isbot qilish mumkin.

---

*) L.Eyler (1707—1783) — shveytsariyalik matematik; J. Venn (1834—1923) — ingliz matematigi.



1- rasm.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Matematik analiz predmeti nima?
2. «To'plam» deganda nimani tushunasiz? Missollar keltiring.
3. To'plamning elementlari deb nimalarga aytiladi?
4. $a \in A$ va $a \notin A$ yozuvlar nimani anglatadi?
5. Qanday to'plamlar sonli to'plamlar deb ataladi?
6. Matematikada qanday obyektlardan tashkil topgan to'plamlar qaraladi?
7. Qanday to'plam bo'sh to'plam deyiladi? Bo'sh to'plam qanday belgi bilan belgilanadi?
8. Chekli to'plam deb nimaga aytiladi? Cheksiz to'plam deb-chi? Misollar keltiring.
9. $A \subset B$ va $A \supset B$ yozuvlar nimani bildiradi?
10. $\varnothing$ va A to'plamlar A to'plamning qanday qism to'plamlari deb ataladi?
11. Qanday to'plamlar o'zaro teng to'plamlar deyiladi? Misollar keltiring.
12. To'plamlarning birlashmasi (yig'indisi), kesishmasi (ko'paytmasi) va ayirmasi deb nimalarga aytiladi?
13. To'plamlar ustidagi qo'shish va ko'paytrish amallarining asosiy xossalari nimalardan iborat?
14. Eyler-Venn diagrammalari deb nimaga aytiladi?

2- § HAQIQIY SONLAR

2.1. Son tushunchasi. Matematikaning boshlang'ich, ayni paytda asosiy tushunchalaridan biri son tushunchasidir. Siz maktab kursida natural son, nul soni, butun son, ratsional son, haqiqiy son tushunchalari bilan tanishgansiz va ularning xossalarini va amaliy tatbiqlarini o'rgangansiz. Lekin, son haqidagi bu ma'lumotlar matematik analiz kursini o'rganish uchun kamlik qiladi. Matematik analizning funksiya, limit, yaqinlashish, uzluksizlik, hosila, integral kabi tushunchalari haqida mukammal bilimga ega bo'lish uchun avvalo haqiqiy sonlar nazariyasini yaxshi bilish lozim. Biz bu yerda dastavval natural, butun va ratsional sonlar haqidagi zaruriy ma'lumotlarni eslatamiz; so'ngra ratsional sonlar to'plamini kengaytirish masalasi, haqiqiy son tushunchasini cheksiz o'nli kasrlar yordamida kiritish usuli, haqiqiy sonlarni taqqoslash, aniq chegara prinsipi va haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar bilan tanishamiz.

2.2. Natural sonlar. Ushbu 1, 2, 3, ..., n, ... sonlar *natural sonlar* deb ataladi. Barcha natural sonlar to'plamini N harfi bilan belgilaymiz:

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...\}.$$

Bu to'plam cheksiz to'plam bo'lib, unda taqqoslash qoidasi, qo'shish va ko'paytirish amallari aniqlangan. Uning eng kichik elementi mavjud: $\min\limits_{x \in N} x = 1$; eng katta elementi yo'q.

Matematik induksiya metodi yordamida isbotlash prinsipi natural sonlar to'plamining quyidagi ajoyib xossasiga asoslanadi:

Teorema (induksiya aksiomasi). *Agar*

(a) $A \subset N$,

(b) $1 \in A$,

(d) $k \in A \Rightarrow k + 1 \in A$

shartlar bajarilsa, u holda $A = N$ bo'ladi.

Isboti. (b) va (d) shartlarga ko'ra

$$1 \in A \Rightarrow 2 \in A \Rightarrow 3 \in A \Rightarrow ... \Rightarrow n \in A \Rightarrow n + 1 \in A \ \Rightarrow ...$$

bo'ladi (n — ixtiyoriy natural son). Bu esa $N \subset A$ ekanligini bildiradi. (a) shart bo'yicha $A \subset N$. Demak, to'plamlar tengligining ta'rifiga ko'ra $A = N$. Teorema isbot qilindi.

Misol. Matematik induksiya metodi yordamida har qanday n natural son uchun

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2 \qquad (*)$$

bo'lishi isbot qilinsin.

Y e c h i s h. $1^2 = 1$ bo'lgani sababli, (*) tenglik $n = 1$ qiymatda o'rinli: $1 = 1^2$, ya'ni

$$1 \in A = \{n \in N \mid 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2\} \subset N.$$

Faraz qilaylik, $k \in A$ bo'lsin. U holda

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2,$$

ya'ni $k + 1 \in A$ bo'ladi.

Demak, yuqorida isbotlangan teoremaga ko'ra, (*) tenglik har qanday n natural son uchun o'rinlidir.

2.3. Butun sonlar. Natural sonlar, ularga qarama-qarshi bo'lgan $-1, -2, -3, \ldots$ sonlar va 0 (nul) son *butun sonlar* deb ataladi. Natural sonlarni *musbat butun sonlar*, $-1, -2, -3, \ldots$ sonlarni *manfiy butun sonlar*, $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sonlarni esa *manfiymas butun sonlar* deb ataymiz. Barcha butun sonlar to'plamini $\boldsymbol{Z}$ harfi bilan, barcha manfiymas butun sonlar to'plamini esa $\boldsymbol{Z}_0$ bilan belgilaymiz:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, \quad \boldsymbol{Z}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

$\boldsymbol{Z}$ to'plam cheksiz to'plam bo'lib, unda taqqoslash qoidasi, qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallari aniqlangan. Bu qoida va amallar hamda ularning asosiy xossalari maktab kursidan ma'lum. Ravshanki, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}_0 \subset \boldsymbol{Z}$.

2.4. Ratsional sonlar. Ushbu p/q ($p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$) qisqarmas oddiy kasr ko'rinishida ifodalanadigan son ***ratsional son*** deb ataladi. Barcha ratsional sonlar to'plamini $\boldsymbol{Q}$ harfi bilan belgilaymiz:

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N} \right\}$$

Ko'rinib turibdiki, $\forall p \in Z$ son uchun $p = p/1$, ya'ni $Z \subset \boldsymbol{Q}$. Shuning uchun har bir $p \in Z$ son *butun ratsional son* deb aytiladi. Bu yerda va bundan keyin har doim (*umumiylik kvantori* belgisi deb ataladigan) $\forall$ belgi «har qanday», «ixtiyoriy», «har bir», «barcha» degan so'zlar o'rnida ishlatiladi. U «Any — ixtiyoriy» va «All — barcha» degan inglizcha so'zlarning birinchi harfini yuqoridan pastga ag'darib yozishdan paydo bo'lgan.

Agar $p > 0(p < 0)$ bo'lsa, p/q ratsional son *musbat (manfiy) ratsional* son deb aytiladi. $\frac{0}{q}$ kasr *nul ratsional son* deyiladi va odatdagi 0 bilan belgilanadi.

Ratsional sonlar to'plamida taqqoslash qoidasi, qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

Taqqoslash. 1) Agar ikkita $a = p_1/q_1$ va $b = p_2/q_2$ (p_1, $p_2 \in \boldsymbol{Z}$, q_1, $q_2 \in N$) ratsional son uchun $p_1 q_2 = p_2 q_1$ tenglik o'rinli bo'lsa, a va b ratsional sonlar *o'zaro teng* deb aytiladi va $a = b$ ko'rinishda yoziladi.

2) Agar manfiymas $a = p_1/q_1$ va $b = p_2/q_2$ ratsional sonlar uchun $p_1 q_2 > p_2 q_1$ tengsizlik bajarilsa, *a ratsional son b ratsional sondan katta* deb aytiladi va $a > b$ ko'rinishda yoziladi.

3) Agar musbatmas a va b ratsional sonlar uchun $|a| < |b|$ tengsizlik bajarilsa, *a ratsional son b ratsional sondan katta* deyiladi va $a > b$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $|x|$ bilan x ratsional sonning *moduli (absolut qiymati)* belgilangan:

$$|x| = \begin{cases} x(x \geq 0), \\ -x(x < 0). \end{cases}$$

4) Manfiymas ratsional sonlarni manfiy ratsional sonlardan katta deb hisoblaymiz.

Qo'shish. Ikkita $a = p_1/q_1$ ва $b = p_2/q_2$ ratsional sonning **yig'indisi** quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

Yig'indini topish amali *qo'shish* deb ataladi.

Ko'paytirish. Ikkita $a = p_1 / q_1$ va $b = p_2 / q_2$ ratsional sonning **ko'paytmasi** quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}.$$

Ko'paytmani topish amali *ko'paytirish* deyiladi.

Eslatma. Barcha mumkin bo‘lgan o‘zaro teng oddiy kasrlar ichida bitta va faqat bitta qisqarmaydigan p/q $(p\in Z, q\in N)$ kasr mavjud bo‘lganligi sababli, ayni bitta ratsional sonni cheksiz ko‘p butun sonlarning nisbati shaklida yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-2}{-6}=\frac{-4}{-12}=\ldots$$

Shu sababli, biz har doim barcha mumkin bo‘lgan o‘zaro teng kasrlarni ayni bitta ratsional sonning turli shakllari deb qaraymiz va ixtiyoriy $p/q\left(p\in Z, q\in N\setminus\{0\}\right)$ nisbatni *ratsional* son deb ataymiz.

2.5. Ratsional sonlarning asosiy xossalari. Bu yerda biz «son» deganimizda ratsional sonni tushunamiz.

I. Har qanday ikkita a va b son bir-biri bilan $>$ («katta»), $<$ («kichik») yoki $=$ («teng») belgilarning bittasi va faqat bittasi orqali bog‘langan, shu bilan birga $a>b \Rightarrow b<a$.

II. Har qanday ikkita a va b son uchun, ularning *yig‘indisi* deb ataladigan va $c=a+b$ ko‘rinishda yoziladigan (yagona) c son mavjud.

III. Har qanday ikkita a va b son uchun, ularning *ko‘paytmasi* deb ataladigan va $c=a\cdot b$ yoki $c=ab$ ko‘rinishda yoziladigan (yagona) c son mavjud.

Taqqoslash qoidasi quyidagi qonunga bo‘ysunadi:

1° Tranzitivlik: agar $a>b$ va $b>c$ bo‘lsa, u holda $a>c$ bo‘ladi; agar $a=b$ va $b=c$ bo‘lsa, u holda $a=c$ bo‘ladi.

Qo‘shish amali quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi.

2° Kommutativlik: $a+b=b+a$.

3° Assotsiativlik: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

4° Nulning maxsus roli: *nul son* deb ataladigan shunday 0 son mavjudki, har qanday a son uchun $a+0=a$ bo‘ladi.

5° Qarama-qarshi sonning mavjudligi: har bir a son uchun, a ga *qarama-qarshi son* deb ataladigan va $-a$ bilan belgilanadigan shunday son mavjudki, $a+(-a)=0$ bo‘ladi.

Ko‘paytirish amali quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

6° Kommutativlik: $ab=ba$.

7° Assotsiativlik: $(ab)c=a(bc)$.

8° Birning maxsus roli: *bir* deb ataladigan va 1 bilan belgilanadigan shunday son mavjudki, har qanday a son uchun $a\cdot 1=a$ bo‘ladi.

9° Teskari sonning mavjudligi: nulga teng bo‘lmagan har bir a son uchun, a ga *teskari son* deb ataladigan va a^{-1} bilan belgilanadigan shunday son mavjudki, $a\cdot a^{-1}=1$ bo‘ladi.

Qo'shish va ko'paytirish amallari bir-biri bilan quyidagi qonun bo'yicha bog'langan:

10° Distributivlik: $(a+b)c = ac + bc$.

Bu xossa *ko'paytirishning qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni* deb ham aytiladi.

Quyidagi ikkita xossa «>» belgini qo'shish va ko'paytirish belgilari bilan bog'laydi:

11° agar $a > b$ bo'lsa, u holda har qanday c son uchun $a + c > b + c$ bo'ladi.

12° agar $a > b$ va $c > 0$ bo'lsa, u holda $ac > bc$ bo'ladi.

13° (Arximed aksiomasi). Har qanday a son uchun shunday n natural son topiladiki, $n > a$ bo'ladi.

Yuqorida bayon qilingan 1°—13° xossalar *ratsional sonlarning asosiy xossalari* deb aytiladi. Bu xossalarning isbotlari bevosita butun sonlarning mos xossalaridan kelib chiqadi.

Ratsional sonlarning arifmetik amallar va bu amallarning tenglik hamda tengsizlik belgilari bilan bog'lanishiga taalluqli bo'lgan barcha algebraik xossalari 1°—13° xossalardan natija sifatida kelib chiqadi.

Masalan:

14° Agar $a > b$ va $c > d$ bo'lsa, u holda $a + c > b + d$ bo'ladi.

I s b o t i. 11° xossaga binoan $a > b \Rightarrow a + c > b + c$ va $c > d \Rightarrow c + b > d + b$. 2° xossaga ko'ra $c + b = b + c$ va $d + b = b + d$ bo'ladi.

Demak, $a + c > b + c$ va $b + c > b + d$.

U holda 1° xossaga asosan $a + c > b + d$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

15° (Zichlik xossasi). Bir-biriga teng bo'lmagan har qanday ikkita ratsional son orasida yotuvchi ratsional son mavjud.

I s b o t i. Aytaylik, $a > b$ bo'lsin. U vaqtda

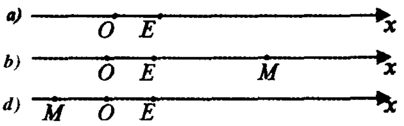
$$a > b \overset{11^\circ}{\Rightarrow} 2a > b + a \overset{2^\circ}{=} a + b \overset{12^\circ}{\Rightarrow} a > \frac{a+b}{2};$$

$$a > b \overset{11^\circ}{\Rightarrow} a + b > 2b \overset{12^\circ}{\Rightarrow} \frac{a+b}{2} > b.$$

Demak, $a > \frac{a+b}{2} > b$.

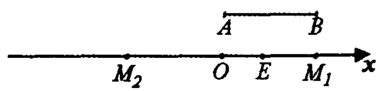
Bu xossadan bir-biriga teng bo'lmagan ixtiyoriy ikkita a va b ratsional son orasida cheksiz ko'p ratsional sonlar yotishi kelib chiqadi.

2.6. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish masalasi. Aslida, ratsional sonlar amaliy hisoblashlarning ehtiyojlarini to'la qanoatlantiradi. Biroq, geometrik va fizika kattaliklarni (masalan, kesma uzunligini, massani) aniq (nazariy) o'lchash uchun ratsional sonlar talabga javob bera olmaydi. Masalan, son o'qining har bir M nuqtasiga $[OM]$ kesma uzunligini ifodalovchi biror sonni mos keltirish masalasini qaraylik. Biz son o'qi deganda, sanoq boshi deb ataladigan O nuqtasi, $[OE]$ **masshtab kesmasi** (uning uzunligini 1 ga teng deb hisoblaymiz) va **musbat yo'nalishi** (O nuqtadan E nuqtaga) tanlangan to'g'ri chiziqni tushunamiz (2 *a*- rasm). Agar M va E nuqtalar O nuqtaning bir tomonida (2 *b*- rasm) (turli tomonlarida (2 *d*- rasm)) joylashsa, M nuqtaga mos keluvchi sonni musbat (manfiy) deb hisoblaymiz.



2- rasm.

Dastlab, har bir ratsional songa son o'qining biror nuqtasi mos kelishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, avval uzunligi $[OE]$ masshtab kesma uzunligining $1/q\ (q \in N)$ qismiga teng bo'lgan $1/q[OE]$ kesmani, so'ngra bu kesma yordamida uzunligi $p/q\ (p, q \in N)$ ratsional songa teng bo'lgan $[AB]$ kesmani yasaymiz. Nihoyat, $[AB]$ kesmani son o'qida O nuqtadan o'ng (chap) tomonga shunday joylashtiramizki, A va B nuqtalar mos ravishda son o'qining O va M_1(M_2 va O) nuqtalari bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, $+p/q\ (p, q \in N)$ ratsional songa M_1 nuqta, $-p/q\ (p, q \in N)$ ratsional songa esa M_2 nuqta mos keladi. Bunda «0 ratsional songa O nuqta mos keladi» deb hisoblaymiz (3- rasm).



3- rasm.

Son o'qining ratsional sonlarga mos keladigan nuqtalari *ratsional nuqtalar* deb ataladi. Uzunligi ratsional son orqali ifodalanmaydigan kesmalarning mavjudligi (masalan, tomoni 1 ga teng bo'lgan kvadratning diagonali) son o'qida ratsional nuqtalardan tashqari yana boshqa nuqtalar ham mavjudligini bildiradi. Bunday kesmalarni uzunlik bilan ta'minlash zaruriyati son o'qining ratsional bo'lmagan nuqtalariga *irratsional sonlar* deb ataladigan yangi sonlarni mos qo‘yib, ratsional sonlar to‘plamini kengaytirish masalasiga olib keladi. Biz bu masalani son o‘qining har bir nuqtasiga to‘la aniqlangan biror

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots = \pm\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots\right),$$

$$a_0 \in Z_0, a_i \in \{0,1,2,3,\ldots,9\} (i=1,2,\ldots)$$

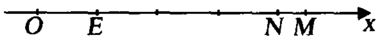
cheksiz o‘nli kasrni mos keltirish yordamida yechamiz.

Son o‘qining ixtiyoriy M nuqtasini olib (aniqlik uchun, M va E nuqtalar O nuqtadan bir tomonda joylashgan deylik), $[OM]$ kesma uzunligini $[OE]$ masshtab kesma yordamida o‘lchaymiz. O‘lchashni bosqichma-bosqich bajaramiz.

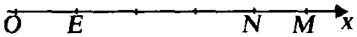
I bosqich. $[OE]$ masshtab kesmani $[OM]$ kesmada joylashtirib chiqamiz. Bu yerda ikkita holat bo‘lishi mumkin:

a) $[OE]$ kesma $[OM]$ kesmada a_0 marta joylashib, uzunligi $[OE]$ kesma uzunligidan kichik bo‘lgan $[NM]$ qoldiq kesma ortib qoladi (4- rasm). Bu yerda a_0 son $[OM]$ kesma uzunligining birlik aniqlikkacha kami bilan olingan taqribiy qiymatini ifodalaydi;

b) $[OE]$ kesma $[OM]$ kesmada $a_0 + 1$ marta qoldiqsiz joylashadi (5- rasm). Amaliy ishlarda bu holatda kesmani o‘lchash jarayoni tugagan hisoblanadi. Bu yerda ham a_0 son $[OM]$ kesma uzunligining birlik aniqlikkacha kami bilan olingan taqribiy qiymatini ifodalaydi deb aytish mumkin. Chunki $[OE]$ kesma $[OM]$ kesmada a_0 marta joylashib, uzunligi $[OE]$ birlik kesma uzunligiga teng bo‘lgan $[NM]$ kesma ortib qoladi.



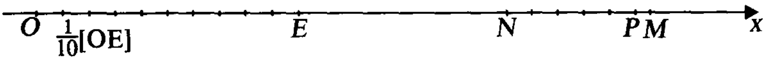
4- rasm.



5- rasm.

II bosqich. $(1/10)[OE]$ kesmani $[NM]$ kesmada joylashtirib chiqamiz. Bu yerda ham ikkita holat bo‘lishi mumkin:

a) $(1/10)$ $[OE]$ kesma $[NM]$ kesmada a_1 marta joylashib, uzunligi $(1/10)[OE]$ kesma uzunligidan kichik bo‘lgan $[PM]$ qoldiq ortib qoladi (6- rasm). Bunda a_0, a_1 ratsional son $[OM]$ kesma uzunligining $1/10$ aniqlikkacha kami bilan olingan taqribiy qiymatini ifodalaydi;



6- rasm.

b) (1/10)[OE] kesma [NM] qoldiq kesmada $a_1 + 1$ marta qoldiqsiz joylashadi. Bu holda ham a_0, a_1 ratsional son [OM] kesma uzunligining 1/10 aniqlikkacha kami bilan olingan taqribiy qiymatini ifodalaydi deb aytish mumkin. Chunki (1/10)[OE] kesma [NM] qoldiq kesmada a_1 marta joylashib, uzunligi (1/10) [OE] kesma uzunligiga teng bo'lgan [PM] qoldiq kesma ortib qoladi.

Bu jarayonni cheksiz (nazariy) davom ettirib, [OM] kesma uzunligining 10^{-k} ($k = 0, 1, 2, \ldots$) aniqlikkacha kami bilan olingan taqribiy qiymatlarini ifodalovchi cheksiz ko'p

$$a_0;\ a_0, a_1;\ a_0, a_1 a_2;\ \ldots;\ a_0 a_1 a_2 \ldots a_n;\ \ldots \qquad (1)$$

ratsional sonlarni hosil qilamiz. Ko'rinib turibdiki, (1) sonlarning har birini ushbu

$$a_0, a_1 a_2 \ldots, a_n \ldots \qquad (2)$$

cheksiz o'nli kasrning mos xonasidan boshlab, keyingi barcha raqamlarini tashlab yuborish vositasida hosil qilishimiz mumkin. Shu bilan birga, (2) cheksiz o'nli kasr (1) ratsional sonlarning cheksiz ketma-ketilgi bilan to'la aniqlanadi.

Yuqoridagi mulohazalarni M nuqta sanoq boshining chap tomonida joylashganida ham tatbiq etish mumkin. Bu holda (1) ratsional sonlar va (2) cheksiz o'nli kasr manfiy ishorali bo'ladi.

Son o'qining O nuqtasiga (sanoq boshiga) $0 = +0{,}00\ldots0\ldots =$ $= -0{,}00\ldots0\ldots$ cheksiz o'nli kasr mos keladi deb hisoblaymiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, son o'qining har xil nuqtalariga turli cheksiz o'nli kasrlar mos keladi. Shu bilan birga, har bir cheksiz o'nli kasrga son o'qida biror nuqta mos kelishini isbot qilish mumkin.

Shunday qilib, barcha mumkin bo'lgan cheksiz o'nli kasrlar to'plami bilan son o'qining barcha nuqtalari to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin ekan. Bu esa har qanday kesmani birlik masshtab kesma yordamida o'lchash imkonini beradi.

2.7. Haqiqiy sonlar va ularni taqqoslash. Barcha mumkin bo'lgan cheksiz o'nli kasrlar to'plamini qaraymiz. Cheksiz o'nli kasr ko'rinishida tasvirlanadigan son *haqiqiy son* deb ataladi. Barcha haqiqiy sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ harfi bilan belgilanadi. Musbat (manfiy) cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishidagi sonlarni *musbat (manfiy) haqiqiy sonlar* deb ataymiz. 0,000...0... cheksiz o‘nli kasrni *nul haqiqiy son* deb ataymiz va 0 ko‘rinishida yozamiz.

Maktab kursidan ma’lumki, har bir $\pm p / q (p, q \in \boldsymbol{N})$ ratsional kasrni davriy cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida va aksincha, har bir davriy cheksiz o‘nli kasrni $\pm p / q (p, q \in \boldsymbol{N})$ ratsional kasr ko‘rinishida tasvirlash mumkin. Demak, davriy cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishida tasvirlanadigan barcha haqiqiy sonlar to‘plami barcha ratsional sonlar to‘plami bilan ustma-ust tushadi. Bu esa davriy bo‘lmagan cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishda tasvirlanadigan haqiqiy sonlarni *irratsional sonlar* (masalan, $\sqrt{2} = 1{,}4142...,\sqrt{3} = 1{,}73...,\pi = 3{,}14...,e = 2{,}718...$) deb aytish imkonini beradi.

Shunday qilib, $\boldsymbol{R} = Q \cup \boldsymbol{I}$ $(Q \cap \boldsymbol{I} = \varnothing)$ deb yozish mumkin. Bu yerda: $\boldsymbol{I}$ — barcha irratsional sonlar to‘plami. Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, bu holda A va B to‘plamlar *ekvivalent to‘plamlar* deyiladi. Barcha natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{N}$ ga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlar *sanoqli to‘plamlar* deyiladi. Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam *sanoqsiz to‘plam* deyiladi. Isbot qilish mumkinki, $\boldsymbol{Q}$ to‘plam sanoqli to‘plam bo‘lib, $\boldsymbol{I}$ va $\boldsymbol{R}$ to‘plamlar sanoqsiz to‘plamlardir. Bundan ko‘rinadiki, Q to‘plamning «quvvati» $\boldsymbol{I}$ to‘plamning «quvvatidan kichik» ekan.

Endi $\boldsymbol{R}$ to‘plamda taqqoslash qoidasini, qo‘shish va ko‘paytirish amallarini shunday aniqlaymizki, birinchidan, bu qoida va amallar $\boldsymbol{R}$ ning $\boldsymbol{Q}$ qismida ratsional sonlar to‘plamida aniqlangan xuddi shunday qoida va amallar bilan ustma-ust tushsin; ikkinchidan, $\boldsymbol{R}$ to‘plamning barcha elementlari ratsional sonlarning yuqorida keltirilgan 1°—13° xossalariga ega bo‘lsin.

Taqqoslash. Ixtiyoriy ikkita $a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ va $b = \pm b_0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$ haqiqiy sonni (bu yerda «±» ishoralarning biri olinadi) bir-biri bilan quyidagicha taqqoslaymiz:

1) agar a va b sonlar bir xil ishorali bo‘lib, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$, ... bo‘lsa, bu holda a va b sonlar *bir-biriga teng* deb aytamiz va $a = b$ ko‘rinishida yozamiz. Aks holda, $a \neq b$ deb yoziladi.

2) $a \neq b$ bo‘lsin.

U holda:

a) agar a va b sonlar manfiymas bo‘lib, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$ $(a_k < b_k)$ bo‘lsa, bu holda *a son b sondan katta (kichik)* deb aytamiz va $a > b$ $(a < b)$ ko‘rinishda yozamiz. Bu yerda $k = \min\limits_{a_i \neq b_i}\{i\}$. Ravshanki, $a > b \Rightarrow b < a$.

b) manfiymas haqiqiy sonni manfiy haqiqiy sondan katta deb hisoblaymiz;

d) agar a va b lar manfiy haqiqiy sonlar bo‘lib, $|b| > |a|$ $(|a| > |b|)$ bo‘lsa, bu holda a son b sondan katta (kichik) deb aytamiz. Bu yerda

$$|x| = \begin{cases} x\,(x \geq 0), \\ -x\,(x < 0). \end{cases} \tag{*}$$

(*) tengliklar bilan aniqlangan $|x|$ son *x haqiqiy sonning moduli* (yoki *absolut qiymati*) deb ataladi.

R to‘plamda kiritilgan taqqoslash qoidasi ***R*** ning ***Q*** qismida ***Q*** to‘plamda kiritilgan taqqoslash qoidasi bilan ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, ***R*** to‘plamda kiritilgan taqqoslash qoidasini ratsional son uchun qo‘llaganimizda ***Q*** to‘plamda kiritilgan taqqoslash qoidasi bilan bir xil natija beradi.

Endi ***R*** to‘plamda 1° xossaning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz: $(a > b$ va $b > c) \Rightarrow a > c$ va $(a = b$ va $b = c) \Rightarrow a = c$.

Isboti. Mumkin bo‘lgan barcha uch holni alohida-alohida qaraymiz:

a) $c \geq 0$ bo‘lsin. U holda taqqoslash qoidasiga binoan $a > 0$ va $b > 0$ bo‘lishi ravshan. Aytaylik, $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, $b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ va $c = c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ bo‘lib, $a > b$ va $b > c$ bo‘lsin. Bu holda ta’rifga ko‘ra shunday $k = \min\limits_{a_i \neq b_i}\{i\}$ va $p = \min\limits_{b_i \neq c_i}\{i\}$ indekslar topiladiki, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$ va $b_0 = c_0$, ..., $b_1 = c_1$, ..., $b_{p-1} = c_{p-1}$, $b_p > c_p$ bo‘ladi. Agar bu yerda $m = \min(k, p)$ desak, ratsional sonlarning 1° xossasiga asosan $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, ..., $a_{m-1} = c_{m-1}$, $a_m > c_m$ bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $a > c$ ekanini bildiradi.

b) $c < 0$ va $a \geq 0$ bo‘lsin. Bu holda $a > c$ tengsizlikning har qanday b son uchun o‘rinli bo‘lishi ravshan.

d) a, b, c lar manfiy haqiqiy sonlar bo‘lsin. Bu holda ta’rifga ko‘ra $a > b$ va $b > c$ tengsizliklar mos ravishda $|b| > |a|$ va $|c| > |b|$ ekanini bildiradi. Bundan a) holga ko‘ra $|c| > |a|$ ekani kelib chiqadi. Bu esa ta’rifga binoan $a > c$ ekanini bildiradi.

Nihoyat, $\boldsymbol{R}$ da kiritilgan «=» («teng») belgining tranzitivlik xossasini isbot qilamiz. Aytaylik, $a = b$ va $b = c$ bo‘lsin. U holda «=» belgining ta’rifiga ko‘ra $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $b = b_0, b_1 b_1 \dots b_n \dots$ va $c = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ sonlar uchun $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n \dots$ va $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$, ..., $b_n = c_n \dots$ bo‘ladi. Demak, $\boldsymbol{Q}$ to‘plamda kiritilgan «=» («teng») belgining tranzitivlik xossasiga binoan $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, ..., $a_n = c_n \dots$ bo‘ladi. Bu esa $\boldsymbol{R}$ da kiritilgan «=» («teng») belgining ta’rifiga ko‘ra $a = c$ ekanini bildiradi.

3- §. ANIQ CHEGARA PRINSIPI. HAQIQIY SONLAR USTIDA ARIFMETIK AMALLAR

3.1. Yuqoridan (quyidan) chegaralangan sonli to‘plamlar. Aniq chegara prinsipi. Barcha elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan X to‘plamni *sonli to‘plam* deb aytamiz va $X \subset \boldsymbol{R}$ ko‘rinishda yozamiz. Agar boshqa biror narsa aytilmagan bo‘lsa, biz bu yerda har doim «to‘plam» deganda sonli to‘plamni tushunamiz.

Faraz qilaylik, bo‘sh bo‘lmagan $X (X \subset \boldsymbol{R})$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

Agar shunday M haqiqiy son (m haqiqiy son) mavjud bo‘lib, $\forall x \in X$ uchun $x \leq M \, (x \geq m)$ tengsizlik bajarilsa, bu holda X to‘plam *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deb aytiladi. Bu yerdagi M son (m son) X to‘plamning *yuqori (quyi) chegarasi* deyiladi.

Masalan, barcha manfiy haqiqiy sonlar to‘plami yuqoridan (yuqori chegara sifatida ixtiyoriy manfiymas haqiqiy sonni olish mumkin), barcha natural sonlar to‘plami esa quyidan (quyi chegara sifatida 1 sonidan katta bo‘lmagan ixtiyoriy haqiqiy sonni olish mumkin) chegaralangan to‘plamlardir.

Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan to‘plamni, qisqacha, *chegaralangan to‘plam* deb aytamiz. Aks holda esa, *chegaralanmagan to‘plam* deymiz.

Masalan, ushbu $A = \{x \in \boldsymbol{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ to‘plam chegaralangan, $Z = \{0, \pm 1; \pm 2; \dots\}$ to‘plam esa chegaralanmagan to‘plamdir.

Aniq chegaraning ta’rifi. Yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘sh bo‘lmagan $X \ (X \subset \boldsymbol{R})$ to‘plamning yuqori (quyi) chegaralarining eng kichigi (eng kattasi) X to‘plamning *aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi* deyiladi va

$$\sup X \text{ yoki } \sup_{x\in X} x \left(\inf X \text{ yoki } \inf_{x\in X} x\right)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu yerdagi sup va inf belgilar lotincha «supremum-eng yuqori» va «infimum-eng quyi» degan so‘zlardan olingan. Masalan,

$$\sup_{0\le x\le 1} x = 1,\ \inf_{0\le x\le 1} x = 0,\ \inf N = 1,\ \sup_{x<0} x = 0,\ \inf_{x>0} x = 0.$$

Misollardan ko‘rinib turibdiki, to‘plamning aniq chegaralari shu to‘plamning o‘ziga tegishli bo‘lishi yoki tegishli bo‘lmasligi ham mumkin ekan.

Endi biror c haqiqiy sonning yuqoridan (quyidan) chegaralangan biror to‘plam uchun aniq chegara bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlarini bayon qilamiz. Uni aniq chegaraning ikkinchi ta’rifi sifatida qabul qilish amaliy jihatdan juda qulay.

Teorema. *Biror $c\in \boldsymbol{R}$ sonning yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘sh bo‘lmagan X ($X\subset \boldsymbol{R}$) to‘plam uchun aniq yuqori (aniq quyi) chegara bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli: (a) $\forall x\in X$ uchun $x\le c (x\ge c)$; (b) c sondan kichik (katta) bo‘lgan $\forall x'\in \boldsymbol{R}$ son uchun kamida bitta shunday $x\in X$ son topiladiki, $x>x' (x<x')$ bo‘ladi.*

Isboti. **1) Zarurligi.** $c=\sup X$ ($c=\inf X$) bo‘lsin. U holda yuqori (quyi) chegaraning ta’rifiga binoan (a) shart bajariladi. Endi (b) shartning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. Agar c sondan kichik (katta) bo‘lgan $x'\in \boldsymbol{R}$ son uchun X to‘plamning barcha x elementlari x' sondan katta (kichik) bo‘lmasa, $c=\sup X$ ($c=\inf X$) bo‘la olmas edi. Demak, kamida bitta shunday $x\in X$ son mavjudki, $x>x'$ ($x<x'$) bo‘ladi.

2) Yetarliligi. Aytaylik, (a) va (b) shartlar bajarilgan bo‘lsin. Ravshanki, (a) shart c sonning X to‘plam uchun yuqori (quyi) chegara ekanini, (b) shart esa c sonning X to‘plam yuqori (quyi) chegaralarining eng kichigi (eng kattasi) ekanini bildiradi. Demak, bu holda $c=\sup X$ ($c=\inf X$) bo‘lar ekan.

1- eslatma. Yuqorida aytilgan teoremadagi (b) shartni quyidagicha ham ifodalash mumkin: $\forall\ \varepsilon>0$ son uchun shunday

$x_0 = x_0(\varepsilon) \in X$ son topiladiki, $x_0 > c - \varepsilon (x_0 < c + \varepsilon)$ bo‘ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (*b*) shartda $x' = c - \varepsilon \ (x' = c + \varepsilon)$ va $x = x_0(\varepsilon)$ deb olish kifoya.

2- eslatma. Yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan X to‘plam uchun $\sup X = +\infty (\inf X = -\infty)$ deb hisoblaymiz. Bu yerdagi $+\infty$ (plyus cheksiz) va $-\infty$ (minus cheksiz) simvollar $\boldsymbol{R}$ to‘plamga «$\forall x \in \boldsymbol{R}$ uchun $-\infty < x < +\infty$» degan shart asosida birlashtirilgan xosmas sonlardir. Ushbu $\overline{\boldsymbol{R}} = \{-\infty\} \cup \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ «to‘plam» *haqiqiy sonlarning kengaytirilgan* to‘plami deb ataladi.

Aniq chegara prinsipi. *Agar bo‘sh bo‘lmagan sonli to‘plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda bu to‘plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi mavjud bo‘ladi.*

Isboti. Faraz qilaylik, bo‘sh bo‘lmagan $X (X \subset \boldsymbol{R})$ to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsin. Quyidagi mumkin bo‘lgan ikkita holatni alohida-alohida qaraymiz:

1) $X \cap \boldsymbol{R}_0^+ \neq \varnothing$ ($\boldsymbol{R}_0^+$ — barcha manfiymas haqiqiy sonlar to‘plami) bo‘lsin. Har bir $x \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+$ sonni cheksiz o‘nli kasr shaklida tasvirlab, x sonning butun qismini (ya’ni x dan oshmaydigan eng katta butun sonni) $[x]$ deb,

$$c_0 = \max_{x \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+} [x], \quad X_0 = \left\{ x \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+ \,|\, [x] = c_0 \right\}$$

belgilashlarni kiritamiz (c_0 sonning mavjudligi X to‘plamning yuqoridan chegaralanganligidan kelib chiqadi). So‘ngra barcha $x \in X_0$ sonlarning verguldan keyingi birinchi o‘nli raqamlarining eng kattasini c_1 bilan belgilab, verguldan keyingi birinchi o‘nli raqami c_1 bo‘lgan barcha $x \in X_0$ sonlarni qaraymiz. Bu jarayonni cheksiz (nazariy ravishda) davom ettirib, biror $c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ cheksiz o‘nli kasrni hosil qilamiz. Bu cheksiz o‘nli kasr biror c haqiqiy sonning cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishidagi tasviridir:

$$c = c_0, \ c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$$

Endi $c = \sup X$ ekanini ko‘rsatamiz. Buning uchun aniq chegaraning ikkinchi ta’rifidagi (*a*) va (*b*) shartlarni tekshirish kifoya. Dastlab, $\forall x \in X$ uchun $x \leq c$ bo'lishini ko'rsataylik. $c \geq 0$ bo'lgani sababli, $\forall x \in X$ manfiy haqiqiy son uchun $x < c$ bo'lishi ravshan. Aytaylik, $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+$ bo'lsin. Bu holda $c = c_0, c_1 c_2 \ldots, c_n \ldots,$ sonning tuzilishiga ko'ra $x \leq c$ bo'ladi. Haqiqatan, agar $x > c$ bo'lganida edi, haqiqiy sonlarni taqqoslash qoidasiga binoan shunday k natural son topilar ediki, $x_0 = c_0$, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_{k-1} = c_{k-1}$, $x_k > c_k$ bo'lar edi. Bu esa c sonning tuzilishiga ziddir. Demak, $\forall x \in X$ uchun $x \leq c$ bo'lar ekan. Endi (b) shartni tekshiramiz. Umumiylikka putur yetkazmasdan, c sondan kichik bo'lgan ixtiyoriy

$$x' = x_0', x_1' x_2' \ldots x_n' \ldots \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+$$

sonni qaraymiz (chunki $X \cap \boldsymbol{R}_0^+ \neq \varnothing$ bo'lganligi sababli, $\forall x' \in X$ manfiy haqiqiy son uchun kamida bitta $x \in X \cap \boldsymbol{R}_0^+$ son topiladiki, $x > x'$ bo'ladi). Bu holda, birinchidan, haqiqiy sonlarni taqqoslash qoidasiga ko'ra shunday n indeks topiladiki,

$$x_i' = c_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1), x_n' < c_n \tag{1}$$

bo'ladi. Ikkinchidan, c sonning tuzilishidan ko'rinib turibdiki, shunday $x = x_0, x_1 x_2 \ldots \in X$ son mavjudki,

$$c_i = x_i \ (i = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1), \ c_n = x_n. \tag{2}$$

(1) va (2) ifodalarni bir-biriga taqqoslab, taqqoslash qoidasiga ko'ra $x > x' (x \in X)$ tengsizlikni hosil qilamiz. Bu esa (b) shartning o'rinli ekanini bildiradi.

Shunday qilib, $X \cap \boldsymbol{R}_0^+ \neq \varnothing$ holda $c = \sup X$ sonning mavjudligi isbot qilindi.

2) $X \cap \boldsymbol{R}_0^+ = \varnothing$ bo'lsin. Bu holda X to'plamning barcha elementlari manfiy haqiqiy sonlardan iborat bo'lgani sababli, ularni manfiy cheksiz o'nli kasrlar ko'rinishida tasvirlab va $c_0 = \min\limits_{x \in X}[x]$ deb,

$$X_0 = \{x \in X \mid [x] = c_0\}$$

to'plamni qaraymiz. So'ngra barcha $x \in X_0$ sonlarning verguldan keyingi birinchi o'nli raqamlarining eng kichigini c_1 deb, verguldan keyingi birinchi o'nli raqami c_1 bo'lgan barcha $x \in X_0$ sonlarni qaraymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, $c = -c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots$ haqiqiy sonni hosil qilamiz (agar bu yerda $c = -c_0, c_1c_2 \ldots c_n$ $(c_n \neq 0)$ bo'lsa, uni $c = -c_0, c_1c_2 \ldots c_{n-1}$ $(c_n - 1)$ $999 \ldots$ ko'rinishida ifodalaymiz). Bu holda ham $c = \sup X$ ekanligi xuddi 1- banddagi kabi isbot qilinadi.

Quyidan chegaralangan $X(X \subset \boldsymbol{R},\ X \neq \varnothing)$ to'plamning aniq quyi chegarasining mavjudligi ham xuddi yuqoridagi kabi isbot qilinadi.

Teorema isbot qilindi.

Bu teorema R to'plamning uzliksizligi (to'liqligi)ni tavsiflaydi.

3.2. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar. Dastlab, haqiqiy sonni ratsional sonlar bilan yaqinlashtirish masalasini qaraymiz.

Teorema. *Har qanday x haqiqiy son va oldindan berilgan istalgan musbat ε ratsional son uchun shunday ikkita $\bar{x}_n$ va $\tilde{x}_n$ ratsional son topiladiki,* $\bar{x}_n \le x \le \tilde{x}_n$ $\left(\tilde{x}_n - \bar{x}_n < \varepsilon\right)$ *bo'ladi.*

Isboti. Aniqlik uchun $x \ge 0$ deylik. x sonni

$$x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_n}{10^n} + \ldots$$

$$\left(x_0 \in Z_0, x_i \in \{0;1;2;\ldots,9\}\ (i = 1,2,\ldots)\right)$$

cheksiz o'nli kasr ko'rinishida tasvirlaymiz va $\bar{x}_n = x_0, x_1x_2 \ldots x_n$ va $\tilde{x}_n = \bar{x}_n + 10^{-n}$ deb belgilaymiz. Bu yerdagi $\bar{x}_n$ va $\tilde{x}_n$ ratsional sonlar mos ravishda x haqiqiy sonning n-xonali quyi va yuqori *o'nli yaqinlashuvchilari* deb aytiladi. Ravshanki, $\bar{x}_0 \le \bar{x}_1 \le \ldots \le \bar{x}_n \le \ldots$ va $\tilde{x}_0 \ge \tilde{x}_1 \ge \ldots \ge \tilde{x}_n \ge \ldots$. Haqiqiy sonlarni taqqoslash qoidasidan foydalanib, har qanday n indeks uchun $\bar{x}_n \le x \le \tilde{x}_n$ bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu esa x haqiqiy sonning $\tilde{x}_n - \bar{x}_n = 10^{-n}$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{x}_n$ va $\tilde{x}_n$ ratsional sonlar orasida yotishini bildiradi.

Endi oldindan berilgan ixtiyoriy musbat ε ratsional son uchun $10^{-n} < \varepsilon \left(n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)\right)$ bo'lishini ko'rsatamiz. ε-ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda, ravshanki, $1/\varepsilon$ sondan katta bo'lmagan natural sonlarning soni chekli bo'ladi. Demak, $10^n \leq 1/\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradigan n natural sonlarning soni ham cheklidir. Shunday qilib, shunday n_0 indeks mavjudki, $n \geq n_0$ shartni qanoatlantiradigan barcha n indekslar uchun $10^n > 1/\varepsilon$ yoki $10^{-n} < \varepsilon$ bo'lar ekan, ya'ni $\tilde{x}_n - \bar{x}_n < \varepsilon$. Teorema isbot qilindi.

Haqiqiy sonlar nazariyasining asosiy masalalaridan biri haqiqiy sonlar ustida qo'shish, ko'paytirish amallarini aniqlash va bu amallarning xossalarini o'rganishdan iborat.

Qo'shish. x va y haqiqiy sonlarning $x + y$ *yig'indisi* deb, barcha n indekslar uchun $\bar{x}_n + \bar{y}_n \leq z \leq \tilde{x}_n + \tilde{y}_n$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiradigan z haqiqiy songa aytiladi: $z = x + y$. Bu yerdagi $\bar{x}_n$ va $\bar{y}_n$ $\left(\tilde{x}_n \text{ va } \tilde{y}_n\right)$ ratsional sonlar mos ravishda x va y haqiqiy sonlarning n-xonali quyi (yuqori) o'nli yaqinlashuvchilaridir.

Yig'indini topish amali *qo'shish* deb ataladi.

Ko'paytirish. x va y musbat haqiqiy sonlarning xy *ko'paytmasi* deb, barcha n indekslar uchun $\bar{x}_n\bar{y}_n \leq z \leq \tilde{x}_n\tilde{y}_n$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiradigan z haqiqiy songa aytiladi: $z = xy$. Bu yerda ham $\bar{x}_n$ va $\bar{y}_n$ $\left(\tilde{x}_n \text{ va } \tilde{y}_n\right)$ ratsional sonlar mos ravishda x va y haqiqiy sonlarning n-xonali quyi (yuqori) o'nli yaqinlashuvchilaridir.

Ko'paytmani topish amali *ko'paytirish* deyiladi.

Har qanday $x \in \boldsymbol{R}$ son uchun $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ deb hisoblaymiz.

Ixtiyoriy ishorali x va y haqiqiy sonlarning xy ko'paytmasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$xy = \begin{cases} |x||y| \, (x \text{ va } y \text{ bir xil ishorali}), \\ -|x||y| \, (x \text{ va } y \text{ har xil ishorali}). \end{cases}$$

3- eslatma. $\forall\, x, y \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $x + y$ yig'indi va xy ko'paytmaning mavjudligi va yagonaligini hamda $\boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan qo'shish va ko'paytirish amallarining $\boldsymbol{R}$ ning $\boldsymbol{Q}$ qismida, $\boldsymbol{Q}$ to'plamda aniqlangan xuddi shu nomdagi amallar bilan ustma-ust tushishini ko'rsatish mumkin.

4-§. HAQIQIY SONLARNING ASOSIY XOSSALARI

4.1. Haqiqiy sonlarning asosiy xossalari. Haqiqiy sonlar uchun ratsional sonlarning 2- paragrafda sanab chiqilgan (1°—13°) asosiy xossalarining o'rinli bo'lishini isbot qilish mumkin. 1° xossa 2-paragrafda isbot qilingan edi. 2°—5° xossalar bevosita haqiqiy sonlar yig'indisining ta'rifidan va bu xossalarning ratsional sonlar uchun o'rinli ekanligidan kelib chiqadi.

2°–5° xossalar asosida, qo'shish amaliga teskari amal sifatida, ayirish amalini aniqlash mumkin: $c+b=a$ ko'rinishda aniqlangan c haqiqiy son a va b haqiqiy sonlarning *ayirmasi* deyiladi va $c=a-b$ ko'rinishda yoziladi. Ayirmani topish amali *ayirish* deb ataladi.

2°–5° xossalarga ko'ra

$$c+b=\big(a+(-b)\big)+b\overset{3^\circ,2^\circ}{=}a+\big(b+(-b)\big)\overset{5^\circ}{=}a+0\overset{4^\circ}{=}a$$

bo'lganligi sababli, $a-b=a+(-b)$ deyishimiz mumkin.

Endi ayirmaning yagonaligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $c=a+(-b)$ ayirmadan boshqa yana biror d ayirma mavjud bo'lsin: $d+b=a$. U holda, birinchidan, $(d+b)+(-b)=a+(-b)=c$, ikkinchidan,

$$(d+b)+(-b)\overset{3^\circ}{=}d+\big(b+(-b)\big)\overset{5^\circ}{=}d+0\overset{4^\circ}{=}d$$

Demak, $d=c$.

6°–12° xossalarni ham isbot qilish qiyin emas.

9° xossaga nisbatan quyidagini eslatamiz: agar $a>0$ bo'lsa, a ga teskari bo'lgan a^{-1} haqiqiy sonni, barcha n indekslar uchun $\tilde{a}_n^{-1}\le a^{-1}\le \bar{a}_n^{-1}$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yagona haqiqiy son sifatida aniqlashimiz mumkin: $a^{-1}=\sup\limits_{\tilde{a}_n\ge a}\tilde{a}_n^{-1}$.

Bu yerda a_n va $\tilde{a}_n$ lar mos ravishda $a>0$ haqiqiy sonning n-xonali quyi va yuqori o'nli yaqinlashuvchlaridir.

6°—9° xossalar asosida ko'paytirish amaliga teskari bo'lgan bo'lish amalini aniqlash mumkin. Har qanday x va $y\,(y\ne 0)$ haqiqiy sonlar uchun $zy=x$ shartni qanoatlantiradigan yagona z haqiqiy son mavjud. Bu son x va $y(y\neq 0)$ haqiqiy sonlarning *bo'linmasi* deyiladi va $z=x/y$ ko'rinishda yoziladi.

6°—9° xossalarga ko'ra

$$\left(xy^{-1}\right)y\overset{7^\circ}{=}x\left(y^{-1}y\right)\overset{6^\circ}{=}x\left(yy^{-1}\right)\overset{9^\circ}{=}x\cdot 1\overset{8^\circ}{=}x$$

bo'lganligi sababli, $z=xy^{-1}$ deyishimiz mumkin. Bo'linmaning ta'rifi va 9° xossaga ko'ra, $y\,(y\neq 0)$ haqiqiy songa teskari bo'lgan y^{-1} sonni quyidagicha yozish mumkin: $y^{-1}=1/y\,(y\neq 0)$.

Nihoyat, 13° xossani isbot qilamiz: **oldindan berilgan har qanday a haqiqiy son uchun shunday n natural son topiladiki, $n>a$ bo'ladi.**

Isboti. 1) $a<0$ bo'lsin. Bu holda $1>a$ bo'lgani uchun, isbot talab qilinmaydi.

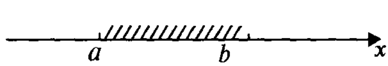
2) $a\geq 0$ bo'lsin. $a=a_0,a_1a_2...a_m...$ deylik. $\boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan qo'shish amali $\boldsymbol{R}$ ning $\boldsymbol{Q}$ qismida barcha ratsional sonlar to'plamida aniqlangan qo'shish amali bilan ustma-ust tushganligi sababli, 1 sonni o'zini-o'ziga n marta qo'shib, n natural sonni hosil qilamiz. Agar $n=a_0+2$ deb olsak, $n>a$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\boldsymbol{R}$ to'plamda taqqoslash, qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari aniqlandi va ularning 1°—13° qonunlarga bo'ysunishi ko'rsatildi. Bu esa haqiqiy sonlar uchun algebraning arifmetik amallar hamda tenglik va tengsizliklar bilan bog'liq bo'lgan barcha qoidalari o'z kuchida qolishini bildiradi.

Pirovardida shuni aytishimiz kerakki, haqiqiy sonlar nazariyasini qurishning cheksiz o'nli kasrlar usulidan boshqa bir-biriga teng kuchli bo'lgan bir necha usullari mavjud. Masalan, uning ratsional sonlar to'plamida kesim tushunchasiga asoslangan Dedekind usulini T.Azlarov va H.Mansurovning «Matematik analiz», I- tom, (Toshkent, 1994), kitobidan qarash mumkin.

4.2. Eng ko'p qo'llaniladigan sonli to'plamlar. Aytaylik, $a, b\in\boldsymbol{R}$ va $a<b$ bo'lsin.

1° **Kesma** (yoki **segment**). $[a, b]=\{x\in\boldsymbol{R}: a\leq x\leq b\}$ to'plamni **kesma** (yoki **segment**) deb ataymiz (7- rasm).

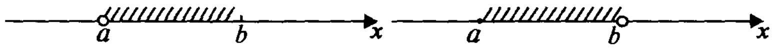


7- rasm.

2° **Ochiq kesma** (yoki *interval*). $(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\}$ to‘plamni *ochiq kesma* (yoki *interval*) deb ataymiz (8- rasm).

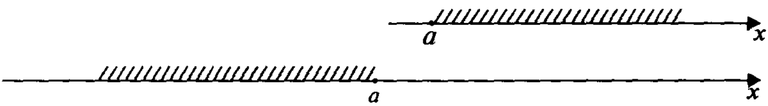
8- rasm.

3° **Yarim ochiq kesma**. $(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R} : a < x \le b\}$, $[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R} : a \le x < b\}$ to‘plamlarni *yarim ochiq kesma* deb ataymiz (9- rasm).



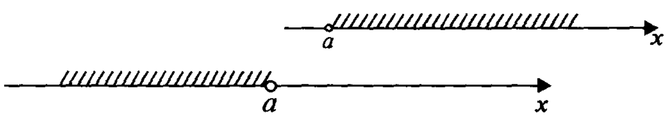
9- rasm.

4° **Yarim to‘g‘ri chiziq** (yoki *nur*). Ushbu $[a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} : x \ge a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \boldsymbol{R} : x \le a\}$ to‘plamlarni *yarim to‘g‘ri chiziq* (yoki *nur*) deb ataymiz (10- rasm).



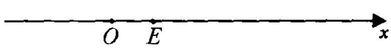
10- rasm.

5° **Ochiq yarim to‘g‘ri chiziq (ochiq nur)**. Ushbu $(a, +\infty) = \{x \in \boldsymbol{R} : x > a\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \boldsymbol{R} : x < a\}$ to‘plamlarni *ochiq yarim to‘g‘ri chiziq* (yoki *ochiq nur*) deb ataymiz (11- rasm).



11- rasm.

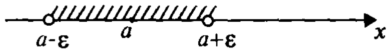
6° **Sonli to‘g‘ri chiziq (son o‘qi)**. Ushbu $(-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$ to‘plamni *sonli to‘g‘ri chiziq* (yoki *son o‘qi*) deb ataymiz (12- rasm).



12- rasm.

7° **Nuqtaning atrofi.** Berilgan a nuqtani o'z ichiga olgan har qanday intervalni *a nuqtaning atrofi* deb ataymiz.

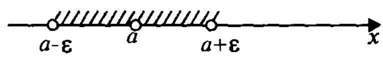
8° **Nuqtaning ε-atrofi.** Ushbu $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)(\varepsilon>0)$ intervalni *a nuqtaning ε-atrofi* deb ataymiz (13- rasm) va $U_\varepsilon(a)$ kabi belgilaymiz: $U_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$.



13- rasm.

9° **Nuqtaning o'yiq ε-atrofi.** Ushbu $U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$ to'plamni *a nuqtaning o'yiq ε-atrofi* deb ataymiz (14- rasm) va $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ belgi bilan belgilaymiz:

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)=(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)=U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}.$$



14- rasm.

4.3. To'plamning limit nuqtasi. Agar a nuqtaning $\forall\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$ atrofida $X\,(X\subset \boldsymbol{R})$ to'plamning kamida bitta elementi mavjud bo'lsa, a nuqta *X to'plamning limit nuqtasi* deb ataladi. To'plamning limit nuqtasi shu to'plamning o'ziga tegishli bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Misollar:

a) $A=\{1/n: n\in N\}$ to'plam yagona $a=0$ limit nuqtaga ega;

b) $[a,\ b]$ segmentga tegishli bo'lgan har bir nuqta $[a,b]$ segmentning limit nuqtasidir.

d) $(a;\ b)$ intervalning barcha limit nuqtalari to'plami $[a,b]$ segmentdan iborat.

e) natural sonlar to'plami limit nuqtaga ega emas.

4.4. Haqiqiy son modulining asosiy xossalari.

1- xossa. $\forall x\in \boldsymbol{R}$ uchun $|x|\ge 0, |x|=|-x|, x\le|x|, -x\le|x|$ bo'ladi. Bu xossaning isboti bevosita modulning ta'rifidan kelib chiqadi.

2- xossa. $|x|\le A \Leftrightarrow -A\le x\le A (A>0)$.

Isboti. **1) Zarurligi.** Faraz qilaylik, $|x|\le A$ bo'lsin (A — biror musbat haqiqiy son). 1- xossaga asosan $-|x|\le x\le|x|$ bo'lganligi sababli, yuqoridagi shartga ko'ra $-A\le x\le A$.

2) Yetarliligi. Faraz qilaylik, $-A \le x \le A(A > 0)$ bo'lsin. $x \ge 0$ va $x < 0$ holatlarni alohida-alohida qaraymiz. Ta'rifga asosan $\forall x \ge 0$ son uchun $|x| = x$ bo'lganligi sababli, $x \le A$ tengsizlikka ko'ra $|x| \le A$ bo'ladi. $x < 0$ holatda esa yana ta'rifga asosan $\forall x < 0$ son uchun $|x| = -x$ bo'lganligi sababli, $x \ge -A$ tengsizlikka ko'ra $|x| \le A$ bo'ladi.

3- xossa. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ va $\forall y \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun $|x+y| \le |x| + |y|$, $|xy| = |x||y|$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Isboti. **1)** $|x+y| \le |x| + |y|$ tengsizlikni isbot qilamiz. $x + y \ge 0$ va $x + y < 0$ holatlarni alohida-alohida qaraymiz. Birinchi holatda, ta'rifga asosan $|x+y| = x + y$ bolib, 1- xossaga ko'ra $\forall x \in \boldsymbol{R}$ uchun $x \le |x|$ va $\forall\, y \in \boldsymbol{R}$ uchun $y \le |y|$ bo'lganligi sababli, $|x+y| \le |x| + |y|$ bo'ladi. Ikkinchi holatda, yana ta'rifga asosan $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$ bo'lib, 1- xossaga ko'ra $\forall x \in \boldsymbol{R}$ uchun $-x \le |x|$ va $\forall\, y \in \boldsymbol{R}$ uchun $-y \le |y|$ bo'lganligi sababli, $|x+y| \le |x| + |y|$ bo'ladi.

2) $|xy| = |x||y|$ tenglikni isbot qilamiz. Bunda ham $xy \ge 0$ va $xy < 0$ holatlarni alohida-alohida qaraymiz. Birinchi holatda, ta'rifga asosan $|xy| = xy$ bo'lib, haqiqiy sonlar ko'paytmasining ta'rifiga ko'ra, $xy \ge 0$ bo'lganda $xy = |x||y|$ bo'lganligi sababli, $|xy| = |x||y|$ bo'ladi. Ikkinchi holatda, yana modulning ta'rifiga asosan $|xy| = -xy$ bo'lib, haqiqiy sonlar ko'paytmasining ta'rifiga ko'ra, $xy < 0$ bo'lganda $-xy = |x||y|$ bo'lganligi sababli, $|xy| = |x||y|$ bo'ladi.

Natija. Har qanday x_1, x_2, ..., x_n haqiqiy sonlar uchun $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, $|x_1 x_2 \ldots x_n| = |x_1||x_2|\ldots|x_n|$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

4- xossa. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ va $\forall y \in \boldsymbol{R}(y \ne 0)$ sonlar uchun $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti.

$$\frac{x}{y} = z \qquad (*)$$

deylik: $x = yz$. Demak, 3- xossadagi ikkinchi munosabatga ko'ra $|x| = |yz| = |y||z|$ yoki $|z| = \frac{|x|}{|y|}$ bo'ladi. Bu yerda (*) tenglikni e'tiborga olsak, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ tenglik hosil bo'ladi.

5- xossa. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ va $\forall y \in \boldsymbol{R}$ sonlar uchun

$$|x-y| \geq |x|-|y|,\ |x-y| \geq ||x|-|y||$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Isboti. Birinchi tengsizlikni isbot qilish uchun x ni $x=(x-y)+y$ ko'rinishida yozib olamiz va 3-xossadagi birinchi munosabatdan foydalanamiz: $|x|=|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$. Bu yerdan $|x-y| \geq |x|-|y|$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi ikkinchi tengsizlikni isbot qilamiz. Yuqorida ko'rsatganimizga asosan

$$|x-y| \geq |x|-|y| \text{ ва } |x-y|=|y-x| \geq |y|-|x|=-(|x|-|y|)$$

yoki $-|x-y| \leq |x|-|y|$. Demak, $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$ yoki 2- xossaga asosan $|x-y| \geq ||x|-|y||$ bo'ladi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Son tushunchasi matematikaning qanday tushunchasi hisoblanadi? Qanday sonlarni bilasiz?
2. Qanday sonlar natural sonlar deb ataladi? Matematik induksiya metodi (usuli) nima?
3. Qanday sonlar butun sonlar deb ataladi?
4. Ratsional son deb nimaga aytiladi?
5. Ratsional sonlar bir-birlari bilan qanday taqqoslanadi?
6. Ratsional sonning moduli (absolut qiymati) deb nimaga aytiladi?
7. Barcha ratsional sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytrish amallari qanday aniqlanadi?
8. Ratsional sonlarning asosiy xossalari deb ularning qanday hossalariga aytiladi?
9. Yuqoridan (quyidan) chegaralangan sonli to'plam deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
10. Aniq chegara prinsipi nima? Isbotlang.
11. Haqiqiy sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari qanday kiritiladi?
12. Haqiqiy sonlarning asosiy xossalari deganda nimani tushunasiz? Ularni sanab chiqing.
13. Eng ko'p qo'llaniladigan qanday sonli to'plamlarni bilasiz? Aytib bering va chizmada tasvirlang.
14. Sonli to'plamning limit nuqtasi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
15. Haqiqiy son modulining asosiy xossalarini aytib bering va isbotlang.

5- §. SONLI KETMA-KETLIKLAR

5.1. Sonli ketma-ketliklar va ular ustida arifmetik amallar. Agar $1, 2, ..., n,...$ natural sonlar qatoridagi har bir n songa aniq qonun bo'yicha biror x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, bu holda $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *sonli ketma-ketlik* (yoki *ketma-ketlik) berilgan* deb aytiladi va qisqacha $\{x_n\}$ belgi bilan belgilanadi. Bu yerdagi x_i $(i = 1, 2, ..., n, ...)$ sonlar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *hadlari*, x_n esa ketma-ketlikning *umumiy hadi* yoki *n-hadi* deb ataladi. Masalan, maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgan $a, a + d,...a + (n-1)d,...$ cheksiz arifmetik progressiya va $a, aq, ..., aq^{n-1},...$ cheksiz geometrik progressiya sonli ketma-ketlikdir. Biz ularni, yuqoridagi kelishuvga binoan mos ravishda $\{a + (n-1) d\}$ va $\{aq^{n-1}\}$ shaklda yozishimiz mumkin. Har bir natural songa $x_n = 1/n$ ratsional sonni mos keltirib, $\{1/n\}$ sonli ketma-ketlikni, yoki $x_n = (1 + (-1)^n)/2$ qonun bo'yicha har bir natural songa $x_n = (1 + (-1)^n)/2$ butun sonni mos qo'yib, $\{(1 + (-1)^n)/2\} : 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ ...$ ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Ketma-ketlikni aniqlovchi moslik *rekurrent* (bu so'z lotincha rekurrens so'zidan olingan bo'lib, o'zbekchada «qaytma», «qaytarma» degan ma'noni anglatadi) *formula* ko'rinishida berilishi ham mumkin. Masalan,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}\left(x_1 = 1\right)$$

rekurrent formula

$$\{x_n\} : 1;\ 2;\ \frac{5}{2};\ \frac{29}{10};...$$

ketma-ketlikni aniqlaydi.

Shuni ham aytishimiz lozimki, ketma-ketlikni aniqlovchi moslik analitik usuldan boshqa usulda ham berilishi mumkin. Masalan, har bir natural songa navbat bilan $\sqrt{2}$ irratsional sonning 1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; 1,41421; ... taqribiy qiymatlarini mos keltirib, $\{x_n\}$: 1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4242; 1.41421; ... ketma-ketlikni hosil qilamiz. Biz matematik analiz kursida asosan analitik usulda berilgan ketma-ketliklar bilan ish ko'ramiz.

Sonli ketma-ketliklar ustida «arifmetik amallar»ni bajarib, yangi sonli ketma-ketliklar hosil qilamiz. Bu amallar quyidagicha kiritiladi. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$ va $\{x_ny_n\}$ ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning *yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi* deb ataladi.

Berilgan ikkita ketma-ketlikka ko'ra ularning yig'indisini, ayirmasini va ko'paytmasini topish amallari mos ravishda ketma-ketliklarni «qo'shish», «ayirish» va «ko'paytirish» deb ataladi.

Ketma-ketliklarni «bo'lish» amali quyidagicha aniqlanadi. Aytaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ($\forall n\in N$ uchun $y_n\neq 0$) ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu $\{x_n/y_n\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\{y_n\}$ ketma-ketlikka «nisbati» deyiladi. Masalan, $\{\sin(\pi/n)\}$ ketma-ketlikning $\{\pi/n\}$ ketma-ketlikka nisbati

$$\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right\}$$

ketma-ketlikdir. Berilgan ikkita ketma-ketlikka ko'ra ularning nisbatini topish amali ketma-ketliklarni «bo'lish» deyiladi.

5.2. Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar. Agar shunday M haqiqiy son (m haqiqiy son) mavjud bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir x_n hadi $x_n\leq M(x_n\geq m)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi. Bu yerda M son (m son) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *yuqori (quyi) chegarasi* deyiladi. Ravshanki, M sondan katta (m sondan kichik) bo'lgan har qanday haqiqiy son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori (quyi) chegarasi bo'la oladi. Yuqoridan (quyidan) chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori (quyi) chegaralarining eng kichigi (eng kattasi) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi* deyiladi va $\sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$) ko'rinishda yoziladi. Masalan,

$$\sup\left\{\frac{1}{n}\right\}=1,\ \inf\left\{\frac{1}{n}\right\}=0.$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $\{(1+(-1)^n)/3\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Haqiqatan, $\forall n \in N$ uchun

$$0 \le \frac{1+(-1)^n}{3} \le \frac{2}{3}.$$

Xuddi shunga o'xshash, $\{1/n\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan, chunki $\forall n \in N$ uchun

$$0 < \frac{1}{n} \le 1.$$

1- eslatma. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, $M = \sup\{x_n\}$ va $m = \inf\{x_n\}$ bo'lsa, u holda $\forall n \in N$ uchun

$$|x_n| \le \max(|M|, |m|) \qquad (1)$$

bo'ladi. Aksincha, agar $\forall n \in N$ uchun (1) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (haqiqiy son modulining 2- xossasiga ko'ra)

$$-\max(|M|, |m|) \le x_n \le \max(|M|, |m|)(n \ge 1)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Bu eslatmaga ko'ra ketma-ketlikning chegaralanganlik tushunchasini quyidagicha ham ta'riflash mumkin: agar shunday $A > 0$ son mavjud bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $|x_n| \le A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chegaralangan* deyiladi.

Endi chegaralanmagan ketma-ketlik tushunchasi bilan tanishamiz. Agar $\forall A > 0$ son uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $|x_{n_0}| > A$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x_{n_0} hadi topilsa, $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chegaralanmagan* deb aytiladi. Masalan, ushbu

$$\{x_n\}: 1;\ 2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 4;\ \ldots;\ 1;\ n;\ \ldots;\ 1;\ n+1;\ \ldots$$

ketma-ketlik chegaralanmagan. Haqiqatan, Arximed aksiomasiga ko'ra $A > 0$ son har qanday bo'lganida ham bu ketma-ketlikning juft o'rindagi hadlari ichida shunday had topiladiki, u A sondan katta bo'ladi.

5.3. Cheksiz katta ketma-ketliklar. Agar $\forall A > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(A) \in N$ topilsaki, $\forall n (n \geq n_0) \in N$ uchun $|x_n| > A$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi. Masalan, $\{n^3\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlikdir. Haqiqatan, ixtiyoriy $A > 0$ son berilgan bo'lsin. Agar $n_0 = [A^{1/3}] + 1$ deb olsak, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $n^3 > A$ bo'ladi: $n^3 \geq n_0^3 = \left(\left[A^{1/3}\right] + 1\right)^3 > \left(A^{1/3}\right)^3 = A$. Bu yerda $[x]$ yozuv x sondan oshmaydigan eng katta butun sonni bildiradi.

1- teorema. *($\{x_n\}$ — cheksiz katta)$\Rightarrow$($\{x_n\}$ — chegaralanmagan).*

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ — ketma-ketlik cheksiz katta bo'lsin. U holda, ta'rifga ko'ra $\forall A > 0$ son uchun (bu son qanchalik katta bo'lmasin) shunday $n_0 = n_0(A)$ natural son topiladiki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|x_n| > A$ bo'ladi. Xususan $|x_{n_0}| > A$. Demak, $\forall A > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(A) \in N$ topiladiki, $|x_{n_0}| > A$ tengsizlik bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanmaganligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

2- eslatma. Umuman aytganda, chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, $\{x_n\}$: 1, 2,1, 3,1, 4, ..., 1, n,1, $n+1$,... ketma-ketlik chegaralanmagan (buni biz yuqorida ko'rgan edik), biroq u cheksiz katta emas, chunki $A>1$ shartni qanoatlantiradigan barcha A sonlar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik $n = 2m+1$ $(m = 0, 1, 2...)$ o'rindagi hadlar uchun o'rinli bo'lmaydi.

Shunday qilib, bu eslatmadan va 1- teoremadan ko'rinib turibdiki, barcha cheksiz katta ketma-ketliklar to'plami barcha chegaralanmagan ketma-ketliklar to'plamining xos qism to'plami ekan.

5.4. Cheksiz kichik ketma-ketliklar va ularning asosiy xossalari. Endi cheksiz kichik ketma-ketlik tushunchasini ta'riflaymiz. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ topilsaki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.* Masalan, ushbu

$$\left\{x_n = \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha > 0\right\}$$

ketma-ketlik cheksiz kichikdir. Haqiqatan, aytaylik ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Bu holda, agar $n_0 = \left[\varepsilon^{-1/\alpha}\right] + 1$ deb olsak, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun

$$|x_n| = \frac{1}{n^{\alpha}} \le \frac{1}{n_0^{\alpha}} = \frac{1}{\left(\left[\varepsilon^{-1/\alpha}\right]+1\right)^{\alpha}} < \frac{1}{\left(\varepsilon^{-1/\alpha}\right)^{\alpha}} = \varepsilon.$$

Biz endi, qulaylik maqsadida, cheksiz kichik ketma-ketliklarning hadlarini α_n va β_n belgilar bilan belgilaymiz.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi asosiy xossalarga ega:

1- xossa. Agar $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik bo'lsa, u holda $\{\alpha_n + \beta_n\}$ va $\{\alpha_n - \beta_n\}$ ketma-ketliklar ham cheksiz kichik bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra, oldindan berilgan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $N_1 = N_1(\varepsilon)$ va $N_2 = N_2(\varepsilon)$ natural sonlarni ko'rsatish mumkin bo'ladiki, $\forall n \ge N_1$ natural son uchun $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ va $\forall n \ge N_2$ natural son uchun $|\beta_n| < \varepsilon/2$ tengsizlik bajariladi. Agarda $n_0 = \max(N_1, N_2)$ deb belgilab olsak, ravshanki, $\forall n \ge n_0$ natural son uchun $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\{\alpha_n + \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi. Xuddi shu singari

$$|\alpha_n - \beta_n| = |\alpha_n + (-\beta_n)| \le |\alpha_n| + |-\beta_n| =$$
$$= |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \, (n \ge n_0).$$

Demak, ta'rifga ko'ra, $\{\alpha_n - \beta_n\}$ ham cheksiz kichik bo'lar ekan.

1- natija. Ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\{\alpha_n^{(1)}\}, \{\alpha_n^{(2)}\}, \ldots, \{\alpha_n^{(s)}\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. U holda oldindan berilgan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday

$$N_1 = N_1(\varepsilon), N_2 = N_2(\varepsilon), N_3 = N_3(\varepsilon), \ldots, N_s = N_s(\varepsilon)$$

natural sonlar topiladiki, $\forall n \ge N_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots, s\})$ natural sonlar uchun $|\alpha_n^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{s}$ $(i = \overline{1, s})$ bo'ladi. Agar $n_0 = \max(N_1, N_2, N_3, \ldots, N_s)$ desak, $\forall n \ge n_0$ natural son uchun

$$\left|\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}+\ldots+\alpha_n^{(s)}\right| \le \left|\alpha_n^{(1)}\right|+\left|\alpha_n^{(2)}\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|\alpha_n^{(s)}\right| < \frac{\varepsilon}{s}+\frac{\varepsilon}{s}+\ldots+\frac{\varepsilon}{s} = s\frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon.$$

bo‘ladi. Bu esa $\left\{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}+\ \ +\alpha_n^{(s)}\right\}$ yig‘indi ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi.

2- xossa. $\left(\{\alpha_n\}\text{-cheksiz kichik}\right) \Rightarrow (\{\alpha_n\}$ – chegaralangan).

Isboti. Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ ixtiyoriy cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsin. U holda, ta’rifga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ topiladiki, $\forall n \ge n_0$ natural son uchun $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Agar $A = \max\left(\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, \left|\alpha_{n_0-1}\right|\right)$ desak, ravshanki, $\forall n \in N$ uchun $|\alpha_n| \le A$ bo‘ladi. Bu esa, ta’rifga ko‘ra, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi.

3- eslatma. Umuman aytganda, chegaralangan ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $\{x_n = (-1)^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan, biroq u cheksiz kichik emas. Haqiqatan, berilgan ketma-ketlikning hadlari -1 va 1 lardan iborat bo‘lganligi uchun u chegaralangan. Bu yerda, cheksiz kichik ketma-ketlik ta’rifidagi ε sonni $\varepsilon = 1$ deb olsak, bu son uchun $|x_n| = \left|(-1)^n\right| < 1\,(n \ge n_0)$ tengsizlikni ma’noli qiluvchi birorta ham n_0 sonni ko‘rsatib bo‘lmaydi, ya’ni $\{(-1)^n\}$ cheksiz kichik emas.

3- xossa. Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi cheksiz kichik bo‘ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lib, $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik bo‘lsin. U holda shunday $A > 0$ son topiladiki, $\forall n \in N$ uchun $|x_n| \le A$ bo‘ladi. Bundan tashqari, $\forall \frac{\varepsilon}{A} > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{A}\right) \in N$ son topiladiki, $\forall n \ge n_0$ natural son uchun $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ bo‘ladi. Demak, $\forall n \ge n_0$ natural son uchun $|x_n \alpha_n| = |x_n||\alpha_n| < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $\{x_n\ \alpha_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.

2- natija. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi cheksiz kichik bo‘ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. Ma’lumki, 2- xossaga asosan $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Demak, 3- xossaga ko‘ra $\{\alpha_n\beta_n\}$ ko‘paytma ketma-ketlik cheksiz kichikdir.

3- natija. Ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklarning ko‘paytmasi cheksiz kichik bo‘ladi.

4- xossa. Agar cheksiz kichik sonli ketma-ketlikning barcha hadlari biror c o‘zgarmas songa teng bo‘lsa, u holda $c = 0$ bo‘ladi.

I s b o t i. Teskarisini faraz qilaylik: $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning barcha hadlari biror c o‘zgarmas songa teng bo‘lib, $c \neq 0$ bo‘lsin. U holda $\varepsilon = |c|/2$ son uchun shunday n_0 natural son topiladiki,

$$|\alpha_n| < \frac{|c|}{2} \quad (n \geq n_0)$$

bo‘ladi. Bu yerdan, $|\alpha_n| = |c| \, (n \geq 1)$ ekanligini e’tiborga olib, ushbu

$$|c| < \frac{|c|}{2} \text{ yoki } 1 < \frac{1}{2}$$

noto‘g‘ri tengsizlikni hosil qilamiz. Bu ziddiyat «$c \neq 0$ bo‘lsin» degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $c = 0$.

5- xossa. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘lsa, u holda $\{1/x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi. Agar cheksiz kichik $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari nuldan farqli bo‘lsa, u holda $\{1/\alpha_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘ladi.

I s b o t i. Aytaylik, $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $\forall A > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(A)$ natural son topilsinki, $n \geq n_0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $\forall n$ natural son uchun $|x_n| > A$ bo‘lsin. Bundan $|1/x_n| < 1/A \, (n \geq n_0)$ tengsizlik kelib chiqadi. Agar $1/A = \varepsilon$ desak, ravshanki, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(1/\varepsilon)$ natural son topiladiki, $n \geq n_0$ shartni qanoatlantiradigan $\forall n \in N$ uchun $|1/x_n| < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra, $\{1/x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.

Endi faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik barcha hadlari nuldan farqli bo‘lgan cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsinki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $0 < |\alpha_n| < \varepsilon$ bo‘lsin. Bundan

$|1/\alpha_n| > 1/\varepsilon\,(n \geq n_0)$ tengsizlik kelib chiqadi. Agar $1/A = \varepsilon$ десак, $|1/\alpha_n| > A\left(n \geq n_0\left(\frac{1}{A}\right)\right)$ bo'ladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $\{1/\alpha_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz katta ekanligini bildiradi.

6 - §. YAQINLASHUVCHI SONLI KETMA-KETLIKLAR VA ULARNING ASOSIY XOSSALARI

6.1. Sonli ketma-ketlikning limiti. Matematik analizning asosiy amallaridan biri *limitga o'tish* amali bo'lib, u analiz jarayonida turli ko'rinishlarda uchraydi. Ularning eng oddiysi, shu bilan birga eng asosiysi, bu — *sonli ketma-ketlikning limiti* ko'rinishidir. Odatda sonli ketma-ketlikning limiti tushunchasi bir-biriga teng kuchli bo'lgan uch xil ko'rinishda ta'riflanadi va analiz jarayonida vaziyatga nisbatan qaysi biri qulay bo'lsa, o'shanisidan foydalaniladi.

1- ta'rif («cheksiz kichik ketma-ketliklar» tilida). Agar berilgan $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun shunday a haqiqiy son topilsaki, $\{x_n - a\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, bu holda $\{x_n\}$ *sonli ketma-ketlik a songa yaqinlashadi* deb aytiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \to a\ (n \to \infty)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi a son $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning* $n \to \infty$ dagi (en cheksizlikka intilgandagi) *limiti* deyiladi (lim belgi «chek» ma'nosini anglatuvchi lotincha limes so'zining birinchi uchta harfidan tashkil topgan).

Masalan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Haqiqatan, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun (Arximed aksiomasiga binoan) shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $n_0 > 1/\varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Bu esa (cheksiz kichik ketma-ketlikning ta'rifiga ko'ra) $\left\{\frac{1}{n}-0\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini, ya'ni $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ sonli ketma-ketlikni 0 songa yaqinlashishini bildiradi.

2- ta'rif («ε — N» tilida). Agar berilgan $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun shunday a haqiqiy son mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ natural sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $\forall n \geq N$ natural son uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda «$\{x_n\}$ *sonli ketma-ketlik a songa yaqinlashadi*» deb aytiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ yoki } x_n \to a\ (n \to \infty)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi a son $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deyiladi.

Masalan, $\forall\alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0. \tag{1}$$

Haqiqatan, ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Ravshanki, agar

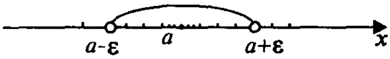
$$N = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right] + 1$$

deb olsak, $\forall n \geq N$ natural son va har qanday $\alpha > 0$ son uchun

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{N^\alpha} = \frac{1}{\left(\left[(1/\varepsilon)^{1/\alpha}\right]+1\right)^\alpha} < \frac{1}{\left((1/\varepsilon)^{1/\alpha}\right)^\alpha} = \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa 2- ta'rifga ko'ra (1) tenglikning o'rinli ekanligini bildiradi.

3- ta'rif (**«ε — atrof» tilida**). Agar berilgan $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun shunday a haqiqiy son mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $\forall n > n_0$ natural son uchun $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bo'lsa, bu holda «$\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik a songa yaqinlashadi» deb aytiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a \ (n \to \infty)$ ko‘rinishda yoziladi. Bu yerdagi a son $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deyiladi (15- rasm).



15- rasm.

1- eslatma. Cheksiz katta ketma-ketliklarni «cheksizlikka yaqinlashuvchi ketma-ketliklar» deb aytish va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ yoki $x_n \to \infty \ (n \to \infty)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikning kamida biror yetarli katta n_0 indeksli x_{n_0} hadidan boshlab, barcha hadlari musbat (manfiy) bo‘lsa, «$\{x_n\}$ *ketma-ketlik musbat cheksizlikka (manfiy cheksizlikka) yaqinlashadi»* deb aytiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ yoki } x_n \to +\infty \ (n \to \infty)$$
$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \text{ yoki } x_n \to -\infty \ (n \to \infty)\right)$$

ko‘rinishda yoziladi. Masalan: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$.

2- eslatma. Quyidagi ekvivalensiya o‘rinli:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right).$$

Isboti.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \left(\{a_n = x_n - a\} - \text{cheksiz kichik}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right).$$

Limitga ega bo‘lmagan ketma-ketliklar va cheksiz katta ketma-ketliklar *uzoqlashuvchi ketma-ketliklar* deyiladi. Masalan, $\left\{(-1)^n\right\}: -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$ sonli ketma-ketlik uzoqlashuvchi ketma-ketlikdir. Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = a$$

chekli limit mavjud bo‘lsin. U holda 2- eslatmaga binoan

$$(-1)^n = a+\alpha_n \quad \left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0\right)$$

deb yozish mumkin. Bundan $\forall n \geq 1$ uchun $\alpha_n = (-1)^n - a$ bo'ladi. Ushbu $\{\alpha_n - \alpha_{n+1}\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. $\{\alpha_n\}$ va $\{\alpha_{n+1}\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo'lgani sababli, ularning ayirmasi $\{\alpha_n - \alpha_{n+1}\}$ ham cheksiz kichik bo'lmog'i lozim. Lekin bu yerda bunday bo'lmaydi, chunki agar $\varepsilon = 1$ desak, $\forall n \geq 1$ uchun $|\alpha_n - \alpha_{n+1}| = 2 > 1 = \varepsilon$ bo'ladi. Bu ziddiyat «$\{(-1)^n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsin» degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $\{(-1)^n\}$ sonli ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'lar ekan.

Endi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning asosiy xossalarini qaraymiz:

6.2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning asosiy xossalari.

1- xossa. *Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik yagona limitga ega.*

Isboti. Faraz qilaylik, yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik ikkita a va b limitga ega bo'lsin: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. U holda 2-eslatmaga binoan $x_n = a+\alpha_n \left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0\right)$ va $x_n = b+\beta_n \left(\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0\right)$. Bu yerdan $\alpha_n = x_n - a$, $\beta_n = x_n - b$ bo'lib, $\{\alpha_n - \beta_n \equiv b-a\}$ bo'ladi. Ma'lumki, agar cheksiz kichik ketma-ketlikning barcha hadlari biror o'zgarmas songa teng bo'lsa, u holda bu o'zgarmas son 0 dan iborat bo'ladi. Demak, $b-a=0$. Bundan $b=a$.

2- xossa. *Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.*

Isboti. Faraz qilaylik, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ chekli limit mavjud bo'lsin. Bu holda sonli ketma-ketlik limitining «$\varepsilon - N$» tilidagi ta'rifiga binoan, $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $\forall n \geq N$ natural son uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ravshanki, $\forall n \geq N$ natural son uchun

$$|x_n| = |(x_n - a)+a| \leq |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|.$$

Agar $A = \max\left(\varepsilon + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\right)$ desak, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $|x_n| \leq A$ bo'ladi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi.

Umuman aytganda, chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Masalan, $\{(-1)^n\}$ sonli ketma-ketlik chegaralangan, lekin u uzoqlashuvchi (biz buni yuqorida ko'rdik).

3- xossa. *Agar* $\{x_n\}$ *va* $\{y_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\{x_n \pm y_n\}$ *va* $\{x_n y_n\}$ *ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi, shu bilan birga*

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ chekli limitlar mavjud bo'lsin. U holda 2- eslatmaga binoan $x_n = a+\alpha_n \left(\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right)$ va $y_n = b+\beta_n \left(\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0\right)$ deb yoza olamiz. Ravshanki, $x_n + y_n = (a+b)+(\alpha_n+\beta_n)$,

$$x_n - y_n = (a-b)+(\alpha_n-\beta_n),\ x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalariga asosan, $\{\alpha_n+\beta_n\}, \{\alpha_n-\beta_n\}$ va $\{a\beta_n - b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ sonli ketma-ketliklar cheksiz kichik ketma-ketliklardir. Demak, 2- eslatmaga ko'ra $x_n + y_n$, $x_n - y_n$ va $x_n y_n$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va ularning limitlari mos ravishda $a+b$, $a-b$ va ab sonlarga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b,\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Bu yerda $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ va $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ekanligini e'tiborga olsak, (2) va (3) formulalar hosil bo'ladi.

4- xossa. *Agar* $\{x_n\}$ *va* $\{y_n\}$ *sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *bo'lsa, u holda biror* n_0 *natural sondan boshlab* $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *ketma-ketlik aniqlangan, shu bilan birga bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi va*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \tag{4}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Dastlab xossaning birinchi qismini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ chekli limit mavjud bo'lsin. U holda $\varepsilon = |b|/2$ son uchun shunday n_0 natural son topiladiki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|y_n - b| < |b|/2$ tengsizlik bajariladi. Ravshanki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|b| = |(b-y_n)+y_n| \leq$ $\leq |b-y_n| + |y_n| < (|b|/2) + |y_n|$. Bundan $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, n_0 natural sondan boshlab $\{1/y_n\}$ ketma-ketlik aniqlangan va u chegaralangan. Ana shu n_0 natural sondan boshlab $\left\{x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right\} \equiv \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ sonli ketma-ketlik aniqlangan deyishimiz mumkin.

Endi xossaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Faraz qilaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ chekli limitlar mavjud bo'lsin. $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ sonli ketma-ketlikning cheksiz kichikligini ko'rsatamiz. 2- eslatmaga ko'ra

$$x_n = a + \alpha_n \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right) \text{ va } y_n = b + \beta_n \left(\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\right)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n}\left(x_n - y_n\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{y_n}\left(a + \alpha_n - \frac{a}{b}(b+\beta_n)\right) = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \beta_n\frac{a}{b}\right)$$

bo'ladi. $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik chegaralangan, $\left\{\alpha_n - \beta_n\frac{a}{b}\right\}$ ketma-ketlik esa cheksiz kichik. Ma'lumki, chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko'paytmasi cheksiz kichik bo'ladi. Demak, ta'rifga ko'ra, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. Bu yerda $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ va $b=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ekanligini e'tiborga olib, (4) formulani hosil qilamiz.

7- §. TENGSIZLIKLARDA LIMITGA O'TISH. ANIQMAS IFODALAR

7.1. Tengsizliklarda limitga o'tish.

1- teorema. *Agar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *chekli limit mavjud va* $\forall n \ge n_0$ *natural son uchun* $x_n \ge b\,(x_n \le c)$ *bo'lsa, u holda,* $a \ge b\,(a \le c)$ *bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, teoremaning shartlari bajarilganda $a<b\,(a>c)$ bo'lsin deylik. U holda $\varepsilon=b-a\,(\varepsilon=a-c)$ son uchun shunday n_0 natural son topiladiki, $\forall n\ge n_0$ uchun $|x_n-a|<b-a(|x_n-a|<a-c)$ bo'ladi. Bundan $x_n-a<b-a$ $(x_n-a>c-a)$ yoki $x_n<b(x_n>c)$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa teoremaning $x_n\ge b\,(x_n\le c)$ degan shartiga ziddir. Bu ziddiyat $a<b\,(a>c)$ degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $a\ge b\,(a\le c)$ bo'lar ekan. Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ chekli limit mavjud va $\forall n\ge n_0$ natural son uchun $x_n > b\,(x_n < c)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $a=b\,(a=c)$ bo'lishi ham mumkin. Masalan, $\forall n \ge 1$ natural son uchun

$$x_n=\frac{1}{n}>0 \quad \left(x_n=-\frac{1}{n}<0\right); \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0\right).$$

1- teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1- natija. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ chekli limitlar mavjud va $\forall n\ge n_0$ natural son uchun $x_n \le y_n$ tengsizlik bajarilsa, u holda $a\le b$ bo'ladi.

Isboti. Shart bo'yicha $y_n - x_n \ge 0\,(n\ge n_0)$ va $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=b-a$.

U holda 1- teoremaga ko'ra $b-a\ge 0$. Bundan $a\le b$ tengsizlik hosil bo'ladi.

2- natija. Agar yaqinlashuvchi ketma-ketlikning barcha hadlari biror kesmada yotsa, u holda uning limiti ham shu kesmada yotadi.

Isboti. Aytaylik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ chekli limit mavjud va $\forall n\ge 1$ natural son uchun $c\le x_n\le d$ bo'lsin. U holda 1- natijaga asosan $a\ge c$ va $a\le d$, ya'ni $c\le a\le d$ bo'ladi.

2- teorema. *Agar* $\{x_n\}$ *va* $\{z_n\}$ *yaqinlashuvchi ketma-ketliklar a limitga ega va* $\forall n \geq n_0$ *natural son uchun* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *tengsizliklar bajarilsa, u holda* $\{y_n\}$ *ketma-ketlik yaqinlashuvchi, shu bilan birga* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, shunday n_0 natural son mavjud bo'lsinki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $x_n \leq y_n \leq z_n$ bo'lsin. Bundan

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a \quad (n \geq n_0)$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Ko'rinib turibdiki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|y_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |z_n - a|)$.

Shartga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday N_1 va N_2 natural sonlar topiladiki,

$$|x_n - a| < \varepsilon (n \geq N_1) \text{ va } |z_n - a| < \varepsilon (n \geq N_2)$$

bo'ladi. Agar bu yerda $N = \max(n_0, N_1, N_2)$ desak, $\forall n \geq N$ natural son uchun $|y_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{y_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi, shu bilan birga $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ ekanligini bildiradi.

Endi shu paytgacha qaralmagan maxsus hollar bilan tanishamiz:

1°. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan,

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$$

ifodadagi ikkinchi ko'paytuvchi (cheksiz katta ketma-ketlikka teskari ketma-ketlik sifatida) cheksiz kichik va $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lganligi sababli, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

2°. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ (a-chekli yoki ∞) va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ bo'ladi.

I s b o t i. Haqiqatan,

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$$

ifodadagi ikkinchi ko'paytuvchi cheksiz katta, birinchi ko'paytuvchi esa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ bo'lganida, cheksiz katta; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0, \infty$ bo'lganida chegaralangan bo'lganligi sababli, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.

7.2. Aniqmas ifodalar.

3°. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, bu holda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o'zgarish xususiyatlarini bilmasdan turib, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlikning limiti haqida biror tayin fikr bildira olmaymiz. Buni quyidagi misollarda tushuntiramiz:

a) $\left\{x_n = \frac{1}{n^2}\right\}$ ning $\left\{y_n = \frac{1}{n}\right\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} \to 0 \ (n \to \infty);$$

b) $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ ning $\left\{y_n = \frac{1}{n^2}\right\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = n\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} \to \infty \ (n \to \infty):$$

d) $\left\{x_n = \frac{2}{n}\right\}$ ning $\left\{y_n = \frac{1}{n}\right\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = 2\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} \to 2 \ (n \to \infty)$$

e) $\left\{x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ ning $\left\{y_n = \frac{1}{n}\right\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}\right\}$ ni qaraylik.

Bu holda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ mavjud emas.

Ko'rinib turibdiki a)—d) misollarning har birida $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lgani bilan, ularning har qaysisida $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketliklarning limitlari turlichadir; hatto e) misolda limit mavjud emas. Shu sababli, agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ifoda $\frac{0}{0}$ *ko'rinishdagi aniqmas ifoda* deyiladi.

1- misol. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1}{1-\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$ limit hisoblansin.

Yechish. $\frac{0}{0}$ shaklida berilgan aniqmaslikni ochamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1}{1-\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}{\left(-\frac{2}{n}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

4°. Agar $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \text{ va } \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$$

bo'lsa, bu holda ham $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o'zgarish xususiyatlarini bilmasdan turib, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ bo'linma ketma-ketlikning limiti haqida aniq bir fikrni bildira olmaymiz. Biz bu holatni quyidagi sodda misollar orqali tushuntirib berishimiz mumkin:

a) $\{x_n = n\}$ ning $\{y_n = n^2\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty);$$

b) $\{x_n = n^2\}$ ning $\{y_n = n\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = n\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty \ (n \to \infty);$$

d) $\{x_n = 5n\}$ ning $\{y_n = n\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = 5\right\}$ ni qaraylik:

$$\frac{x_n}{y_n} = 5 \to 5 \ (n \to \infty);$$

e) $\{x_n = (-1)^{n+1}n\}$ ning $\{y_n = n\}$ ga nisbati $\left\{\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}\right\}$ ning limiti mavjud emas.

Qaralgan a)—d) misollardan ko'rinib turibdiki, ularning har birida $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar cheksiz katta ketma-ketliklar bo'lib, ularning nisbatlarining limitlari turlichadir; hatto oxirgi e) misoldagi nisbat limitga ega emas. Shu sababli, surati ham, maxraji ham cheksiz katta bo'lgan $\frac{x_n}{x_n}$ ifoda $\frac{\infty}{\infty}$ *shakldagi aniqmas ifoda* deyiladi.

2- misol. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt{1+n^2}}$ limit hisoblansin.

Y e c h i s h . Dastlab

$$x_n = 1-2+3-4+...-2n = (1-2)+(3-4)+(5-6)+...+$$
$$+(2n-1-2n) = (-1)+(-1)+...+(-1) = -n, \quad y_n = \sqrt{1+n^2}$$

ekanligini e'tiborga olib, berilgan $\frac{x_n}{y_n}$ ifoda $\frac{\infty}{\infty}$ shaklidagi aniqmas ifoda bo'lishini bilib olamiz. So'ngra

$$y_n=\sqrt{1+n^2}=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

shakl almashtirishni bajarib, mazkur aniqmaslikni ochamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+..-2n}{\sqrt{1+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-1$$

5°. Agar $\{x_ny_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning biri cheksiz kichik, ikkinchisi esa cheksiz katta bo'lsa, bu holda ham $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o'zgarish qonunlarini bilmasdan turib, $\{x_ny_n\}$ ko'paytma ketma-ketlikning limiti haqida biror tayin so'z ayta olmaymiz. Biz buni quyidagi sodda misollar orqali tushuntirib beramiz:

a) $\left\{x_n=\frac{1}{n^2}\right\}$ ning $\left\{y_n=n\right\}$ ga ko'paytmasi $\left\{x_ny_n=\frac{1}{n}\right\}$ ni qaraylik:

$$x_ny_n=\frac{1}{n}\to 0\ (n\to\infty);$$

b) $\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$ ning $\left\{y_n=n^2\right\}$ ga ko'paytmasi $\{x_ny_n=n\}$ ni qaraylik:

$$x_ny_n=n\to+\infty\ (n\to\infty);$$

d) $\left\{x_n=\frac{4}{n}\right\}$ ning $\{y_n=n\}$ ga ko'paytmasi $\{x_ny_n=4\}$ ni qaraylik:

$$x_n\cdot y_n=4\to 4\ (n\to\infty);$$

e) $\left\{x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ ning $\{y_n=n\}$ ga ko'paytmasi $\{x_ny_n=(-1)^{n+1}\}$ ning limiti mavjud emas.

Bu misollardan ayonki, ularning har birida $\{x_ny_n\}$ ko'paytma ketma-ketlikning ko'paytuvchilaridan biri cheksiz kichik, ikkinchisi esa cheksiz katta, lekin $\{x_ny_n\}$ ko'paytma ketma-ketlik har bir misolda turli limitlarga ega; hatto e) misoldagisining limiti mavjud emas. Mazkur holatni tavsiflash maqsadida $x_n y_n$ ifoda $0\cdot\infty$ *shakldagi aniqmas ifoda* deyiladi. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o‘zgarish xususiyatlarini e’tiborga olib, $x_n y_n$ ifodani tekshirish jarayoni $0\cdot\infty$ *shakldagi aniqmaslikni ochish* deb ataladi.

3- misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)(n+1)$ limit hisoblansin.

Yechish. $x_n=\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}$, $y_n=n+1$ deb, berilgan $x_n y_n$ ifodaning $0\cdot\infty$ *ko‘rinishdagi aniqmas ifoda* ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu aniqmaslikni quyidagicha ochamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)(n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}(n+1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

6°. Agar $\{x_n+y_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pm\infty$ va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\mp\infty$ bo‘lsa, bu holda ham biz $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o‘zgarish qonunlarini bilmasdan turib, $\{x_n+y_n\}$ ketma-ketlikning limiti haqida biror tayin so‘z ayta olmaymiz. Biz buni quyidagi sodda misollar orqali tushuntirib beramiz:

a) $\{x_n=2n\}$ va $\{y_n=-n\}$ ning yig‘indisi $\{x_n+y_n=n\}$ ni qaraylik:

$$x_n+y_n=n\to\infty\quad(n\to\infty);$$

b) $\{x_n=n\}$ va $\{y_n=-2n\}$ ning yig‘indisi $\{x_n+y_n=-n\}$ ni qaraylik:

$$x_n+y_n=-n\to-\infty\quad(n\to\infty);$$

d) $\{x_n=n+3\}$ va $\{y_n=-n\}$ ning yig‘indisi $\{x_n+y_n=3\}$ ni qaraylik:

$$x_n+y_n=3\to3\quad(n\to\infty);$$

e) $\{x_n=n+(-1)^{n+1}\}$ va $\{y_n=-n)\}$ ning yig‘indisi $\{x_n+y_n=$ $=(-1)^{n+1}\}$ ning limiti mavjud emas.

Bu misollardan ayonki, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar mos ravishda $+\infty$ ва $-\infty$ ga intilganlari bilan ularning $\{x_n+y_n\}$ yig'indisi a)—d) misollarda turli limitga ega; hatto e) misolda limitga ega emas. Shu sababli, mazkur holda x_n+y_n ifoda $\infty-\infty$ *shakldagi aniqmas ifoda* deyiladi. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning o'zgarish xususiyatlarini e'tiborga olib, x_n+y_n ifodani tekshirish jarayoni $\infty-\infty$ shakldagi aniqmaslikni ochish deb ataladi.

4- misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)$ limit hisoblansin.

Yechish. $x_n=\sqrt{n^2+1}$, $y_n=\sqrt{n^2+n+1}$ deb, berilgan x_n+y_n ifodaning $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmas ifoda ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu aniqmaslikni quyidagicha ochamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}.$$

8- §. MONOTON KETMA-KETLIKNING LIMITI. *e* SONI

8.1. Monoton ketma-ketlik tushunchasi. Ma'lumki, sonli ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishi bu ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. *Monoton ketma-ketliklar* deb ataladigan shunday sonli ketma-ketliklar mavjudki, bu shart ularning yaqinlashishi uchun ham zaruriy, ham yetarli bo'ladi.

1- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n\le\ldots(x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge\ldots)$ shart bajarilsa, bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan, $1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots$ ketma-ketlik o'smaydigan, 1, 1, 2, 2,...*n*, *n*,... ketma-ketlik esa kamaymaydigandir.

2- ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...(x_1 > x_2 > ... > x_n > ...)$ shart bajarilsa, bu holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik *o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ ketma-ketlik kamayuvchi, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ ketma-ketlik esa o'suvchidir.

Kamaymaydigan va o'smaydigan ketma-ketliklar bitta nom bilan *monoton ketma-ketliklar,* o'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar esa *qat'iy monoton ketma-ketliklar* deb ataladi.

8.2. Monoton ketma-ketlikning limiti. Quyidagi teoremalar o'rinli:

1- teorema. *Agar kamaymaydigan yoki o'suvchi (o'smaydigan yoki kamayuvchi) ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik yaqinlashadi. Aks holda, uning limiti* $+\infty$ $(-\infty)$ *ga teng bo'ladi.*

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik bo'lib, u yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsin. Ya'ni shunday A haqiqiy son mavjud bo'lsinki, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $x_n \leq A(x_n \geq A)$ tengsizlik bajarilsin. Ravshanki, $\forall n \geq 1$ natural son uchun, $x_1 \leq x_n \leq A(x_1 \geq x_n \geq A)$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Bu holda aniq chegara prinsipiga ko'ra $\bar{x} = \sup x_n \; (\underline{x} = \inf x_n)$ mavjud. Biz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{x}\right)$$

bo'lishini ko'rsatamiz. Aniq yuqori (aniq quyi) chegaraning ikkinchi ta'rifiga ko'ra, birinchidan $\forall n \geq 1$ natural son uchun

$$x_n \leq \bar{x} \; \left(x_n \geq \underline{x}\right) \text{ yoki } \bar{x} - x_n \geq 0 \; \left(x_n - \underline{x} \geq 0\right) \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchidan, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural sonni ko'rsatish mumkinki, $x_{n_0} > \bar{x} - \varepsilon (x_{n_0} < \underline{x} + \varepsilon)$ bo'ladi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan (o‘smaydigan) bo‘lganligi sababli, $n \geq n_0$ bo‘lganda $x_n \geq x_{n_0}$ $(x_n \leq x_{n_0})$. Demak, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun

$$x_n > \bar{x} - \varepsilon \ \left(x_n < \underline{x} + \varepsilon\right) \text{ yoki } \bar{x} - x_n < \varepsilon \ \left(x_n - \underline{x} < \varepsilon\right) \tag{2}$$

bo‘ladi. (1) va (2) tengsizliklarni birlashtirib, quyidagiga ega bo‘lamiz: $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $0 \leq \bar{x} - x_n < \varepsilon$ $(0 \leq x_n - \underline{x} < \varepsilon)$. Ko‘rinib turibdiki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $-\varepsilon < \bar{x} - x_n < \varepsilon$ $(-\varepsilon < x_n - \underline{x} < \varepsilon)$ yoki $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|\bar{x} - x_n| < \varepsilon$ $\left(|x_n - \underline{x}| < \varepsilon\right)$ tengsizlik bajariladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\bar{x} = \sup x_n$ $\left(\underline{x} = \inf x_n\right)$ songa yaqinlashishini bildiradi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Aytaylik, kamaymaydigan (o‘smaydigan) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo‘lsin. U holda $\forall A > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(A)$ natural son topiladiki, $x_{n_0} > A$ $(x_{n_0} < -A)$ bo‘ladi. Ravshanki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $x_n \geq x_{n_0}$ $(x_n \leq x_{n_0})$. Demak, $\forall A > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(A)$ natural son topiladiki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $x_n > A$ $(x_n < -A)$ tengsizlik bajariladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ bo‘lishini ko‘rsatadi. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Kamaymaydigan yoki o‘suvchi (o‘smaydigan yoki kamayuvchi) sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun bu ketma-ketlikning yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Isboti. 1) **Zarurligi**. Kamaymaydigan yoki o‘suvchi (o‘smaydigan yoki kamayuvchi) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsin. Ma’lumki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi. Demak, $\{x_n\}$ yuqoridan (quyidan) chegaralangan.

2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik, kamaymaydigan yoki o'suvchi (o'smaydigan yoki kamayuvchi) $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsin. U holda yuqorida isbot qilingan 1- teoremaga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi.

8.3. *e* soni. Endi limitga o'tish amali yordamida aniqlanadigan (e son deb ataladigan) yangi son bilan tanishamiz. Ushbu

$$\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbot qilamiz. Dastlab uning o'suvchi ekanligini ko'rsatamiz. Nyuton binomi deb ataladigan ushbu

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} x^{n-m} y^m$$

formula yordamida x_n va x_{n+1} hadlarni quyidagicha tasvirlaymiz:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \frac{1}{n^m} =$$

$$= 2 + \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \qquad (3)$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n+1}\right).$$

Ko'rinib turibdiki, $1 \le m < n$ shartni qanoatlantiradigan $\forall m$ natural son uchun

$$1-\frac{m}{n} < 1-\frac{m}{n+1}$$

va bundan tashqari, x_{n+1} had x_n hadga qaraganda ortiqcha musbat qo'shiluvchilarni o'z ichiga oladi. Demak, $\forall n \ge 1$ natural son uchun $x_n < x_{n+1}$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi. Nihoyat, ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko‘rsatamiz: (3) tenglikdan $\forall n \geq 1$ indeks uchun

$$x_n < 2+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{m!} < 2+\sum_{m=2}^{n}\frac{1}{2^{m-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. Shunday qilib, 1- teoremaga asosan $\left\{x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi. Uning limitini, Eyler (L. Euler) belgilaganidek, e harfi bilan belgilaymiz:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bu sonning irratsional son ekanligi isbotlangan: $e = 2{,}718281828459045...$. Asosi e songa teng bo‘lgan logarifm *natural logarifm* deyiladi va $\ln x$ bilan belgilanadi. Asosi e songa teng bo‘lgan ko‘rsatkichli funksiya *eksponensial funksiya* deb ataladi va e^x yoki $\exp x$ ko‘rinishda yoziladi.

O‘ZINI-O‘ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi va sonli ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar qanday kiritiladi?
2. Chegaralangan ketma-ketlik, chegaralanmagan ketma-ketlik, ketma-ketlikning yuqori (quyi) chegarasi, aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi tushunchalarini ta'riflang. Misollar keltiring.
3. Cheksiz katta ketma-ketlik, cheksiz kichik ketma-ketlik tushunchalarini ta'riflang. Misollar keltiring.
4. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning asosiy xossalarini ayting va isbotlang.
5. Sonli ketma-ketlikning limitini “cheksiz kichik ketma-ketliklar tilida”, “ε-N”tilida va “ε-atrof” tilida ta'riflang va ularning ekvivalentligini isbotlang.
6. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning asosiy xossalarini aytib bering. Cheksiz katta ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
7. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladimi?
8. «Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi» deb ayta olamizmi? Isbotlang.
9. Tengsizliklarda limitga o‘tish mumkinmi?

10. Oraliq o‘zgaruvchi limiti haqidagi teoremani ayting va isbotlang.

11. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmas ifodalarni misollar bilan tushuntirib bering.

12. Monoton ketma-ketlik deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

13. Monoton ketma-ketlikning limitga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti nima? Isbotlang.

14. e soni deb nimaga aytiladi? Isbotlang.

9- §. QISMIY KETMA-KETLIKLAR. YUQORI VA QUYI LIMITLAR

9.1. Qismiy ketma-ketliklar. Aytaylik,

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots,\ x_n, \ldots \tag{1}$$

sonli ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Hadlari natural sonlardan iborat bo‘lgan ixtiyoriy

$$k_1,\ k_2,\ k_3, \ldots,\ k_n, \ldots \tag{2}$$

o‘suvchi ketma-ketlikni qaraymiz. (1) ketma-ketlikning $x_{k_m} (m = 1, 2, \ldots n \ldots)$ hadlarini tanlab, ularni (2) ketma-ketlikning hadlari qay tartibda joylashgan bo‘lsa, shu tartibda joylashtirib, ushbu $\{x_{k_n}\}$:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3} \ldots, x_{k_n}, \ldots$$

sonli ketma-ketlikni hosil qilamiz. Bu ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy ketma-ketligi* deyiladi. Masalan, barcha juft natural sonlardan tuzilgan 2, 4, 6, ..., $2n$, ... ketma-ketlik barcha natural sonlardan tuzilgan 1, 2, 3, ..., n, ... ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligidir. Yoki $\{x_n = (-1)^n\}$ sonli ketma-ketlikni qaraylik. Ravshanki, -1, -1, ..., -1, ... va 1, 1, ..., 1, ... ketma-ketliklar $\{x_n = (-1)^n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklaridir.

Har bir $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikni o‘zining qismiy ketma-ketligi deb aytish mumkin.

1 - teorema. *Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning har qanday $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi, shu bilan birga $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tenglik orinli bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ chekli limit mavjud bo'lsin. Bu holda ta'rif bo'yicha, $\forall\varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural sonni ko'rsatish mumkinki, $\forall n \geq n_0$ natural son uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Faraz qilaylik, $\{x_{k_m}\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi bo'lsin. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $\forall n \geq n_0$ uchun $k_n \geq k_{n_0}$ va $k_{n_0} \geq n_0$ ekanligini e'tiborga olsak, yuqorida aytilganga ko'ra $\forall k_n \geq k_{n_0}$ natural son uchun $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini, shu bilan birga

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

bo'lishini ko'rsatadi.

2- teorema. *Agar ketma-ketlik cheksiz katta bo'lsa, u holda uning har qanday qismiy ketma-ketligi cheksiz katta bo'ladi.*

Bu teorema xuddi 1- teorema singari isbot qilinadi.

Shuni aytish lozimki, berilgan ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa ham uning qismiy ketma-ketliklari limitga ega bo'lishlari mumkin. Masalan, $\{x_n = (-1)^n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas, biroq uning $\{x_{2n} \equiv 1\}$ va $\{x_{2n-1} \equiv -1\}$ qismiy ketma-ketliklari mos ravishda 1 va -1 limitlarga ega.

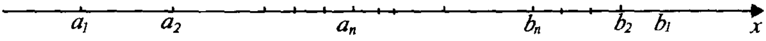
Endi chex matematigi B.Boltsano (1781—1848) va nemis matematigi K.Veyershtrass (1815—1897) ga mansub bo'lgan quyidagi muhim teoremani isbot qilamiz.

Boltsano-Veyershtrass teoremasi. *Har qanday chegaralangan sonli ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Bu teoremani isbot qilish uchun dastavval «ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma» deb ataluvchi lemmani isbot qilamiz.

Lemma. Agar $\{[a_n; b_n]\}$ kesmalar ketma-ketligi $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$ shartni qanoatlantirsa, u holda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $c \in [a_n; b_n]$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko‘ra $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ sonli ketma-ketliklar mos ravishda kamaymaydigan va o‘smaydigan ketma-ketliklardir (16- rasm).



16- rasm.

Bundan tashqari, ko‘rinib turibdiki, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $a_n < b_n$. Demak, $\forall n \geq 1$ uchun $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$. Bu tengsizliklar $\{a_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan b_1 bilan, $\{b_n\}$ ketma-ketlikning quyidan a_1 son bilan chegaralanganligini ko‘rsatadi. Shunday qilib, monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko‘ra $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi ekan. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

bo‘lsin. $\forall n \geq 1$ uchun $a_n < b_n$ bo‘lgani sababli, tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga ko‘ra $a \leq b$ bo‘ladi. Demak, $\forall n \geq 1$ uchun $a_n \leq a \leq b \leq b_n$. Bu esa a va b nuqtalarning ($a = b = c$ bo‘lishi ham mumkin) barcha $[a_n;\ b_n]$ kesmalarga tegishli bo‘lishini ko‘rsatadi.

Boltsano-Veyershtrass teoremasining isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsin. Ma’lumki, bu holda shunday A>0 son topiladiki, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $|x_n| \leq A$ tengsizlik bajariladi, ya’ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari $[-A,\ A]$ kesmada yotadi. Qulaylik maqsadida $-A = a_1$, $A = b_1$ deb belgilaylik. $[a_1,\ b_1]$ kesmani $\frac{a_1+b_1}{2}$ nuqta yordamida teng ikkiga bo‘lamiz. Ravshanki,

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

kesmalarning kamida bittasida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlari yotadi. Aytaylik, ana shu kesma $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ bo‘lsin. Uni $[a_2,\ b_2]$ deb belgilaylik. Endi $[a_2,\ b_2]$ kesmani $\frac{a_2+b_2}{2}$ nuqta yordamida yana teng ikkiga bo‘lamiz va

$$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad \left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$$

kesmalarning qaysi birida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotgan bo'lsa, o'sha kesmani $[a_3, b_3]$ deb belgilaymiz va bu jarayonni cheksiz (nazariy) davom ettiramiz. Natijada ichma-ich joylashgan $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz. Ravshanki, $[a_n, b_n]$ kesmaning uzunligi quyidagiga teng:

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Demak, ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemmaga ko'ra shunday c nuqta mavjudki, $\forall n \geq 1$ uchun $a_n \leq c \leq b_n$ bo'ladi. Endi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning c songa yaqinlashadigan $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketligini tuzamiz: x_{k_1} had sifatida $\{x_n\}$ ning ixtiyoriy hadini, x_{k_2} sifatida $\{x_n\}$ ning $[a_2, b_2]$ kesmada yotgan k_2 —hadini ($k_2 > k_1$) va hokazo, $\{x_{k_n}\}$ had sifatida $\{x_n\}$ ning $[a_n, b_n]$ kesmada yotgan k_n — hadini ($k_n > k_{n-1}$) tanlaymiz va hokazo. Shunday qilib, $\forall n \geq 1$ uchun $a_n \leq x_{k_n} \leq b_n$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$ bo'lishini ko'rsatamiz. Ma'lumki, $\forall n \geq 1$ uchun $a_n \leq c \leq b_n$. Demak, $\forall n \geq 1$ uchun

$$0 \leq \left|c - x_{k_n}\right| \leq b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Bundan, tengsizliklarda limitga o'tish qoidasiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = c$ tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

9.2. Limit nuqtalar. Yuqori va quyi limitlar. Endi sonli ketma-ketlikning ***limit nuqtasi*** tushunchasi bilan tanishamiz. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning biror $\{x_{k_m}\}$ qismiy ketma-ketligi biror a songa yaqinlashsa, bu holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limit nuqtasi* deb ataladi. Masalan, $\{x_n = (-1)^n\}$ sonli ketma-ketlikning ikkita -1 va 1 limit nuqtalari bor. Ular mos ravishda $\{x_{2n-1} \equiv -1\}$ va $\{x_{2n} \equiv 1\}$ ketma-ketliklarning limitlaridir.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin. Uning limit nuqtalari to'plamini A bilan belgilaylik. Boltsano-Veyershtrass teoremasiga asosan $A \neq \varnothing$, ya'ni A to'plam bo'sh to'plam emas. Bundan tashqari, A to'plam chegaralangan. Haqiqatan, agar barcha hadlari $|x_n| \leq M$ shartni qanoatlantiradigan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketligi biror a limitga ega bo'lsa, u holda $|a| \leq M$ bo'ladi (chunki $|x_{k_n}| \leq M$). Shunday qilib, bo'sh bo'lmagan A sonli to'plam, ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanganligi sababli, aniq chegara prinsipiga ko'ra $\overline{x} = \sup A$, $\underline{x} = \inf A$ aniq chegaralar mavjud. $\overline{x} \in A$ va $\underline{x} \in A$ ekanligini isbot qilish mumkin.

Ta'rif. $\overline{x} = \sup A$ va $\underline{x} = \inf A$ sonlar mos ravishda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning *yuqori limiti* va *quyi limiti* deyiladi. Bu yerda A to'plam $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha limit nuqtalari to'plamidir. Odatda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ (yoki $\lim_{n\to\infty} \sup x_n$) quyi limiti esa $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ (yoki $\lim_{n\to\infty} \inf x_n$) kabi belgilanadi. Masalan,

$$2,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{n+1}{n},\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ravshanki, $A = \{0;\ 1\}$. Demak,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0.$$

Eslatma. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ ($\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$) deb yoziladi.

3- teorema. *Sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi hamda quyi va yuqori limitlarining bir-biriga teng bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsin. Bu holda, ma'lumki, $\{x_n\}$ chegaralangan va (1- teoremaga ko'ra) uning barcha qismiy limitlari $\lim_{n\to\infty} x_n$ ga teng bo'ladi. Demak, xususan, $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan va $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ shart bajarilsin. U holda, ko'rsatish mumkinki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab barcha hadlari (ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun) $(\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - \varepsilon,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \varepsilon)$ oraliqda yotadi. Shart bo'yicha $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$ bo'lgani uchun bu oraliqni $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ deb yozish mumkin. Demak, sonli ketma-ketlik limitining «ε—atrof» tilidagi ta'rifiga ko'ra a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi. Shunday qilib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi. Teorema isbot qilindi.

10- §. YAQINLASHISH PRINSIPI

10.1. Fundamental ketma-ketlik tushunchasi. Bu tushuncha quyidagicha ta'riflanadi.

1- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\forall n \geq N$ va $\forall p$ natural son uchun $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan,

$$\left\{x_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\sin m}{m^2}\right\}$$

sonli ketma-ketlik fundamental ketma-ketlikdir. Haqiqatan, $\forall n$ va p natural son uchun

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{\sin m}{m^2}\right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{|\sin m|}{m^2} \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{m(m-1)} =$$

$$= \sum_{m=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Aytaylik, ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Agar $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ desak, $\forall n \geq N$ natural son uchun $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\left(n \geq N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$.

Demak, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ natural son mavjudki, $\forall n \geq N$ va p natural son uchun $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa 1- ta'rifga ko'ra berilgan ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik ekanligini bildiradi.

Analiz jarayonida ko'pincha ketma-ketlikning fundamentalligi tushunchasining (yuqoridagi ta'rifga teng kuchli bo'lgan) quyidagi ta'rifidan ham foydalaniladi:

2- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\forall n > N$ va $\forall m > N$ natural sonlar uchun $|x_n - x_m| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

Lemma. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental va ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Bu holda 2- ta'rifga ko'ra, berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topiladiki, $\forall n > N$ va $\forall m > N$ natural sonlar uchun $|x_n - x_m| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar bu yerda $m = N + 1$ deb olsak, $\forall n \geq N$ natural son uchun $|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon$ bo'ladi. Endi x_n hadni quyidagicha ifodalaylik: $x_n = (x_n - x_{N+1}) + x_{N+1}$. U holda $\forall n \geq N$ natural son uchun $|x_n| \leq |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < \varepsilon + |x_{N+1}|$ bo'ladi. Agarda $M = \max(\varepsilon + |x_{N+1}|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|)$ desak, $\forall n \geq 1$ natural son uchun $|x_n| \leq M$ bo'ladi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi.

10.2. Yaqinlashish prinsipi. Endi sonli ketma-ketlik yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini ifodalovchi va fanda **Koshi kriteriyasi** (yoki **yaqinlashish prinsipi**) deb yuritiladigan quyidagi muhim teoremani isbot qilamiz. Uning muhimligi shundaki, bu yerda sonli ketma-ketlikning yaqinlashishi ketma-ketlik hadlarining ichki qonuniyatlariga asosan aniqlanadi.

Koshi kriteriyasi. *Sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun bu ketma-ketlikning fundamental bo'lishi zarur va yetarli.*

I s b o t i. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik biror a songa yaqinlashsin. U holda ta'rifga ko'ra $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$ son uchun shunday $N = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ natural son topiladiki, $\forall n \geq N$ natural son uchun $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. Demak, $\forall n > N$ va $\forall m > N$ natural sonlar uchun

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bu esa, 2- ta'rifga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini bildiradi.

2) Y e t a r l i l i g i. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik fundamental bo'lsin. U holda yuqorida isbot qilingan lemmaga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Demak, Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra undan biror a songa yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda, ta'rifga ko'ra, $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$ son uchun shunday N_1 natural son topiladiki, $\forall n \geq N_1$ natural son uchun

$$|x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

tengsizlik bajariladi, chunki $k_n \geq n$ $(n \geq 1)$.

Yana $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan foydalanamiz, ya'ni $\{x_n\}$ fundamental bo'lganligi sababli, ta'rifga ko'ra, $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0$ son uchun shunday N_2 natural son topiladiki, $\forall m > N_2$ va $\forall n > N_2$ natural sonlar uchun $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. Bu yerda $m = k_n$ deb olsak, $\forall n > N_2$ natural son uchun

$$|x_n - x_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Nihoyat, $N = \max(N_1, N_2)$ desak, $\forall n > N$ natural son uchun ((1) va (2) tengsizliklarga ko'ra)

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a)| \le |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa ta'rifga binoan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning a songa yaqinlashishini ko'rsatadi. Teorema isbot qilindi.

Yaqinlashish prinsipini amaliyotda ham qo'llash mumkin. Masalan,

$$\left\{x_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos m}{2^m}\right\}$$

sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash talab qilingan bo'lsin. Buning uchun uning fundamental yoki fundamental emasligini ko'rsatish kifoya. Ravshanki, $\forall n$ va p natural son uchun

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{\cos m}{2^m}\right| \le \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{|\cos m|}{2^m} \le \sum_{m=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n}.$$

Agar ε ni ixtiyoriy musbat son deb olsak, u holda

$$n > N = \left[\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}\right]$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $\forall n$ natural son uchun $2^{-n} < \varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\forall n > N$ va p natural son uchun $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}$ — fundamental. Bu esa yaqinlashish prinsipiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Qismiy ketma-ketlik deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'ladi-mi?
3. Cheksiz katta ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-ketligi cheksiz katta bo'ladi, deb ayta olamiz-mi?

4. Uzoqlashuvchi ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari yaqinlashuvchi bo'lishlari mumkin-mi?
5. Chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin-mi?
6. Ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemmada nima deyiladi?
7. Sonli ketma-ketlikning limit nuqtasi va yuqori (quyi) limiti tushunchalarini ta'riflang.
8. Chegaralangan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti nima?
9. Fundamental ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
10. Fundamental ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi-mi?
11. Kema-ketlikning fundamentalligi uning yaqinlashishi uchun zaruriy va yetarli shart bo'la oladi-mi?

11- §. FUNKSIYA

11.1. O'zgaruvchi miqdorlar orasida funksional bog'lanish. Biz moddiy dunyoning u yoki bu tabiiy (fizik, kimyoviy, biologik, iqtisodiy va hokazo) jarayonini o'rganish paytida turli o'zgaruvchi miqdorlarni uchratamiz. Kuzatuvlar shuni ko'rsatadiki, har bir tabiiy jarayon biri qolganlarining o'zgarishiga bog'liq ravishda o'zgaradigan bir nechta o'zgaruvchi miqdor bilan tavsiflanadi. Eng oddiy tabiiy jarayon biri ikkinchisiga bog'liq ravishda o'zgaradigan ikkita o'zgaruvchi miqdor bilan tavsiflanadi. Masalan, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tekis harakatini qaraylik. Bu jarayon $s = vt$ qonun bilan bog'langan ikkita t va s o'zgaruvchi miqdor bilan xarakterlanadi. Bu yerda: v — o'zgarmas tezlik, t — vaqt, s — yo'l. Ko'rinib turibdiki, t vaqtning orta borishi bilan bosib o'tilgan s yo'l ham orta boradi. Yoki massalarning butun olam tortishish qonunini eslaylik. Bu qonun *Nyuton formulasi* deb ataladigan

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

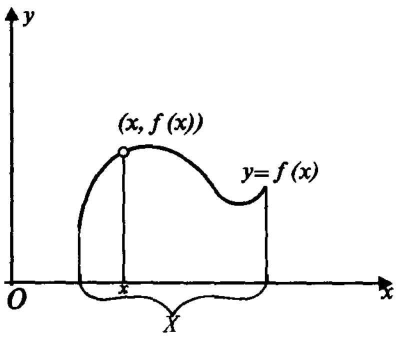
formula bilan ifodalanadi. Bu yerda: k — gravitatsion doimiy; m_1 va m_2 — tortishuvchi jismlarning massalari; r — tortishuvchi jismlar orasidagi masofa, F esa tortishuvchi jismlar tortishish kuchining miqdoridir. Bu jarayon ham ikkita r va F o'zgaruvchi miqdorlar bilan xarakterlanadi. Ravshanki, r ning kattalasha borishi bilan, F o'zgaruvchi miqdorning qiymatlari kichiklasha boradi. Bu kabi misollarni fan va texnikaning turli sohalaridan juda ko'plab keltirishimiz mumkin. Bunday hollarda matematiklar «o'zgaruvchi miqdorlar orasida funksional bog'lanish mavjud» deb aytadilar. Funksional bog'lanishning mantiqiy modeli — *funksiya* tushunchasidir.

11.2. Funksiya tushunchasi. O'zgarish sohasi (to'plami)$X(X \subset \boldsymbol{R})$ bo'lgan x o'zgaruvchi berilgan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar x o'zgaruvchining har bir $x \in X$ qiymatiga aniq f qoida yoki qonun bo'yicha bitta y haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, bu holda X to'plamda *f funksiya aniqlangan (berilgan)* deb aytiladi va $y=f(x)(x \in X)$ ko'rinishda yoziladi.

Bu yerdagi X to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi (to'plami),* $y_0=f(x_0)$ son f funksiyaning $x_0 \in X$ nuqtadagi *qiymati,* $Y=\{y: y=f(x),\ x \in X\}$ to'plam f funksiyaning *o'zgarish sohasi* (yoki *qiymatlari to'plami*) deb ataladi. Bundan tashqari, x — *erkli o'zgaruvchi (yoki funksiyaning argumenti)*, y esa *erksiz o'zgaruvchi* (yoki x *o'zgaruvchining funksiyasi*) deyiladi. Odatda f funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari mos ravishda $D(f)$ va $E(f)$ belgi (simvol)lar bilan belgilanadi va $y=f(x)$ funksional bog'lanishdan aniqlanadi.

Teskari funksiya tushunchasi. Aytaylik, $y=f(x)$ $(x \in X)$ funksiya berilgan bo'lib, har bir $y \in Y=\{y: y=f(x),\ x \in X\}$ songa, $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan bitta $x \in X$ haqiqiy son mos kelsin. U holda, y o'zgaruvchining har bir $y \in Y$ qiymatiga $f(x)=y$ shartni qanoatlantiradigan $x \in X$ haqiqiy sonni mos qo'yib, Y to'plamda $x=f^{-1}(y)$ funksiyani aniqlashimiz mumkin. Bu funksiya $y=f(x)$ funksiyaga *teskari* bo'lgan *funksiya* deb ataladi. Ko'rinib turibdiki, $y=f(x)$ funksiya $x=f^{-1}(y)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyadir. Shuning uchun f va f^{-1} funksiyalar *o'zaro teskari funksiyalar* deb ataladi. Masalan, $y=2x$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya $x=\frac{1}{2}y$ funksiyadir. Odatda, qulaylik maqsadida, oxirgi ifodadagi x va y larning vazifalarini almashtirib, $y=2x$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya $y=\frac{1}{2}x$ ko'rinishda yoziladi; $y=a^x(0<a \neq 1)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiya $x=\log_a y$ funksiyadir. Yoki, oxirgi ifodadagi x va y larning vazifalarini almashtirsak, $y=\log_a x$ bo'ladi. Shunday qilib, ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar o'zaro teskari funksiyalardir.



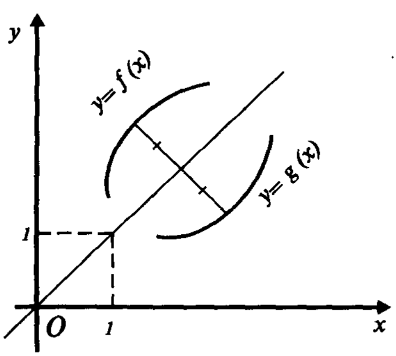
17- rasm.

Funksiyani ko‘rgazmali tasvirlash maqsadida funksiya grafigi tushunchasidan foydalaniladi. Aytaylik, $y=f(x)$ $(x\in X)$ funksiya berilgan bo‘lib, tekislikda xOy to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari tizimi (sistemasi) o‘rnatilgan bo‘lsin.

2- ta'rif. xOy koordinat tekislikning $(x,\ f(x))(x\in X)$ nuqtalaridan tashkil topgan

$$G=\{(x,\ y): y=f(x),\ x\in X\}$$

to‘plam $y=f(x)$ $(x\in X)$ funksiyaning *grafigi* deb ataladi (17- rasm).



18- rasm.

O‘zaro teskari bo‘lgan $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalarning grafiklari har doim birinchi va uchinchi koordinat burchaklar bissektrisasiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi (18- rasm).

Amaliyotda uchraydigan funksiyalar asosan *analitik usulda* (ya'ni formula ko‘rinishida), *jadval usulida* va *grafik usulida* beriladi.

Funksiyaning analitik usulda berilishiga misol qilib maktab kursidan ma'lum bo‘lgan asosiy elementar funksiyalarni aytish mumkin:

1) $y=C$ (C — o‘zgarmas son) — *o‘zgarmas funksiya;*

2) $y=x^{\alpha}$ (α — haqiqiy son) — *darajali funksiya;*

3) $y=a^{x}$ $(0<a\neq 1)$ — *ko‘rsatkichli funksiya;*

4) $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ — *logarifmik funksiya;*

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ y=\sin x, \\ 6)\ y=\cos x, \\ 7)\ y=\mathrm{tg}\ x, \\ 8)\ y=\mathrm{ctg}\, x, \end{array}\right\} \text{— } \textit{trigonometrik funksiyalar;}$$

$$\left.\begin{array}{l}9)\ y = \arcsin x,\\ 10)\ y = \arccos x,\\ 11)\ y = \operatorname{arctg} x,\\ 12)\ y = \operatorname{arcctg} x\end{array}\right\} \text{— } \textit{teskari trigonometrik funksiyalar.}$$

Bu funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini, grafiklarini siz maktab kursidan yaxshi bilasiz.

Shuni aytish lozimki, bitta funksiyaning o'zi, o'z aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar orqali berilishi ham mumkin. Masalan,

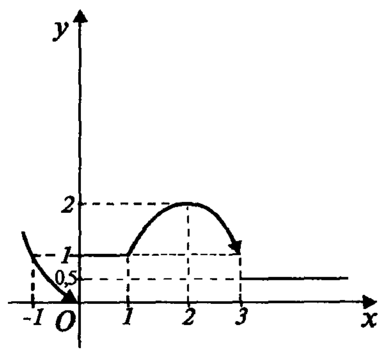
$$y = f(x) = \begin{cases} x^2\ (x < 0), \\ 1\ (0 \le x \le 1), \\ 1 + \sqrt{1-(x-2)^2}\ (1 < x < 3), \\ \frac{1}{2}\ (x \ge 3). \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 19-rasmda tasvirlangan.

Funksiyaning analitik usulda berilishi turli-tuman ekanini ko'rsatish maqsadida yana bir nechta misol keltiramiz:

Signum-funksiya. Quyidagi

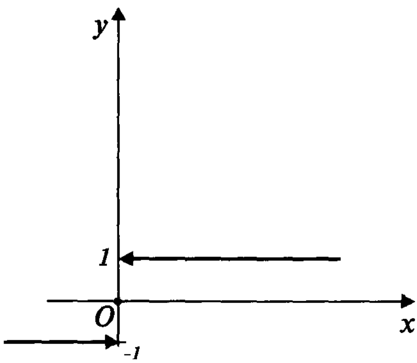
$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1\ (x < 0), \\ 0\ (x = 0), \\ 1 (x > 0) \end{cases}$$



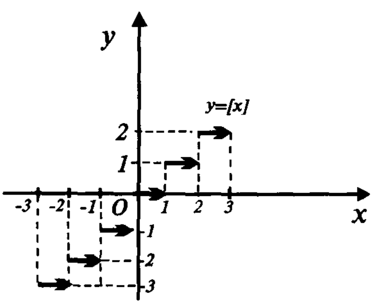
19- rasm.

tengliklar bilan aniqlangan funksiya *signum-funksiya* deb ataladi. Bu yerdagi sign lotincha signum (ishora) so'zining birinchi to'rtta harfidan tashkil topgan; $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{-1;0;1\}$ (20- rasm).

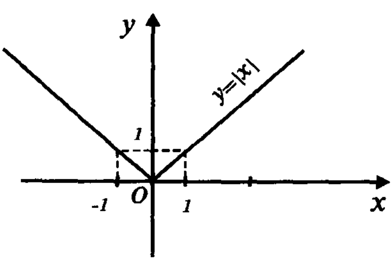
Ante-funksiya. Har bir x haqiqiy songa shu sonning butun qismini mos qo'yuvchi $y = [x]$ funksiya *ante-funksiya* deb ataladi. Bu yerdagi ante so'zi fransuzcha Entier (butun) so'zidan olingan.



20- rasm.



21- rasm.



22- rasm.

Ante-funksiyaning grafigi 21-rasmda tasvirlangan; $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \boldsymbol{Z}$.

Modul-funksiya. Har bir x haqiqiy songa shu sonning modulini (absolut qiy*matini)* mos qo‘yuvchi funksiyani *modul-funksiya* deb ataymiz va uni $y = |x|$ ko‘rinishda yozamiz. Bu funksiyaning grafigi 22- rasmda tasvirlangan; $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = = R_0^+ = [0; +\infty)$.

Dirixle funksiyasi. Har bir ratsional songa 1 sonni va har bir irratsional songa 0 sonni mos qo‘yuvchi funksiya *Dirixle funksiyasi* deb ataladi va $y = D(x)$ ko‘rinishda yoziladi:

$$y = D(x) = \begin{cases} 1\,(x - \text{ratsional son}), \\ 0\,(x - \text{irratsional son}). \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X = \boldsymbol{R}$, o‘zgarish sohasi esa $Y = \{0;\ 1\}$ (L.Dirixle (1805—1859) — nemis matematigi).

Funksiyaning jadval usulida berilishiga misol qilib, temir yo‘l shoh bekatlarida ilib qo‘yilgan poyezdlar harakati jadvalini aytish mumkin. Bu jadval yordamida harakatdagi poyezdning qaysi vaqtda, qaysi aholi punktiga yetib kelishini aniqlash mumkin. Funksiyaning jadval usulida berilishidan, ayniqsa, tajriba o‘tkazuvchi tadqiqotchilar ko‘p foydalanadilar.

Funksiyaning grafik usulda berilishiga ossillografda chizilgan grafiklar misol bo‘ladi. Bunday grafiklar yordamida u yoki bu jarayonning xususiyatlari o‘rganiladi va tegishli xulosalar chiqariladi. Bu usuldan ko‘pincha fiziklar va shifokorlar foydalanadilar.

Matematik analiz kursida asosan analitik usulda berilgan funksiyalar qaraladi.

11.3. Funksiyalarning tengligi. Agar $\forall x \in X$ nuqtada $f(x) = g(x)$ bo‘lsa, bu holda f va g funksiyalar X to‘plamda bir-biriga *teng* deb aytiladi.

Masalan, $y = x$ va $y = |x|$ funksiyalar $X = [0; +\infty)$ to‘plamda bir-biriga teng.

11.4. Funksiyalar ustida arifmetik amallar. Aytaylik, X $(X \subset \boldsymbol{R})$ to‘plamda f va g funksiyalar aniqlangan bo‘lsin. Har bir $x \in X$ haqiqiy songa bitta $y = f(x) + g(x)$ haqiqiy sonni mos qo‘yuvchi funksiya f va g *funksiyalarning yig‘indisi* deyiladi va $y = f(x) + g(x)$ $(x \in X)$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, $y = x + \log_3 x$ $(x \in X = (0; +\infty))$.

Avval aytganimizdek, amaliyotda $y = f(x) + g(x)$ yig‘indi funksiyaning aniqlanish sohasi bo‘lgan X to‘plam $y = f(x) + g(x)$ funksional bog‘lanishdan topiladi: $X = D(f) \cap D(g)$.

Masalan, $y = \sqrt{2 - x} + \log_3(x - 1)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $X = D\left(\sqrt{2 - x}\right) \cap D\left(\log_3(x - 1)\right) = (-\infty; 2] \cap (1; +\infty) = (1; 2]$ bo‘ladi.

Ikkita funksiyaning ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi ham xuddi yuqoridagi kabi aniqlanadi:

$$y = f(x) - g(x), \quad y = f(x)g(x), \quad y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(oxirgisida $g(x) \neq 0$).

Berilgan funksiyalarga ko‘ra ularning yig‘indisini, ayirmasini, ko‘paytmasini va bo‘linmasini topish amallari funksiyalarni *qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish* va *bo‘lish* deb ataladi.

11.5. Murakkab funksiya tushunchasi. $y = f(t)$ $(t \in T)$ va $t = g(x)$ $(x \in X)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $E(g) \subset T$ bo‘lsin.

3- ta’rif. Agar har bir $x \in X$ haqiqiy songa bitta $y = f(g(x))$ haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda $y = f(g(x))$ *murakkab funksiya aniqlangan* deb aytamiz. Masalan, har bir $x \in (0; +\infty)$ haqiqiy songa bitta $y = \sin(\lg x)$ haqiqiy sonni mos qo‘yish mumkin bo‘lganligi sababli, $X = (0; +\infty)$ to‘plamda $y = \sin(\lg x)$ murakkab funksiya aniqlangan deb ayta olamiz.

4- ta'rif. Har bir $x\in X$ haqiqiy songa bitta $f(g(x))$ haqiqiy sonni mos qo'yuvchi funksiya (ya'ni murakkab funksiya) f va g funksiyalarning *kompozitsiyasi* (yoki *superpozitsiyasi*) deb ataladi va $y=f(g(x))(x\in X)$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, agar $f(x)=x+1$ va $g(x)=\frac{1}{x}$ desak,

$$f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+1$$

bo'ladi. Agar f va g funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lsa, u holda $f(g(x))=g(f(x))=x$ bo'ladi. Umuman aytganda, $f(g(x))\neq g(f(x))$. Masalan, yuqoridagi misolda $f(g(x))=\frac{1}{x}+1$ bo'lib $g(f(x))=\frac{1}{x+1}$ bo'ladi.

Xuddi yuqoridagi kabi, n ta funksiyaning superpozitsiyasini ham aniqlash mumkin: $y=f_1(f_2(...(f_n(x))...))$.

Masalan,

$$f(x)=2x-1,\quad g(x)=x^3+1,\quad h(x)=\frac{1}{x}$$

funksiyalarning $f(g(h(x)))$ superpozitsiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$f(g(h(x)))=f\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)=f\left(\frac{1}{x^3}+1\right)=2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)-1=\frac{2}{x^3}+1.$$

11.6. Elementar va noelementar funksiyalar. Asosiy elementar funksiyalar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va superpozitsiyalash amallarini chekli son marta bajarish natijasida hosil bo'lgan funksiyalar *elementar funksiyalar* deb ataladi. Masalan,

$$y=2\operatorname{tg}x^2+3^{\sin x}\sqrt{\log_2(5-x)}-7$$

funksiya elementar funksiyadir. Ushbu $y=|x|$ funksiya ham elementar funksiya bo'ladi, chunki $|x|=\sqrt{x^2}$ deb yozish mumkin.

Elementar bo'lmagan funksiyalar *noelementar funksiyalar* deyiladi. Bunday funksiyalar asosan matematik analizni o'rganish jarayonida kelib chiqadi va o'rganiladi. Masalan, yuqorida keltirilgan signum-funksiya, ante-funksiya, Dirixle funksiyasi va o'z aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar bilan berilgan ko'pchilik funksiyalar noelemantar funksiyalardir.

11.7. Giperbolik funksiyalar. Amaliyotda ba'zan (giperbolik funksiyalar deb ataladigan) quyidagi funksiyalarni ham uchratish mumkin:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — } \textit{giperbolik sinus,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — } \textit{giperbolik kosinus,}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ — } \textit{giperbolik tangens,}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ — } \textit{giperbolik kotangens,}$$

Bu funksiyalarning birinchi uchtasi son o'qining hamma joyida, to'rtinchisi esa $X = R\backslash\{0\}$ to'plamda aniqlangan.

Quyidagi ayniyatlar o'rinli:

$$\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

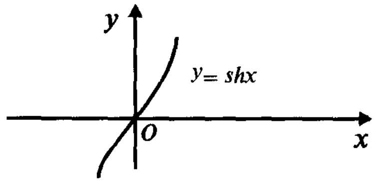
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

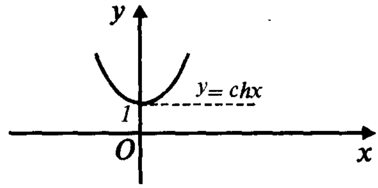
$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Bu ayniyatlarning isboti bevosita giperbolik funksiyalarning ta'riflaridan kelib chiqadi.

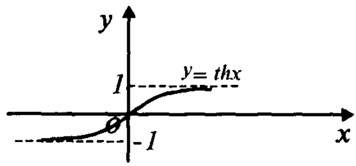
Eslatma. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalar $x^2 + y^2 = 1$ birlik aylanani qarashdan qanday qoidalar bo'yicha hosil bo'lgan bo'lsa, $y = \operatorname{sh} x$ va $y = \operatorname{ch} x$ funksiyalar ham $x^2 - y^2 = 1$ teng yonli giperbolani qarashdan xuddi o'sha qoidalar bo'yicha hosil bo'ladi. Shuning uchun bu funksiyalar *giperbolik funksiyalar* deb ataladi. Ularning grafiklari 23—28- rasmlarda tasvirlangan:



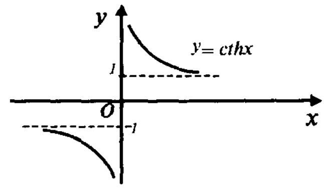
23- rasm.



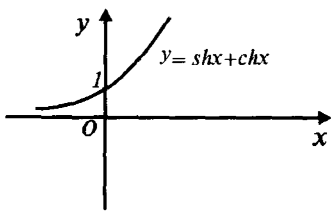
24- rasm.



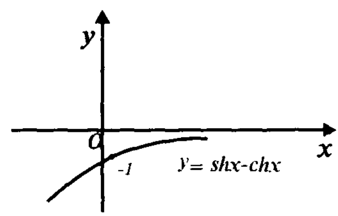
25- rasm.



26- rasm.



27- rasm.



28- rasm.

O‘ZINI-O‘ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. O‘zgaruvchilar orasidagi funksional bog‘lanish deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. Funksiya va teskari funksiya tushunchalarini ta'riflab bering.
3. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi? Teskari funksiya grafigi qanday chiziladi?
4. Funksiya qanday usullarda beriladi? Har bir usulni sharhlab bering va misollar keltiring.
5. Funksiyalarning tengligi va ular ustida arifmetik amallar qanday aniqlanadi?
6. Murakkab funksiya deb nimaga aytiladi? Funksiyalarning superpozisiyasi (yoki kompozisiyasi) nima?
7. Elementar va noelementar funksiya deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
8. Giperbolik funksiyalarni bilasiz-mi? Sanab chiqing, grafiklarini chizib ko‘rsating.

12- §. FUNKSIYANING LIMITI

12.1. Funksiyaning limiti. Biz shu vaqtgacha sonli ketma-ketliklarning limitlari nazariyasini o'rgandik. Endi ana shu ma'lumotlar asosida ketma-ketlikka qaraganda umumiyroq bo'lgan obyektning — funksiyaning (sonli ketma-ketlikni *natural argumentli funksiya* deb qarash mumkin) limiti tushunchasini o'rganamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X ($X \subset \boldsymbol{R}$) to'plamda aniqlagan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi (ya'ni a nuqtaning har qanday atrofida X to'plamning a nuqtadan farqli kamida bitta elementi bor) bo'lsin. Bu yerda $a \in X$ yoki $a \notin X$ bo'lishi mumkin.

Biz $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi (aniqrog'i, $x \to a$ dagi) limiti tushunchasi bilan tanishamiz. Bu tushuncha ikki xil ko'rinishda (nemis matematigi G. Geyne (1821—1881) bo'yicha va Koshi bo'yicha) ta'riflanadi.

1- ta'rif (Geyne). Agar shunday b son mavjud bo'lib, x argumentning $x_n \in X$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$) qiymatlaridan tuzilgan va $x_n \to a$ ($n \to \infty$) shartni qanoatlantiradigan har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, bu holda b son $f(x)$ *funksiyaning* a nuqtadagi *limiti* (yoki x argument a ga intilgandagi *limiti*) deyiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{yoki} \quad f(x) \to b (x \to a)$$

ko'rinishda yoziladi. Masalan,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = -\frac{1}{2}.$$

Haqiqatan,

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$$

funksiya $X=(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$ to'plamda aniqlangan; $x=0$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi va $0\in X$. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x argumentning $x_n\in X$ qiymatlaridan tuzilgan va $x_n\to 0$ $(n\to\infty)$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlikka

$$\left\{f(x_n)=\frac{x_n^2-x_n+1}{x_n-2}\right\}$$

sonli ketma-ketlik mos keladi. Demak, yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning asosiy xossalariga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-x_n+1}{x_n-2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^2-x_n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2-\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-\lim\limits_{n\to\infty} 2}=\frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2-0+1}{0-2}=\frac{0^2+1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

Shunday qilib, 1- ta'rifga asosan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+1}{x-2}=-\frac{1}{2}.$$

Endi 1- ta'rif yordamida $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limitga ega emasligini ko'rsatamiz. Berilgan funksiya $X=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ to'plamda aniqlangan va $0\notin X$. x argumentning X to'plamga tegishli bo'lgan qiymatlaridan tuzilgan va 0 songa yaqinlashuvchi ikkita

$$\left\{x_n=\frac{1}{n\pi}\right\},\quad \left\{x_n'=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$$

sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\pi n=\lim_{n\to\infty}0=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Demak, funksiya limitining Geyne bo‘yicha ta’rifiga binoan $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limit mavjud emas.

2- ta’rif (Koshi). Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo‘lib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall x \in X$ nuqtada $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda b son $f(x)$ *funksiyaning* a nuqtadagi *limiti* (yoki x argument a ga intilgandagi *limiti*) deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ yoki $f(x) \to b(x \to a)$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Haqiqatan, aytaylik, ε son ixtiyoriy musbat son bo‘lsin. Agar bu yerda $\delta = \varepsilon$ deb olsak, $|x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x sonlar uchun $|x-a| < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu esa, 2- ta’rifga ko‘ra, a son $f(x) = x$ funksiyaning a nuqtadagi limiti ekanini ko‘rsatadi.

1- eslatma. (1- ta’rif)$\Leftrightarrow$(2- ta’rif).

Isboti. (1- ta’rif)$\Rightarrow$(2- ta’rif). Haqiqatan, aytaylik, (1- ta’rif) $\not\Rightarrow$ (2- ta’rif) bo‘lsin. Ya’ni shunday $\varepsilon > 0$ son mavjud bo‘lib, $\forall\delta > 0$ son uchun shunday $x' \in \{x : 0 < |x - a| < \delta\} \subset X$ nuqta topilsinki, $|f(x') - b| \geq \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin.

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0 \quad (\delta_n > 0) \tag{*}$$

shartni qanoatlantiruvchi $\{\delta_n\}$ sonli ketma-ketlikni olamiz. Har bir δ_n son uchun shunday $x_n (0 < |x_n - a| < \delta_n)$ topiladiki, $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ bo‘ladi. Yuqoridagi (*) shartga ko‘ra, $0 < |x_n - a| < \delta_n$ tengsizliklardan (tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga binoan) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ tenglik kelib chiqadi. $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ bo‘lgani uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashmaydi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ shartga ziddir. Demak, (1- ta’rif)$\Rightarrow$(2- ta’rif).

Endi (2- ta’rif) $\Rightarrow$ (1- ta’rif) implikatsiyani isbot qilamiz. Faraz qilaylik, 2- ta’rif o‘rinli bo‘lib, $\{x_n\}(x_n \neq a)$ ketma-ketlik $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin. U holda 2- ta’rifdagi $\delta > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\delta)$

natural son topiladiki, $\forall n > n_0$ uchun $0 < |x_n - a| < \delta$ bo'ladi. Bu holda $|f(x) - b| < \varepsilon$ shartga ko'ra, $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik uchun $|f(x_n) - b| < \varepsilon (n > n_0)$ bo'ladi. Bu esa $f(x_n) \to b (n \to \infty)$ ekanligini ko'rsatadi. Demak, (2- ta'rif)$\Rightarrow$(1- ta'rif).

Endi funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi ($x \to \infty$ dagi) limiti tushunchasini ta'riflaymiz:

3- ta'rif (Geyne). Faraz qilaylik, shunday $c > 0$ son mavjud bo'lib, $f(x)$ funksiya $X_c = \{x: |x| > c\}$ ($X_c \subset \boldsymbol{R}$) to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo'lsaki, x argumentning $x_n \in X_c$ qiymatlaridan tuzilgan, $x_n \to \infty (n \to \infty)$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall \{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ tenglik bajarilsa, b son $f(x)$ *funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi* ($x \to \infty$ dagi) *limiti* deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{yoki} \quad f(x) \to b (x \to \infty)$$

ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2$. Haqiqatan, $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ funksiya $X = \boldsymbol{R} \backslash \{-1\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ shartni qanoatlantiradigan $\forall \{x_n\}$ ($x_n \in X$) sonli ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+3}{x_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x_n}}{1+\frac{1}{x_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{x_n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{x_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

4- ta'rif (Koshi). Faraz qilaylik, shunday $c > 0$ son mavjud bo'lib, $f(x)$ funksiya $X_c = \{x : |x| > c\} \subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo'lib, $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $A = A(\varepsilon) (A > c)$ son topilsaki, $|x| > A$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x$ uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ *funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi* ($x \to \infty$ dagi) *limiti* deyiladi va

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{yoki} \quad f(x) \to b \quad (x \to \infty)$$

ko'rinishda yoziladi.

Masalan, yuqorida qaralgan limitni qaraylik:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2. \tag{*}$$

Haqiqatan, aytaylik, ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda $|x| > A = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall x$ nuqtada

$$\left|\frac{2x+3}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$$

bo'ladi, chunki $|x| > A = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lganda,

$$\left|\frac{2x+3}{x+1} - 2\right| = \frac{1}{|x+1|} \le \frac{1}{|x|-1} < \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon}-1} = \varepsilon.$$

Bu esa 4- ta'rifga binoan (*) tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

2- eslatma. (3- ta'rif)$\Leftrightarrow$(4- ta'rif).

Bu eslatma 1- eslatma kabi isbotlanadi.

Nihoyat, quyidagi maxsus hollarni qaraymiz:

5- ta'rif (Koshi). Agar $\forall E > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(E) > 0$ son topilsaki, $\forall x \in \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ uchun $|f(x)| > E$ ($f(x) > E$ yoki $f(x) < -E$) tengsizlik bajarilsa, «x argument a ga intilganda $f(x)$ funksiya cheksizlikka (musbat cheksizlikka yoki manfiy cheksizlikka) intiladi» deb aytiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{yoki} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty\right)$$

ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty. \qquad (**)$$

Haqiqatan, E ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x\in\{x: 0<|x-1|<\delta\}$ uchun

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{|1-x|^2}>\frac{1}{\delta^2}.$$

Agar bu yerda $\delta=\frac{1}{\sqrt{E}}$ deb olinsa, u holda $\forall x\in\{x: 0<|x-1|<\delta\}$ uchun ushbu $\frac{1}{(1-x)^2}>E$ tengsizlik bajariladi. Bu esa 5- ta'rifga ko'ra (**) tenglikning to'g'riligini bildiradi.

6- ta'rif (Koshi). Aytaylik, shunday $c>0$ son mavjud bo'lib, $f(x)$ funksiya $X_c=\{x: |x|>c\}\subset \boldsymbol{R}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar $\forall E>0$ son berilganda ham shunday $A=A(E)$ $(A>c)$ son topilsaki, $\forall x\in\{x: |x|>A\}\subset \boldsymbol{R}$ uchun $|f(x)|>E(f(x)>E$ yoki $f(x)<-E)$ tengsizlik bajarilsa, «x argument cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiya cheksizlikka (musbat cheksizlikka yoki manfiy cheksizlikka) intiladi» deb aytiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad \left(\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty \ \text{ yoki } \ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty\right)$$

ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$. Haqiqatan, E ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Ravshanki, $\forall x\in\{x: |x|>A\}$ uchun $x^2=|x|^2>A^2$. Agar bu yerda $A=\sqrt{E}$ deb olinsa, $\forall x\in\{x: |x|>A\}\subset \boldsymbol{R}$ uchun $x^2>E$ tengsizlik bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$ ekanini bildiradi.

12.2. Koshi sharti. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $\forall x'\in\{x: 0<|x-a|<\delta\}$ va $\forall x''\in\{x: 0<|x-a|<\delta\}$ sonlar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, «*$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada Koshi shartini qanoatlantiradi*» deb aytiladi.

Masalan, $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ funksiya $x=1$ nuqtada Koshi shartini qanoatlantiradi. Haqiqatan, $D(f)=\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$ bo'lib, $x=1$ nuqta $D(f)$ to'plamning limit nuqtasi ekanligi ravshan. Aytaylik, ε ixtiyoriy musbat son bo'lib, $x'\in\{x:0<|x-1|<\delta\}$ va $x''\in\{x:0<|x-1|<\delta\}$ lar ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. Bu yerda δ bilan hozircha noma'lum bo'lgan (ε ga bog'liq) sonni belgiladik. U holda

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{x'^2-1}{x'-1}-\frac{x''^2-1}{x''-1}\right|=|x'+1-x''-1|\le$$
$$\le|x'-1|+|1-x''|<\delta+\delta=2\delta.$$

Agar $2\delta=\varepsilon$ yoki $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ deb olinsa, $\forall x'\in\{x:0<|x-1|<\delta\}$ va $\forall x''\in\{x:0<|x-1|<\delta\}$ nuqtalar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa, ta'rifga ko'ra, $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ funksiyaning $x=1$ nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishini bildiradi.

Endi $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (a — chekli) limitning mavjudligi masalasini qaraymiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya biror X ($X\subset\boldsymbol{R}$) to'plamda aniqlangan bo'lib, $x=a$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinli:

Koshi kriteriyasi. $f(x)$ *funksiyaning* $x=a$ *nuqtada limitga ega bo'lishi uchun bu funksiyaning* a *nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.*

I s b o t i. 1) **Zarurligi.** Faraz qilaylik, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ chekli limit mavjud bo'lsin. U holda funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga asosan, $\forall\frac{\varepsilon}{2}>0$ son berilganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topiladiki, $0<|x'-a|<\delta$ bo'lganda $|f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ va, $0<|x''-a|<\delta$ bo'lganda $|f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Demak, $\forall x'\in\{x:0<|x-a|<\delta\}$ va $\forall x''\in\{x:0<|x-a|<\delta\}$ nuqtalar uchun $|f(x')-f(x'')|=|f(x')-b+b-f(x'')|\le|f(x')-b|+|b-f(x'')|<$ $<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada Koshi shartini qanoatlantirishini bildiradi.

2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik, $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsinki, $\forall x'\in\{x: 0<|x-a|<\delta\}$ va $\forall x''\in\{x: 0<|x-a|<\delta\}$ nuqtalar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ bo'lsin, ya'ni $f(x)$ funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantirsin. $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x argumentning qiymatlaridan tuzilgan, a songa yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlikka $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik mos keladi. $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlikdir. Haqiqatan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a(x_n\neq a)$ bo'lganligidan, ketma-ketlik limitining «$\varepsilon-N$» tilidagi ta'rifiga ko'ra, yuqoridagi ε uchun topilgan $\delta>0$ uchun shunday $n_0=n_0(\delta)$ natural son topiladiki, $n\geq n_0$ bo'lganda

$$0<|x_n-a|<\delta \tag{1}$$

bo'ladi. Bu holda ravshanki, $\forall n\geq n_0$ va $\forall p$ natural sonlar uchun

$$0<|x_{n+p}-a|<\delta \tag{2}$$

bo'ladi. Koshi shartiga ko'ra (1) va (2) tengsizliklardan $\forall n\geq n_0$ va $\forall p$ natural sonlar uchun $|f(x_{n+p})-f(x_n)|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning fundamental ekanligini bildiradi. Demak, sonli ketma-ketlik yaqinlashishining Koshi kriteriyasiga binoan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

Endi x argumentning qiymatlaridan tuzilgan, a songa yaqinlashuvchi $\forall\{x_n\}(x_n\neq a)$ sonli ketma-ketliklarga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketliklarning yagona limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{x_n'\}$ ketma-ketliklar x argumentning qiymatlaridan tuzilgan, a songa yaqinlashuvchi $(x_n\neq a, x_n'\neq a)$ ixtiyoriy ikkita ketma-ketlik bo'lsin. Ularga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ va $\{f(x_n')\}$ ketma-ketliklar, yuqorida ko'rganimizdek, yaqinlashuvchidir: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$ va $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=b'\cdot b'=b$ ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun, a songa yaqinlashuvchi $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikka $f(x_1), f(x_1'), f(x_2),\ f(x_2'), \ldots, f(x_n), f(x_n'), \ldots$ sonli ketma-ketlik mos keladi va u, yuqorida isbot qilganimizga ko'ra, yaqinlashuvchi bo'ladi. Ma'lumki, yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning barcha qismiy ketma-ketliklari yaqinlashuvchi va ularning limitlari bir-biriga teng bo'ladi. Shuning uchun $b' = b$, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Shunday qilib, funksiya limitining Geyne bo'yicha ta'rifiga asosan $f\,(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada limitga ega ekan.

Koshi kriteriyasi isbot qilindi.

3- eslatma. Funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqtada limitga ega bo'lishining Koshi kriteriyasi quyidagilardan iborat:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ chekli limitning mavjud bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarli: $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $A = A(\varepsilon)$ son topiladiki, $x' > A$ va $x'' > A$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\forall x'$ va $\forall x''$ sonlar uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ chekli limitning mavjud bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarli: $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $A = A(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $x' < -A$ va $x'' < -A$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\forall x'$ va $\forall x''$ sonlar uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'ladi.

Bu kriteriyalar ham xuddi $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjudligining (a — chekli) Koshi kriteriyasi kabi isbot qilinadi.

13- §. FUNKSIYANING LIMITI HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR

13.1. Funksiyaning limiti haqidagi asosiy teoremalar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X ($X \subset \boldsymbol{R}$) to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.*

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ chekli limit mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2 (b_1 \neq b_2)$ bo'lsin. $b_2 = b_1$ ekanini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x argumentning qiymatlaridan tuzilgan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a (x_n \neq a)$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonli ketma-ketlik bo'lsin. Unga $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik mos keladi va farazimizga muvofiq, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b_2$ va $b_1 \neq b_2$. Bundan, 1- ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limitning mavjud emasligi kelib chiqadi. Bu ziddiyat farazimizning noo'rin ekanligini ko'rsatadi. Demak, $b_2 = b_1$. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Agar $X (X \subset R)$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ funksiyalar* (oxirgisida $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ va $\forall x \in X$ uchun $g(x) \neq 0$) *a nuqtada limitga ega, shu bilan birga*

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \tag{3}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ chekli limitlar mavjud bo'lsin. Bu holda, 1- ta'rifga muvofiq, x argumentning qiymatlaridan tuzilgan hamda $\lim\limits_{x\to a} x_n = a (x_n \neq a)$ shartni qanoatlantiradigan $\forall \{x_n\}$ sonli ketma-ketlikka mos keladigan $\{f(x_n)\}$ va $\{g(x_n)\}$ sonli ketma-ketliklar mos ravishda b va c sonlarga yaqinlashadi:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = c.$$

Ma'lumki, agar ikkita sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, bu holda ularning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi (oxirgisida mahrajdagi sonli ketma-ketlikning limiti nuldan farqli deb faraz qilinadi) ham yaqinlashuvchi bo'ladi, shu bilan birga ularning limitlari mos ravishda berilgan ketma-ketliklarning limitlarining yig'indisiga, ayirmasiga, ko'paytmasiga va bo'linmasiga teng bo'ladi. Demak,

$$\{f(x_n)+g(x_n)\},\ \{f(x_n)-g(x_n)\},\ \{f(x_n)\cdot g(x_n)\},\ \left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$$

sonli ketma-ketliklar mos ravishda

$$b+c,\ b-c,\ b\cdot c,\ \frac{b}{c}$$

(oxirgisida $c\neq 0$) sonlarga yaqinlashadi. Bu esa, funksiya limitining Geyne bo'yicha ta'rifiga ko'ra,

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)),\ \lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)),\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

limitlarning mavjudligini hamda ular uchun (1)-(3) formulalarning o'rinli bo'lishini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x)\quad (C=\mathrm{Const}).$$

I s b o t i. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ mavjud bo'lib, $C=$ *Const* bo'lsin. U vaqtda $\lim\limits_{x\to a}C=C$ ekanligini e'tiborga olsak, (2) formuladan

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=\lim_{x\to a}C\lim_{x\to a}f(x)=C\lim_{x\to a}f(x)$$

kelib chiqadi. Natija isbot qilindi.

3- t e o r e m a. *Aytaylik, $f(x)$, $\eta(x)$, $g(x)$ funksiyalar biror $X(X\subset R)$ to'plamda aniqlangan va $f(x)$, $g(x)$ funksiyalar a nuqtada chekli limitga ega bo'lsin. U holda:*

a) *agar $\forall x\in X$ uchun $f(x)\le g(x)$ (yoki $f(x)<g(x)$) tengsizlik bajarilsa, $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$ bo'ladi;*

b) *agar* $\forall x \in X$ *uchun* $f(x) \le \eta(x) \le g(x)$ *va* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *bo'lsa,* $\eta(x)$ *funksiya* a *nuqtada limitga ega, shu bilan birga* $\lim\limits_{x\to a}\eta(x) = b$ *bo'ladi.*

I s b o t i. Aytaylik, x argumentning qiymatlaridan tuzilgan hamda a nuqtaga yaqinlashadigan $\{x_n\}$ $(x_n \ne a)$ sonli ketma-ketlikka mos keladigan $\{f(x_n)\}$ va $\{g(x_n)\}$ sonli ketma-ketliklar mos ravishda b_1 va b_2 sonlarga yaqinlashsin. Bu holda sonli ketma-ketliklar limitlari nazariyasidan ma'lumki,

$$f(x_n) \le g(x_n) \text{ (yoki } f(x_n) < g(x_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

hamda $\left(f(x_n) \le \eta(x_n) \le g(x_n) \text{ va } \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\eta(x_n)\exists \text{ ва } \lim_{n\to\infty}\eta(x_n) = b\right)$$

implikatsiyalar o'rinli bo'ladi. Bu esa, funksiya limitining Geyne bo'yicha ta'rifiga binoan, mos ravishda, teoremaning a) va b) bandlarining o'rinli bo'lishini ko'rsatadi. Teorema isbot qilindi.

1- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ limit hisoblansin.

Y e c h i s h. Ravshanki, $\forall x \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ uchun $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ bo'lgani sababli bu to'plamda $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$, ya'ni

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|.$$

Bu yerda $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ ekanini e'tiborga olsak, 3-teoremaning b) bandiga ko'ra $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ bo'ladi.

13.2. Aniqmas ifodalar. Funksiya limitini hisoblash jarayonida ham xuddi sonli ketma-ketlik limitini topishdagi kabi $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty - \infty$ ko'rinishdagi a n i q m a s i f o d a l a r uchraydi. Faraz qilaylik, $f(x)$, $g(x)$ funksiyalar $X(X\subset R)$ to'plamda aniqlangan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda:

1) agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $x \to a$ da $\frac{0}{0}$ *ko'rinishdagi aniqmas ifoda* deb ataladi;

2) agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ bo‘lsa, bu holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $\frac{\infty}{\infty}$ *ko‘rinishdagi aniqmas ifoda* deyiladi;

3) agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $x\to a$ da $0\cdot\infty$ ko‘rinishdagi aniqmas ifoda deyiladi;

4) agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ bo‘lsa, $f(x)+g(x)$ ifoda $x\to a$ da $\infty-\infty$ *ko‘rinishdagi aniqmas ifoda* deyiladi.

1)—4) bandlardagi ifodalarning nima sababdan aniqmas ifodalar deb aytilishini, xuddi sonli ketma-ketliklar nazariyasidagi kabi, misollar bilan tushuntirish mumkin.

2- misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}\quad (n\in N)$$

limit hisoblansin.

Y e c h i s h:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^n-1)-n(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x-n)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)+(x^{n-1}-1)+\ldots+(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)+(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)+\ldots+(x+1)+1\right]}{x-1}=$$

$$=n+(n-1)+\ldots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

13.3. Birinchi ajoyib limit. Biz endi amaliyotda keng qo‘llaniladigan va adabiyotlarda b i r i n c h i a j o y i b l i m i t deb yuritiluvchi limit bilan tanishamiz. U quyidagi teorema orqali ifodalanadi:

4- teorema. *Ushbu* $y = \frac{\sin x}{x}$ *funksiya* $x = 0$ *nuqtada limitga ega, shu bilan birga*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu limit *birinchi ajoyib limit* deb ataladi.

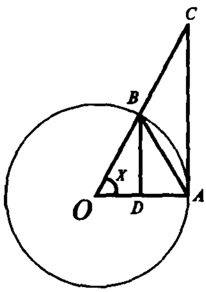
Isboti. Markazi O nuqtada joylashgan va radiusi 1 ga teng bo'lgan doirani qaraymiz (29- rasm). Ravshanki, OA = OB = 1, $\angle AOB = x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{cek\ AOB} = \frac{1}{2}x,$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Bundan tashqari, 29- rasmdan ko'rinib turibdiki,

$$S_{\Delta AOB} < S_{cek\ AOB} < S_{\Delta AOC}.$$



29- rasm.

Demak, $\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Bu yerdan $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ qo'sh tengsizlik kelib chiqadi. cos x va $\frac{\sin x}{x}$ funksiyalar juft funksiyalar bo'lgani sababli, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$ deb yoza olamiz. Bu yerda $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ va $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ bo'lgani tufayli 3- teoremaning b) bandiga ko'ra $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada limitga ega va bu limit 1 ga teng. Teorema isbot qilindi.

3- misol. Ushbu $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ limit hisoblansin.

Yechish.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^n)x^n}{x^n}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^m x^m} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = \begin{cases} 0 (n > m), \\ 1 (n = m), \\ \infty (n < m). \end{cases}$$

14- §. BIR TOMONLI LIMITLAR. IKKINCHI AJOYIB LIMIT

14.1. Bir tomonli limitlar. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya a nuqtaning o'ng (chap) atrofida aniqlangan va a nuqta shu atrofning limit nuqtasi bolsin.

1- ta'rif (Geyne). Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo'lib, hadlari x argumentning $x_n > a(x_n < a)$ qiymatlaridan iborat bo'lgan va a songa yaqinlashuvchi $\forall\left\{x_n\right\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, bu holda b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng (chap) limiti* deyiladi va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$) ko'rinishda yoziladi.

Bir tomonli limitlar «$\varepsilon - \delta$» tilida quyidagicha ta'riflanadi:

2- ta'rif (Koshi). Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $\forall x \in (a, a+\delta)$ ($\forall x \in (a-\delta, a)$) uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng* (*chap*) *limiti* deyiladi va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$) ko'rinishda yoziladi.

Bir tomonli limitlarning Geyne va Koshi bo'yicha ta'riflari bir-biriga teng kuchli bo'lib, ular analiz jarayonida qaralayotgan masalaning xarakteriga mos ravishda qo'llaniladi.

Qisqalik uchun $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ bir tomonli limitlar mos ravishda $f(a+0)$ va $f(a-0)$ simvollar bilan belgilanadi: $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ va $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Xususan, $f(0+0)$ va $f(0-0)$ bir tomonli limitlarni mos ravishda $f(+0)$ va $f(-0)$ simvollar bilan belgilaymiz.

1- misol. $y = signx$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi bir tomonli limitlari tekshirilsin.

Y e c h i s h. Ta'rif bo'yicha

$$y = signx = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \qquad (1)$$

ekanligi ma'lum. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari x argumentning $x_n > 0$ $(x_n < 0)$ qiymatlaridan iborat bo'lgan va 0 songa yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. Bu ketma-ketlikka hadlari $y = signx$ funksiyaning qiymatlaridan iborat bo'lgan $\{signx_n \equiv 1\}$ $(\{signx_n \equiv -1\})$ ketma-ketlik mos keladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty, x_n>0} signx_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty, x_n<0} signx_n = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1 \right).$$

Bu esa, bir tomonli limitning Geyne bo'yicha ta'rifiga binoan, $sign(+0) = 1$ $(sign(-0) = -1)$ ekanini bildiradi.

2- misol. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi bir tomonli limitlari tekshirilsin.

Y e c h i s h. Ravshanki, $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Modul-funksiya ta'rifiga ko'ra

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ -1 & (x < 0). \end{cases} \qquad (2)$$

Aytaylik, ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda $\delta > 0$ son har qanday bo'lganda ham barcha $x \in (0;\ \delta)$ lar uchun $\varepsilon > \left| \frac{|x|}{x} - 1 \right| = |1 - 1| = 0$ va barcha $x \in (-\delta,\ 0)$ lar uchun $\varepsilon > \left| \frac{|x|}{x} + 1 \right| = |-1 + 1| = 0$ bo'ladi. Bu esa, bir tomonli limitning Koshi bo'yicha ta'rifiga binoan, $f(+0) = 1$ va $f(-0) = -1$ ekanligini bildiradi.

Bir tomonli limitlar funksiyaning nuqtada limitga ega yoki ega emasligini aniqlashda juda qulay vosita sanaladi. Buni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalash mumkin:

1- t e o r e m a. *Funksiyaning nuqtada limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada bir tomonli limitlarga ega bo'lishi hamda bu limitlarning bir-biriga teng bo'lishi zarur va yetarli.*

I s b o t i. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli limit mavjud bo'lsin. U holda, funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga ko'ra, $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topiladiki, $\forall x\in (a,\ a+\delta)$ va $\forall x\in (a-\delta,\ a)$ nuqtada $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa, bir tomonli limitning Koshi bo'yicha ta'rifiga binoan, $f(a-0)$, $f(a+0)$ limitlarning mavjudligini va $f(a-0)=f(a+0)=b$ ekanini bildiradi.

2) **Yetarliligi.** Aytaylik, $f(a-0)$, $f(a+0)$ bir tomonli limitlar mavjud va $f(a-0)=f(a+0)=b$ bo'lsin. U holda bir tomonli limitning Koshi bo'yicha ta'rifiga binoan $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlarni ko'rsatish mumkinki, $\forall x\in (a-\delta_1,\ a)$ va $\forall x$ $(a,\ a+\delta_2)$ nuqtada $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ko'rinib turibdiki, agar bu yerda $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$ deb olsak, $\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ nuqtada $|f(x)-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga ko'ra, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limitning mavjudligini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

Yuqorida qaralgan misollarda bir tomonli limitlar o'zaro teng bo'lmaganligi sababli, 1- teoremaga ko'ra, $y=signx$ va $f(x)=\frac{|x|}{x}$ funksiyalar $x=0$ nuqtada limitga ega emas.

Qaralayotgan a nuqta cheksiz uzoqlashgan nuqta $(a=\infty)$ bo'lganda ham funksiyaning a nuqtadagi «bir tomonli» limitlari haqida so'z yuritishimiz mumkin. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $a=+\infty(a=-\infty)$ nuqtaning biror $(\delta,\ +\infty)$ $((-\infty,\ \delta))$ atrofida aniqlangan va a nuqta shu atrofning limit nuqtasi bo'lsin.

3- ta'rif (Geyne). Agar shunday b haqiqiy son mavjud bo'lib, hadlari $(\delta,\ +\infty)((-\infty,\ \delta))$ atrofga tegishli bo'lgan va $+\infty(-\infty)$ga «yaqinlashuvchi» $\forall\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$ bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x\to+\infty(x\to-\infty)$ dagi *limiti* deyiladi va $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b)$ ko'rinishda yoziladi.

Endi bu ta'rifga teng kuchli bo'lgan yana bitta ta'rifni keltiramiz.

4- ta'rif (Koshi). Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, $\forall x\in(\delta;\ +\infty)$ $(\forall x(-\infty;\ \delta))$ nuqtada $|f(x)-b|<\varepsilon$

bo'lsa, bu holda b son $f(x)$ *funksiyaning* $x \to +\infty (x \to -\infty)$ dagi *limiti* deyiladi va $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b (\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b)$ ko'rinishda yoziladi.

Qulaylik uchun $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ va $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ limitlar mos ravishda $f(+\infty)$ va $f(-\infty)$ simvollar bilan belgilanadi: $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ va $f(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

3- misol. Ushbu $\lim\limits_{x \to +\infty} a^{-x} = 0 (a > 1)$ tenglik isbot qilinsin.

Y e c h i sh. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari x argumentning $x_n > \delta$ qiymatlaridan iborat bo'lgan va $+\infty$ ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \to +\infty} a^{-x_n} = a^{-\lim\limits_{n \to +\infty} x_n} = 0 (a > 1).$$

Demak, 3- ta'rifga binoan $\lim\limits_{x \to +\infty} a^{-x} = 0 (a > 1)$ bo'ladi.

4- misol. Ushbu $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+3^x} = 1$ tenglik isbotlansin.

Y e c h i sh. Aytaylik, ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda bu son uchun shunday

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \begin{cases} \log_3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} (0 < \varepsilon < 1), \\ 0 \qquad (\varepsilon \geq 1) \end{cases}$$

son mavjudki, $\forall x \in (-\infty; \delta)$ nuqtada $\left| \frac{1}{1+3^x} - 1 \right| < \varepsilon$ bo'ladi. Haqiqatan, dastavval $0 < \varepsilon < 1$ deylik. Bu holda $\forall x \in \left(-\infty; \log_3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$ nuqtada

$$\left| \frac{1}{1+3^x} - 1 \right| = \frac{3^x}{1+3^x} < \frac{3^{\log_3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{1+3^{\log_3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} = \varepsilon,$$

chunki $y = \frac{3^x}{1+3^x}$ funksiya o'suvchi.

Aytaylik, $\varepsilon \geq 1$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (-\infty; 0)$ nuqtada

$$\left|\frac{1}{1+3^x}-1\right|=\frac{3^x}{1+3^x}<\frac{1}{2}<\varepsilon$$

bo‘ladi. Shunday qilib, 4- ta’rifga ko‘ra, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+3^x}=1$ bo‘lar ekan.

14.2. Ikkinchi ajoyib limit. Bu limit quyidagicha aniqlanadi:

2- teorema. *Ushbu* $f(x)=(1+x)^{1/x}\,(x>-1)$ *darajali-ko‘rsatkichli funksiya* $x=0$ *nuqtada limitga ega, shu bilan birga*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\;\;(e=2{,}718...) \tag{3}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu limit *ikkinchi ajoyib limit* deb ataladi.

Isboti. Teoremani isbot qilish uchun (1- teoremaga ko‘ra)

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\;\;\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \tag{4}$$

tengliklarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish kifoya.

Dastlab (4) tengliklarning birinchisini isbot qilamiz. x argumentning musbat qiymatlaridan tuzilgan hamda 0 songa yaqinlashuvchi $\left\{x_n=\frac{1}{n}\right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlikka funksiyaning $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos keladi. Ma’lumki,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{5}$$

Agar limit belgisi ostidagi ifodani n natural agrumentning funksiyasi deb qarasak, u holda (funksiya limitining Geyne bo‘yicha ta’rifiga asosan) (5) tenglik, hadlari k_n natural sonlardan iborat bo‘lgan hamda $k_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ shartni qanoatlantiradigan $\forall\{k_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=e. \qquad (6)$$

bo‘lishini bildiradi.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x argumentning musbat qiymatlaridan tuzilgan hamda 0 songa yaqinlashuvchi ixtiyoriy sonli ketma-ketlik bo‘lsin. Bu yerda $\forall n \geq n_0$ uchun $0 < x_n < 1$ deb olish mumkin, chunki $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ va $0 < 1$ bo‘lgani sababli, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror x_{n_0} hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari 1 sonidan kichik bo‘ladi. $\left[\frac{1}{x_n}\right]=k_n\,(n=1,2,\ ...)$ bo‘lsin. U holda $k_n \leq \frac{1}{x_n} < k_n+1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=+\infty$ bo‘ladi. Ravshanki, $\frac{1}{k_n+1} < x_n \leq \frac{1}{k_n}$. Demak,

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Bu yerdan, (6) formulaga va tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga asosan,

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$$

kelib chiqadi. Bu esa, funksiyaning nuqtadagi o‘ng limiti ta’rifiga ko‘ra,

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

bo‘lishini bildiradi.

Endi (4) tengliklarning ikkinchisini isbot qilamiz. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x argumentning manfiy qiymatlaridan tuzilgan va 0 ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy sonli ketma-ketlik bo‘lsin. Bu yerda $\forall n \geq 1$ uchun $-1 < x_n < 0$ deb olish mumkin. Agar $x_n=-t_n$ deb belgilasak, u holda $0 < t_n < 1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$ bo‘ladi. Endi

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$$

ifodani t_n orqali quyidagicha tasvirlaymiz:

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1-t_n)^{-\frac{1}{t_n}} = \left(\frac{1}{1-t_n}\right)^{\frac{1}{t_n}} =$$

$$= \left(1+\frac{t_n}{1-t_n}\right)^{\frac{1}{t_n}} = \left(1+\frac{t_n}{1-t_n}\right)^{\frac{1-t_n}{t_n}} \left(1+\frac{t_n}{1-t_n}\right).$$

Bu yerdan

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t_n}{1-t_n}\right)^{\frac{1-t_n}{t_n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t_n}{1-t_n}\right) = e.$$

Bu esa, funksiyaning nuqtadagi chap limitining ta'rifiga asosan,

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

bo'lishini bildiradi.

Shunday qilib, $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $(x > -1)$ funksiya $x = 0$ nuqtada o'ng va chap limitlarga ega, shu bilan birga ular bir-biriga teng. Bu esa, 1- teoremaga ko'ra, $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $(x > -1)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limitga ega ekanini hamda (3) tenglikning o'rinli bo'lishini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

Natija. $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ darajali-ko'rsatkichli funksiya $x \to \infty$ da limitga ega, shu bilan birga

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (e = 2{,}718\ldots)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu limit ham *ikkinchi ajoyib limit* deb ataladi.

Isboti. $\frac{1}{x} = t$ deb belgilaylik. U holda (3) tenglikka asosan

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Natija isbot qilindi.

14.3. Ba'zi bir muhim limitlar. Biz bu yerda amaliyotda keng qo'llaniladigan ayrim muhim limitlar bilan tanishamiz:

1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1.$

I s b o t i.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln e=1.$$

Umumiy holda

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)}{h}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\quad (0<a\neq 1).$$

2) Agar α — o'zgarmas haqiqiy son bo'lsa, u holda

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha$$

bo'ladi.

I s b o t i. $(1+t)^{\alpha}-1=y$ deb belgilaylik. U holda bu yerdan

$$\alpha=\frac{\ln(1+y)}{\ln(1+t)}$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\alpha.$$

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a\quad (0<a\neq 1).$

I s b o t i. $a^h-1=x$ desak,

$$h=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln a}{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\ln a\quad (0<a\neq 1).$$

4) $\forall \alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0.$$

I s b o t i. $\ln x = t$ deb olamiz. U holda $\forall x \in (1; +\infty)$ uchun

$$0 < \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{t}{e^{\alpha t}} = \frac{t}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^{n}}.$$

Endi $\forall n \in N$ $(n \geq 3)$ va $h > 0$ uchun $(1+h)^{n} > 1 + \frac{n^2}{4} h^2$ (bu tengsizlik Nyuton binomi formulasidan kelib chiqadi) bo'lishini va tengsizlikda limitga o'tish qoidasini e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^{n}} \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{1 + \frac{(\alpha t)^2}{4}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{\alpha^2 t}{4}} = 0.$$

Demak, $\forall \alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$$

bo'lar ekan.

15- §. MONOTON FUNKSIYANING LIMITI. CHEKSIZ KATTA VA CHEKSIZ KICHIK FUNKSIYALAR

15.1. Funksiyaning aniq chegaralari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X ($X \subset \boldsymbol{R}$) to'plamda aniqlangan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar shunday M haqiqiy son (m haqiqiy son) mavjud bo'lib, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) tengsizlik bajarilsa, bu holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi. Bu yerdagi M va m sonlar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi *yuqori* va *quyi chegaralari* deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ va $y=2-x^2$ funksiyalar $X=\boldsymbol{R}$ to‘plamda mos ravishda quyidan va yuqoridan chegaralangan, chunki $\forall x\in\boldsymbol{R}$ uchun $y=x^2\geq 0$ va $y=2-x^2\leq 2$.

2- ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ va $y=\cos x$ funksiyalar $X=\boldsymbol{R}$ to‘plamda chegaralangan funksiyalardir, chunki $\forall x\in\boldsymbol{R}$ uchun $-1\leq\sin x\leq 1$ va $-1\leq\cos x\leq 1$.

Funksiya aniq chegarasining ta’rifi. Ushbu

$$Y=\{y: y=f(x),\ \ x\in X\}$$

sonli to‘plamning aniq quyi (aniq yuqori) chegarasi, ya’ni inf Y (sup Y), $y=f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi *aniq quyi (aniq yuqori) chegarasi* deb ataladi va $\inf\limits_{x\in X} f(x)(\sup\limits_{x\in X} f(x))$ simvol bilan belgilanadi.

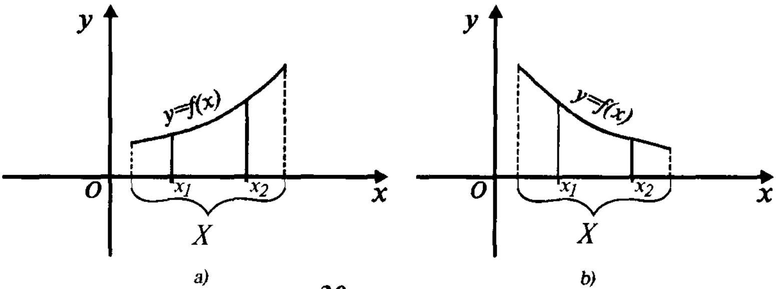
Masalan, $\inf\limits_{x\in\boldsymbol{R}} x^2=0$, $\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}}(2-x^2)=2$,

$$\inf_{x\in\boldsymbol{R}}(6\sin(2x-1))=-6,\quad \sup_{x\in\boldsymbol{R}}(6\sin(2x-1))=6.$$

15.2. Monoton funksiyaning limiti. Funksiya limitining mavjudligi masalasi *monoton funksiyalar* deb ataladigan funksiyalar uchun ancha oson yechiladi. Dastavval monoton funksiya tushunchasi bilan tanishib chiqaylik:

3- ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya biror $X(X\subset R)$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_1<x_2$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa, bu holda $f(x)$ funksiya X to‘plamda *o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya* deb ataladi (30, *a*, *b* rasm).

4- ta’rif. Agar $f(x)$ funksiya biror $X(X\subset R)$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_1<x_2$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x_1, x_2\in X$ uchun $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa, bu holda



30- rasm.

$f(x)$ funksiya X to'plamda *kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya* deb ataladi (31, 32- rasmlar).

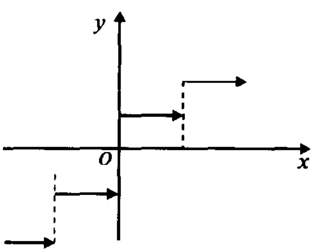
Mumtoz adabiyotda kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya *keng ma'noda o'suvchi (keng ma'noda kamayuvchi)* funksiya deb aytiladi. O'suvchi, kamayuvchi, keng ma'noda o'suvchi va keng ma'noda kamayuvchi funksiyalar esa bitta umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deb ataladi. Zamonaviy adabiyotda kamaymaydigan va o'smaydigan funksiyalar *monoton funksiyalar,* o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar esa *qat'iy monoton funksiyalar* deb ataladi.

Ko'rinib turibdiki, monoton ketma-ketlikni *natural argumentning monoton funksiyasi* deyish mumkin. Endi monoton funksiyaning limiti haqidagi masalani qaraymiz. Bu masalaning yechimi quyidagi ikkita teorema orqali ifodalanadi:

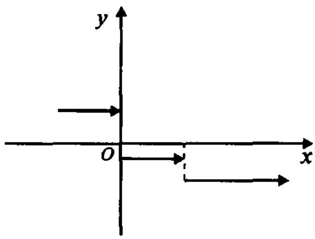
1- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $X(X\subset R)$ to'plamda kamaymaydigan yoki o'suvchi (o'smaydigan yoki kamayuvchi) bo'lib, x argumentning barcha $x\in X$ qiymatlaridan katta bo'lgan a nuqta (a-chekli yoki $+\infty$) X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda chekli yoki cheksiz $f(a-0)$ limit mavjud, shu bilan birga*

$$f(a-0)=\sup_{x\in X} f(x) \quad \left(f(a-0)=\inf_{x\in X} f(x)\right)$$

bo'ladi.



31- rasm.



32- rasm.

I s b o t i. Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to‘plamda kamaymaydigan yoki o‘suvchi bo‘lib, shu to‘plamda yuqoridan chegaralangan bo‘lsin. Demak, aniq chegara prinsipiga ko‘ra $b = \sup f(x) = \sup Y$ mavjud. Bu yerda $Y = \{y : y = f(x),\ x \in X\}$. $f(a-0) = b$ ekanini ko‘rsatamiz. b son aniq yuqori chegara bo‘lgani sababli, $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham x argumentning shunday $x_0 = x_0(\varepsilon)(x_0 < a)$ qiymatini ko‘rsatish mumkinki, $f(x_0) > b-\varepsilon$ bo‘ladi. Shart bo‘yicha $f(x) \geq f(x_0)(x > x_0)$. Demak, $f(x) > b-\varepsilon$ $(x > x_0)$. Ikkinchidan, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq b$. Demak, $f(x) < b + \varepsilon$. Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $x_0 = x_0(\varepsilon)$ son topiladiki, $\forall x \in \{x : x_0 < x < a\}$ nuqtada $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi (bunda a chekli son bo‘lsa, $x_0 = a-\delta\ (\delta > 0)$ deb, $a = +\infty$ bo‘lganda esa $x_0 = A$ deb olamiz). Bu esa, funksiya chap limitining Koshi bo‘yicha ta’rifiga binoan, $f(a-0) = b$ ekanini bildiradi.

Aytaylik, f funksiya X to‘plamda kamaymaydigan yoki o‘suvchi bo‘lib, shu to‘plamda yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsin. U holda ta’rifga ko‘ra $\forall E > 0$ son uchun x argumentning shunday $x_0 = x_0(E)$ qiymati topiladiki, $f(x_0) > E$ bo‘ladi. Shart bo‘yicha $f(x) \geq f(x_0)(x > x_0)$. Demak, $\forall x \in \{x : x_0 < x < a\}$ nuqtada $f(x) > E$ bo‘lar ekan. Bu esa $f(a-0) = +\infty$ ekanini bildiradi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham xuddi yuqoridagi singari isbot qilinadi.

2- t e o r e m a. *Agar $f(x)$ funksiya $X(X \subset R)$ to‘plamda kamaymaydigan yoki o‘suvchi (o‘smaydigan yoki kamayuvchi) bo‘lib, x argumentning barcha $x \in X$ qiymatlaridan kichik bo‘lgan a nuqta (a — chekli yoki $-\infty$) X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda chekli yoki cheksiz $f(a + 0)$ limit mavjud, shu bilan birga*

$$f(a+0) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \left(f(a+0) = \sup_{x \in X} f(x)\right)$$

bo‘ladi.

Bu teorema xuddi 1- teorema kabi isbot qilinadi.

15.3. Cheksiz katta funksiyalar va ularni taqqoslash. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lib, a (a-chekli yoki cheksiz) nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

5- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x \to a$ da *cheksiz katta funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ funksiya $x \to 1$ da cheksiz katta, $g(x) = x^2 + 1$ funksiya esa $x \to \infty$ da cheksiz katta funksiyadir. Haqiqatan,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \left(x^2 + 1\right) = \infty.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya biror $X\,(X \subset R)$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, berilgan a nuqtaning $\forall(a, a+\varepsilon)(\varepsilon > 0)$ o‘ng atrofida ($\forall(a-\varepsilon, a)(\varepsilon > 0)$ chap atrofida) X to‘plamning kamida bitta elementi bor (ya’ni a nuqta X ning o‘ng (chap) limit nuqtasi) bo‘lsin.

6- ta’rif. Agar

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty\right)$$

bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya a nuqtada *chapdan (o‘ngdan) cheksiz katta funksiya* deb ataladi. Masalan,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{2}{x-1} = +\infty$$

bo‘lgani sababli, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ funksiya $x = 1$ nuqtada chapdan ham, o‘ngdan ham cheksiz katta funksiyadir.

Cheksiz katta funksiyalar bir-biri bilan quyidagicha taqqoslanadi:

1) agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada o‘ngdan (chapdan) cheksiz katta bo‘lib, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $x = a$ nuqtada o‘ngdan (chapdan) cheksiz katta bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada *o‘ngdan (chapdan) $g(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz katta funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada o‘ngdan ham chapdan ham $g(x) = \frac{1}{x}$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz katta funksiyadir, chunki

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty;$$

2) agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada o‘ngdan (chapdan) cheksiz katta bo‘lib,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=c \quad (c\neq 0;\pm\infty),\quad \left(\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=c \quad (c\neq 0;\pm\infty)\right)$$

bo‘lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada *o‘ngdan (chapdan) bir xil tartibli cheksiz katta funksiyalar* deb ataladi. Masalan, $f(x)=\frac{5+x}{x}$ va $g(x)=\frac{1}{x}$ funksiyalar $x=0$ nuqtada o‘ngdan ham, chapdan ham bir xil tartibli cheksiz katta funksiyalardir, chunki

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+0}(5+x)=5,\quad \lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-0}(5+x)=5;$$

3) agar $f(x)$ funksiya $x\to\infty$ da cheksiz katta bo‘lib,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^p}=c \quad (c\neq 0;\ \pm\infty;\ p>0)$$

bo‘lsa, $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiya *x ga nisbatan p — tartibli cheksiz katta funksiya* deb ataladi. Masalan, $x\to\infty$ da

$$f(x)=\sqrt[3]{x^6+1}+x^2+1$$

funksiya x ga nisbatan 2- tartibli cheksiz katta funksiyadir, chunki

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^6}}+1+\frac{1}{x^2}\right)=2.$$

15.4. Cheksiz kichik funksiyalar va ularni taqqoslash. Endi cheksiz kichik funksiyalar va ularni bir-biriga taqqoslash haqida to‘xtalamiz. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror X to‘plamda aniqlangan va a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

7- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada *cheksiz kichik* deyiladi. Masalan, $f(x)=(x-a)^n$ (n — natural son) funksiya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘ladi. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to a}(x-a)^n=\lim_{x\to a}\underbrace{(x-a)(x-a)\dots(x-a)}_{n\text{ marta}}=$$

$$=\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}x-a\right)^n=(a-a)^n=0.$$

3- teorema. *Agar* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ *chekli limit mavjud bo'lsa, u holda* $\alpha(x)=f(x)-b$ *funksiya* $x=a$ *nuqtada cheksiz kichik bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli limit mavjud bo'lsin. U holda

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-b)=\lim_{x\to a}f(x)-b=b-b=0.$$

Bu esa cheksiz kichik funksiyaning ta'rifiga ko'ra $\alpha(x)=f(x)-b$ funksiyaning $x=a$ nuqtada cheksiz kichikligini bildiradi.

Yuqorida isbot qilingan teoremadan ayonki, agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $x\to a$ da $f(x)$ funksiyani

$$f(x)=b+\alpha(x)\quad (x\to a) \tag{*}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdagi $\alpha(x)$ funksiya a nuqtada cheksiz kichik bo'lgan ixtiyoriy funksiyadir. Masalan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bo'lgani uchun $\sin x=x(1+\alpha(x))$ $(x\to 0)$ deb yozish mumkin. Bu yerda $\alpha(x)$ funksiya $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiyadir.

Cheksiz kichik funksiyalar bir-biri bilan quyidagicha taqqoslanadi:

1) agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ atrofida aniqlangan bo'lib, $g(x)\neq 0\left(x\in \overset{\circ}{U}_\delta(a)\right)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)= =\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{**}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada $g(x)$ funksiyaga nisbatan *yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deb ataladi va qisqacha $f(x)=o(g(x))(x\to a)$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi o belgi E. Landau tomonidan kiritilgan bo'lib, u «tartib» degan ma'noni bildiruvchi inglizcha order so'zining birinchi harfidir (o belgi «o kichik» deb o'qiladi).

Yuqoridagi (*) formulaga asosan $f(x)=o(g(x))(x\to a)$ formulani $f(x)=\varepsilon(x)g(x)\left(x\in \mathring{U}_{\delta}(a)\right)$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerdagi $\varepsilon(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan ixtiyoriy funksiyadir. Haqiqatan, (*) ga asosan (**) dan

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\varepsilon(x)\ \left(\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0\right).$$

Bundan $f(x)=\varepsilon(x)g(x)\left(x\in \mathring{U}_{\delta}(a)\right)$.

2) agar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=c \quad (c\neq 0;\pm\infty)$$

limit mavjud bo'lsa, bu holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada *bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar* deb ataladi. Masalan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$$

bo'lgani uchun $y=\sin 3x$ va $y=x$ funksiyalar $x=0$ nuqtada bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalardir.

Xususan, bu yerda $c=1$ bo'lsa, bu holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada *ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar* deb ataladi va qisqacha $f(x)\sim g(x)(x\to a)$ ko'rinishda yoziladi. $\sim$ belgi «asimptotik tenglik» belgisi bo'lib, oxirgi formula «$x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga asimptotik teng» deb o'qiladi. Masalan, $x\to 0$ da $\sin x$ funksiya x funksiyaga asimptotik teng:

$$\sin x\sim x \quad (x\to 0),$$

chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Biror a nuqtada bir xil tartibli bo'lgan $f(x)$ va $g(x)$ cheksiz kichik funksiyalar orasidagi bog'lanishni

$$f(x)\sim cg(x) \quad (x\to a)$$

deb yozish mumkin. Bu yerda $c(c\neq 0)$ — o'zgarmas son.

3) agar $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^p}=c \quad (c\neq 0;\ \pm\infty;\ p>0)$$

limit mavjud bo'lsa, bu holda $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $y=x-a$ funksiyaga nisbatan p-tartibli cheksiz kichik funksiya deb ataladi. Masalan, $x\to 0$ da $f(x)=1-\cos x$ funksiya $y=x$ funksiyaga nisbatan 2- tartibli cheksiz kichik funksiya bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

4- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz katta (cheksiz kichik) bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik (cheksiz katta) bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x\to a$ da cheksiz katta (cheksiz kichik) bo'lsin. U holda cheksiz katta (cheksiz kichik) funksiyaning ta'rifiga asosan $\forall E>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(E)>0$ topiladiki, $\forall x\in\ \{x: 0<|x-a|<\delta\}$ uchun $|f(x)|>E$ $(|f(x)|<E)$ bo'ladi. Bu yerdan $\forall x\in\ \{x: 0<|x-a|<\delta\}$ uchun $\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\frac{1}{E}\left(\left|\frac{1}{f(x)}\right|>\frac{1}{E}\right)$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa ta'rifga ko'ra $\frac{1}{f(x)}$ funksiyaning $x\to a$ da cheksiz kichik (cheksiz katta) ekanini bildiradi.

Eslatma. $a=\infty$ holda ham xuddi shunga o'xshash teorema o'rinli bo'ladi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Funksiya limitining Geyne va Koshi bo'yicha ta'riflarini ayting va ularning ekvivalentligini isbotlang.

2. Koshi sharti deb nimaga aytiladi? Koshi sharti funksiyaning nuqtada limitga ega bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shart bo‘la oladi-mi?
3. Funksiya limiti haqidagi asosiy teoremalarni bilasizmi? Sanab chiqing va isbotlang.
4. Funksiya limitini hisoblashda uchraydigan $0/0$, ∞/∞, $0.\infty$ va $\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmas ifodalarni sharhlab bering. Misollar keltiring.
5. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi? Isbotlang.
6. Bir tomonli limit tushunchasini Geyne va Koshi bo‘yicha ta'riflang.
7. Ikkinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi? Isbotlang.
8. Funksiyaning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deb nimaga aytiladi?
9. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremalarni isbotlang.
10. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiya tushunchalarini ta'riflang. Ular bir-birlari bilan qanday taqqoslanadi?

16- §. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

16.1. Funksiyaning uzluksizligi. Matematik analizda uchraydigan funksiyalarni ikkita sinfga ajratish mumkin:

a) uzluksiz funksiyalar; **b)** uzlukli funksiyalar.

Analiz jarayonida asosan uzluksiz funksiyalar bilan ish ko‘riladi. Bunday funksiyalar (umuman aytganda, uzlukli funksiyalarga xos bo‘lmagan) bir qancha muhim xususiyatlarga ega bo‘ladilarki, bu xususiyatlar ularni tahlil qilish va tatbiq etish jarayonini ancha yengillashtiradi. Albatta, fan va texnikada, umuman tatbiqiy masalalarda uzlukli funksiyalar ham ko‘p uchraydi. Shu sababli, matematik analizda (nisbatan oz bo‘lsa-da) uzlukli funksiyalar bilan bog‘liq bo‘lgan masalalar ham qaraladi.

Dastavval funksiyaning uzluksizligi tushunchasi bilan tanishib chiqamiz. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror $X(X\subset \boldsymbol{R})$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $a\in X$ nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

1- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ chekli limit mavjud bo‘lib,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya $x = a$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi. Masalan, $f(x) = x^n$ (n — natural son) funksiya $\forall a \in \boldsymbol{R}$ nuqtada uzluksiz. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a} \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ marta}} = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x \ldots \lim_{x\to a} x =$$

$$= a \cdot a \ldots a = a^n = f(a).$$

Aks holda (ya'ni yo $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ chekli limit mavjud bo'lmasa, yoki bu chekli limit mavjud bo'lib, u $f(a)$ ga teng bo'lmasa) $f(x)$ funksiya a nuqtada *uzlukli* deb ataladi. Bu holda $x = a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi. Masalan,

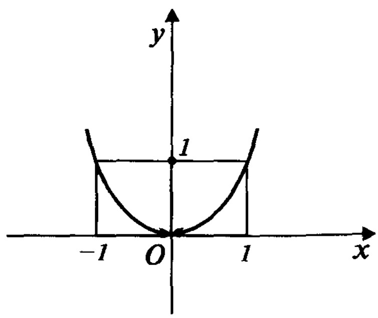
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

funksiya (33- rasm) $x = 0$ nuqtada uzlukli, chunki

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \neq 1 = f(0).$$

Izoh. $D(f)$ to'plamning $a \notin D(f)$ limit nuqtasini ham f funksiyaning uzilish nuqtasi deb hisoblaymiz. Masalan, $x = 0$ nuqta $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki $D(f) = R \setminus \{0\}$ bo'lib, $x = 0$ nuqta $D(f)$ ning limit nuqtasidir. Yana shuni ham aytishimiz kerakki, qulaylik maqsadida, f funksiya $D(f)$ to'plamning yakkalangan (ya'ni uning limit nuqtasi bo'lmagan) nuqtalarida uzluksiz deb hisoblanadi.

Funksiyaning nuqtada uzluksiz yoki uzlukli bo'lish xususiyati uning lokal xususiyati (ya'ni ma'lum bir nuqtagagina (joygagina) mansub bo'lgan xususiyati) sanaladi. Masalan, yuqorida qaralgan funksiya $x = 0$ nuqtada uzlukli bo'lib, son o'qining qolgan barcha nuqtalarida uzluksizdir.



33- rasm.

Funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga asosan funksiyaning nuqtada uzluksizligi tushunchasini quyidagicha ta'riflash mumkin:

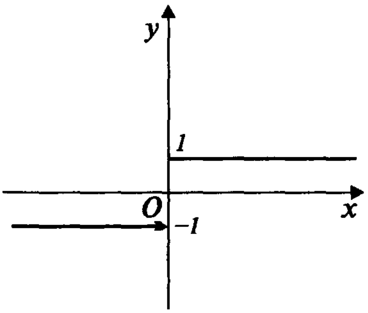
2- ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $\forall x\in\{x:|x-a|<\delta\}$ nuqtada $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada *uzluksiz* deyiladi. Aks holda, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada *uzlukli* deb ataladi.

16.2. Bir tomonli uzluksizlik. Endi funksiyaning nuqtada bir tomonli uzluksizligi tushunchasi bilan tanishamiz.

3- ta'rif. Agar $f(a+0)$ $(f(a-0))$ chekli limit mavjud va $f(a+0)=f(a)(f(a-0)=f(a))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada o'ngdan (chapdan) *uzluksiz* deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (x<0),\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$$



34- rasm.

funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lib, chapdan uzluklidir (34- rasm). Haqiqatan,

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}1=1=f(0),$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(-1)=-1\neq 1=f(0).$$

Funksiyaning nuqtada uzluksizligini tekshirishda quyidagi teorema muhim ahamiyatga ega:

1- teorema. *Funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uning shu nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lsin, ya'ni

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{1}$$

Ma'lumki, (1) tenglikning o'rinli bo'lishi uchun

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0}f(x) \text{ va}$$

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

bir tomonli limitlarning mavjud bo'lishi va ularning $f(a)$ ga teng bo'lishi zarur va yetarli edi. Demak, $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun uning shu nuqtada ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

1- misol. $f(x) = \text{sign}x$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladimi?

Y e c h i s h. Ma'lumki,

$$\text{sign}x = \begin{cases} -1 & (x<0), \\ 0 & (x=0), \\ 1 & (x>0). \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-0} \text{sign}x = \lim_{x\to-0}(-1) = -1 \neq 0 = \text{sign}0$$

bo'lgani uchun ta'rifga ko'ra sign$x$ funksiya $x = 0$ nuqtada chapdan uzluklidir. Demak, 1- teoremaga asosan sign$x$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzlukli bo'ladi.

Endi funksiyaning kesmada va intervalda uzluksizligi tushunchalari bilan tanishamiz.

4- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $\forall x \in [a,b]$ $(\forall x \in (a,b))$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, bu holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ *kesmada* ((a, b) *intervalda*) *uzluksiz* deb ataladi.

Bunda kesmada uzluksizlik haqida gap ketganda, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada o'ngdan uzluksizligi va b nuqtada chapdan uzluksizligi talab qilinadi; intervalda uzluksizligi to'g'risida gapirilganda esa $f(x)$ funksiyadan a va b nuqtalarda hech narsa talab qilinmaydi.

1- eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Haqiqatan, $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, ta'rifga ko'ra,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Bunda $a = \lim\limits_{x\to a} x$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

bo'ladi. Masalan, $f(x) = x^n$ (n — natural son) funksiya $a \in \boldsymbol{R}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to a} x^n = \left(\lim_{x\to a} x\right)^n.$$

16.3. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Quyidagi teorema o'rinli.

2- teorema. *Agar ayni bitta X to'plamda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $a\in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

funksiyalar (oxirgisida $g(x)\neq 0$, $g(a)\neq 0$) a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

bo'lsin. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremaga binoan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a);$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad (g(a)\neq 0).$$

Bu esa 1- ta'rifga ko'ra

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

funksiyalarning $x=a$ nuqtada uzluksizligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

16.4. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Quyidagi teorema o'rinli.

3- teorema. *Agar T ($T\subset \boldsymbol{R}$) to'plamda $f(g(t))$ murakkab funksiya aniqlangan bo'lib, $x=g(t)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $t_0\in T$ va $x_0=g(t_0)$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u holda $f(g(t))$ murakkab funksiya $t_0\in T$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isboti. $f(x)$ funksiya $x_0=g(t_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli, 2- ta'rifga asosan $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$

son topiladiki, $\forall x \in \{x: |x - x_0| < \delta_0\}$ nuqtada

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{2}$$

tengsizlik bajariladi. $x = g(t)$ funksiyaning t_0 nuqtada uzluksizligidan, 2- ta'rifga asosan yuqoridagi $\delta_0 > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\delta_0) > 0$ son topiladiki, $\forall t \in \{t: |t - t_0| < \delta\}$ nuqtada

$$|g(t) - g(t_0)| < \delta_0 \tag{3}$$

tengsizlik bajariladi.

Nihoyat, (2) tengsizlikda $x_0 = g(t_0)$ ekanini e'tiborga olsak, $\forall t \in \{t: |t - t_0| < \delta\}$ nuqtada

$$|f(g(t)) - f(g(t_0))| < \varepsilon$$

bo'lishiga ishonch hosil qilamiz. Bu esa, 2- ta'rifga ko'ra, $y = f(g(t))$ murakkab funksiyaning t_0 nuqtada uzluksizligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

2- eslatma. Agar $t_0 \in T$ nuqta T to'plamning limit nuqtasi bo'lib, $y = f(g(t))$ murakkab funksiya t_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = f\left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right) \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Haqiqatan, $y = f(g(t))$ funksiya t_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = f(g(t_0)).$$

Bu yerda $g(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} g(t)$ ekanini e'tiborga olsak, (4) tenglik hosil bo'ladi.

16.5. Darajali-ko'rsatkichli funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, biror $X(X \subset R)$ to'plamda $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ darajali-ko'rsatkichli funksiya berilgan bo'lsin.

4- teorema. *Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $a(a \in X)$ nuqtada uzluksiz ($u = u(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida musbat) bo'lsa, u holda $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ funksiya $x = a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isboti. Dastavval $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ funksiyani

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \ln u(x)} \tag{5}$$

ko'rinishda tasvirlaymiz. $u(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\ln u(x)$ murakkab funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. $v(x)$ va $\ln u(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $v(x)\ln u(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz. Nihoyat, $v(x)\ln u(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun (5) murakkab funksiya, ya'ni $y=u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ darajali-ko'rsatkichli funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}.$$

Teorema isbot qilindi.

Darajali-ko'rsatkichli funksiyaning limiti haqida quyidagilarni aytish mumkin: (5) ifodadan ko'rinib turibdiki, $u(x)^{v(x)}$ ifodaning $x\to a$ dagi limiti $v(x)\ln u(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limitiga bog'liq:

1) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^b;$

2) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0;$

3) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty.$

16.6. Aniqmas ifodalar. Darajali-ko'rsatkichli funksiyaning limitini hisoblashda quyidagi uch turli aniqmas ifoda uchraydi: 1^∞, 0^0, ∞^0.

a) Agar $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$ va $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$ bo'lsa, $u(x)^{v(x)}$ ifoda $x\to a$ da 1^∞ *ko'rinishdagi aniqmas ifoda* deb ataladi. 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun dastlab uni quyidagi usulda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish lozim:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a}(1+u(x)-1)^{v(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\left(1+(u(x)-1)\right)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{v(x)(u(x)-1)} =$$

$$= \left(\lim_{x\to a}\left(1+(u(x)-1)\right)^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)(u(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)(u(x)-1)}.$$

So'ngra odatdagi usul bilan $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish kerak.

2- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}$ limit hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}((1+2x)^{\frac{1}{2x}})^{\frac{2x}{\sin x}} =$$

$$= (\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}})^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}} = e^{\frac{2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}} = e^{\frac{2}{1}} = e^2.$$

b) Agar $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$ bo'lsa, $u(x)^{v(x)}$ ifoda $x\to a$ da 0^0 *ko'rinishdagi aniqmas ifoda* deb ataladi. Masalan: $x\to+0$ da x^x ifoda 0^0 ko'rinishdagi aniqmas ifodadir.

d) Agar $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$ ва $\lim\limits_{x\to a} v(x) = 0$ bo'lsa, $x\to a$ da $u(x)^{v(x)}$ ifoda ∞^0 *ko'rinishdagi aniqmas ifoda* deb ataladi. Masalan, $x^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda $x\to+\infty$ da ∞^0 ko'rinishdagi aniqmas ifodadir.

Amaliyotda 0^0 va ∞^0 ko'rinishdagi aniqmas ifodalar quyidagi usul bilan 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirilib, ochilishi mumkin:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)} = (e^{v(x)})^{\ln u(x)} \qquad (u(x) > 0).$$

Bu yerda $f(x) = e^{v(x)}$, $g(x) = \ln u(x)$ desak,

$$y = u(x)^{v(x)} = f(x)^{g(x)}$$

bo'ladi. Ravshanki, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

3- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ limit hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0}(e^x)^{\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}} = e^0 = 1,$$

chunki $\forall\alpha\in(0;+\infty)$ uchun $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$ ekanligini biz avval isbot qilgan edik.

4- misol. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x^2}$$

limit hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{1/x^2}\right)^{\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}} = e^{0} = 1.$$

17- §. UZILISH NUQTALARINI TASNIFLASH. MONOTON FUNKSIYANING UZILISHLARI VA UZLUKSIZLIGI

17.1. Uzilish nuqtalarini tasniflash. Funksiyaning uzilish nuqtalari uch turli bo‘ladi: **a) yo‘qotiladigan uzilish nuqtalar; b) birinchi tur uzilish nuqtalar; d) ikkinchi tur uzilish nuqtalar.**

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X\,(X\subset \boldsymbol{R})$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

1- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ chekli limit mavjud bo‘lib, yo $f(x)$ funksiya a nuqtada aniqlanmagan yoki aniqlanganu, lekin $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ bo‘lsa, bu holda $x=a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning *yo‘qotiladigan uzilish nuqtasi* deb ataladi. Masalan,

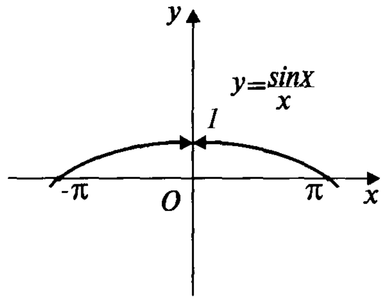
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

bo‘lib, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmaganligi sababli, $x=0$ nuqta bu funksiyaning yo‘qotiladigan uzilish nuqtasidir (35- rasm). Bu uzilish nuqtasi quyidagi tarzda yo‘qotiladi:

$$f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0),\\ 1 & (x=0).\end{cases}$$

Ravshanki, $f^*(x)$ va $f(x)$ funksiyalar bir-biridan faqat $x = 0$ nuqtadagina farq qiladi. $f^*(x)$ funksiya esa $x = 0$ nuqtada uzluksizdir:

$$\lim_{x \to 0} f^*(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f^*(0).$$



35- rasm.

Yana bitta misol qaraylik. $x = 1$ nuqta

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \neq 1), \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasidir (36- rasm). Haqiqatan,

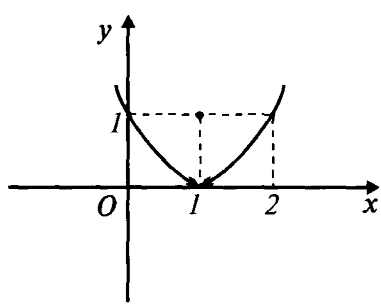
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x-1)^2 = (\lim_{x \to 1}(x-1))^2 = (1-1)^2 = 0 \neq 1 = f(1).$$

Bu uzilish nuqtasini quyidagicha yo'qotish mumkin:

$$f^*(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \neq 1), \\ 0 & (x = 1). \end{cases}$$

$f^*(x)$ funksiya $x = 1$ nuqtada uzluksiz va $f(x)$ funksiyadan faqat $x = 1$ nuqtadagi qiymati bilangina farq qiladi.

2- ta'rif. Agar $f(a-0)$ va $f(a+0)$ bir tomonli chekli limitlar mavjud bo'lib, $f(a-0) \neq f(a+0)$ bo'lsa, $x = a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning *birinchi tur uzilish nuqtasi* deb ataladi.

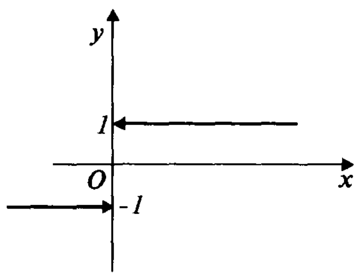


36- rasm.

Masalan, $x=0$ nuqta $f(x)=\frac{|x|}{x}$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasidir (37- rasm), chunki

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+0}1=1,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to-0}(-1)=-1.$$



37- rasm.

Funksiyaning birinchi tur uzilishi *chekli uzilish* deb ataladi. Geometrik nuqtai nazardan qaraganda, birinchi tur uzilish nuqtasida ($x=a$ da) f funksiyaning grafigi $h= =|f(a+0)-f(a-0)|$ masofaga sakraydi. Masalan, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ funksiyaning grafigi $x=0$ nuqtada $h=|1-(-1)|=2$ masofaga sakraydi.

3- ta'rif. Agar $f(a-0)$ va $f(a+0)$ bir tomonli limitlarning kamida bittasi mavjud bo'lmasa, yoki ularning kamida biri cheksizlikka teng bo'lsa, bu holda $x=a$ nuqta $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tur uzilish nuqtasi* deb ataladi. Masalan, $x=0$ nuqta

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0),\\ \sin\frac{1}{x} & (x>0)\end{cases}$$

funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasidir (38- rasm), chunki $f(+0)$ o'ng tomonli limit mavjud emas.

Yana bitta misol keltiraylik: $x=1$ nuqta

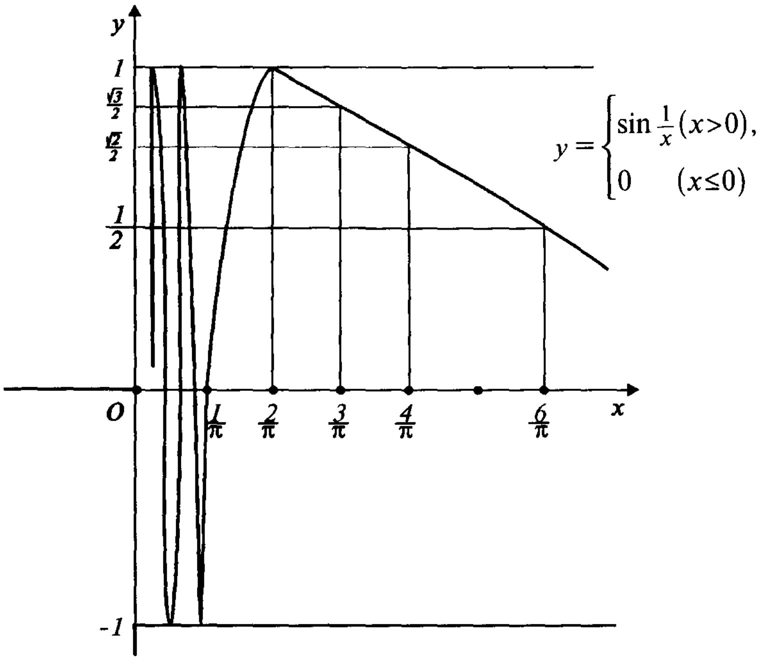
$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$

funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasidir (39- rasm), chunki

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

Ravshanki, $f(a-0)$ va $f(a+0)$ bir tomonli limitlarning kamida biri cheksizlikka teng bo'lganda, f funksiya grafigining $x=a$

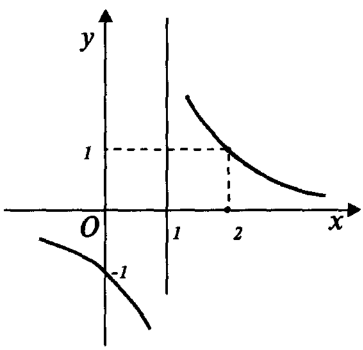


38- rasm.

nuqtadagi «sakrash masofasi» $+\infty$ ga teng. Shuning uchun bunday uzilishlar odatda *cheksiz uzilishlar* deb ataladi.

17.2. Bo'lakli-uzluksiz funksiya tushunchasi. Bu tushuncha quyidagicha ta'riflanadi.

4- ta'rif. Agar f funksiya $[a, b]$ segmentdagi birinchi tur uzilish nuqtalaridan boshqa barcha ichki nuqtalarda uzluksiz, shu bilan birga $f(a+0)$ va $f(b-0)$ bir tomonli limitlar mavjud bo'lsa, f funksiya $[a, b]$ *segmentda bo'lakli-uzluksiz* deb ataladi. Masalan, ante-funksiya deb ataladigan $f(x)=[x]$ funksiya $[-5; 6]$ segmentda bo'lakli-uzluksizdir. Chunki bu funksiya $[-5; 6]$ segmentdagi birinchi tur uzilish nuqtalari ($x=-4$, -3, -2, -1, $0, 1, 2, 3, 4, 5$) dan boshqa barcha ichki nuqtalarda uzluksiz, shu bilan birga $f(-5+0)=\lim\limits_{x\to -5+0}[x]=-5$, $f(6-0)=$



39- rasm.

$= \lim\limits_{x \to 6-0} [x] = 5$ bir tomonli limitlar mavjud. Bu yerda $[x]$ ifoda, har doimgidek, x haqiqiy sondan oshmaydigan eng katta butun sonni bildiradi.

Endi funksiyaning intervalda bo'lakli-uzluksizligi tushunchasini ta'riflaymiz:

5- ta'rif. Agar f funksiya (a, b) intervalga (bu yerda $a = -\infty$, $b = +\infty$ bo'lishi ham mumkin) tegishli bo'lgan har qanday segmentda bo'lakli-uzluksiz bo'lsa, f funksiya (a, b) *intervalda bo'lakli-uzluksiz* deb ataladi. Masalan, $y = [x]$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ cheksiz to'g'ri chiziqda bo'lakli-uzluksiz funksiyadir.

17.3. Monoton funksiyaning uzilishlari va uzluksizligi. Dastavval monoton funksiyaning uzilish nuqtalarini tavsiflovchi quyidagi teoremani isbot qilamiz.

1- teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan monoton (yoki qat'iy monoton) funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x_0 \in [a, b]$ nuqtada f funksiya yo uzluksiz, yoki birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.*

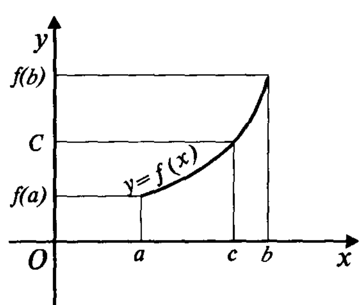
Isboti. Aytaylik, f funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan kamaymaydigan (yoki o'suvchi) funksiya bo'lib, $x_0 \in [a, b]$ nuqta ixtiyoriy tayin nuqta bo'lsin. U holda, ravshanki, $\forall x \in (a, x_0)$ nuqtada $f(x) \le f(x_0)$ (yoki $f(x) < f(x_0)$) va $\forall x \in (x_0, b)$ nuqtada $f(x) \ge f(x_0)$ (yoki $f(x) > f(x_0)$) bo'ladi. Demak, monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga binoan $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ chekli limitlar mavjud. Tengsizliklarda limitga o'tish qoidasiga ko'ra $f(x_0 - 0) \le f(x_0)$ va $f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Ko'rinib turibdiki, agar bu yerda $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ bo'lsa, f funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Aks holda, f funksiya x_0 nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Endi $x_0 = a$ ($x_0 = b$ bo'lganda ham xuddi shu kabi isbotlanadi) bo'lsin. Bu holda $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f(a) \le f(x) \le f(b)$ (yoki $f(a) < f(x) < f(b)$) bo'ladi. Demak, yana monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga binoan $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\geq f(a)$ limit mavjud. Agar bu yerda $f(a+0)=f(a)$ bo'lsa, f funksiya a nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'ladi. $f(a+0)>f(a)$ holda esa, f funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

1- eslatma. f funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan o'smaydigan (yoki kamayuvchi) funksiya bo'lganda ham 1- teorema xuddi yuqoridagidek isbot qilinadi.

2- teorema. *$[a, b]$ segmentda aniqlangan qat'iy monoton f funksiyaning shu segmentda uzluksiz bo'lishi uchun, $f(a)$ va $f(b)$ sonlar orasida yotuvchi $\forall C$ son berilganda ham $f(c)=C$ tenglikni qanoatlantiruvchi $c\in(a, b)$ nuqtaning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, f funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan o'suvchi uzluksiz funksiya bo'lib, $C\in (f(a), f(b))$ son ixtiyoriy son bo'lsin (40- rasm). $f(c)=C$ tenglikni qanoatlantiruvchi $c\in (a, b)$ sonning mavjudligini ko'rsatamiz. $A=\{x\in [a, b]: f(x)\leq C\}$ deb belgilaymiz. Ravshanki, $A\neq\varnothing$ (chunki $a\in A$) va yuqoridan (b son bilan) chegaralangan. Demak, aniq chegara prinsipiga binoan $c=\sup A$ son mavjud. Aniq chegaraning ta'rifiga asosan $[a, c)\subset A$ va $(c, b)\cap A=\varnothing$. Endi $c\in (a, b)$ va $f(c)=C$ bo'lishini ko'rsatamiz. Avvalo, $c<b$ ekanini ko'rsataylik ($a<c$ tengsizlik ham xuddi shu singari isbotlanadi). Faraz qilaylik, $c=b$ bo'lsin. U holda, birinchidan, f funksiya $c=b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lganligi sababli, $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$ bo'ladi. Ikkinchidan, $c=\sup A$ bo'lganligi sababli, $\forall x\in (a, b)$ nuqtada $f(x)\leq C$ bo'ladi. Demak, tengsizliklarda limitga o'tish qoidasiga ko'ra $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)\leq C$ teng-



40- rasm.

sizlikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $f(b-0)=f(b)$ ekanini e’tiborga olsak, $f(b) \leq C$ bo‘ladi. Bu esa $C \in (f(a), f(b))$ shartga ziddir. Bu ziddiyat «$c=b$ bo‘lsin» degan noo‘rin farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $c<b$. Endi $f(c)=C$ bo‘lishini ko‘rsataylik: f funksiya $c \in (a, b)$ nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun $f(c-0)=f(c+0)=f(c)$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Ravshanki, $x \in [a, c)$ bo‘lganda $f(x) \leq C$ va $x \in (c, b]$ bo‘lganda esa $f(x)>C$ tengsizliklar bajariladi. Demak, tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga binoan $f(c)=f(c-0) \leq C$ va $f(c)=f(c+0) \geq C$. Bu yerdan $f(c)=C$ bo‘lishi kelib chiqadi.

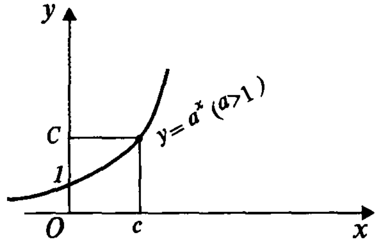
2) Yetarliligi. Aytaylik, f funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan o‘suvchi funksiya bo‘lib, $\forall C \in (f(a), f(b))$ son uchun shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilsinki, $f(c)=C$ bo‘lsin (f funksiya $[a, b]$ segmentda o‘suvchi bo‘lgani sababli, bunday c nuqta yagona bo‘ladi). f funksiyaning c nuqtada uzluksiz bo‘lishini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: f funksiya $c \in (a, b)$ nuqtada uzlukli, masalan, chapdan uzlukli bo‘lsin (1- teoremadan ma’lumki, bu uzilish birinchi tur uzilishdir). Bu holda $f(c-0)=\lim\limits_{x \to c-0} f(x)$ chekli limit mavjud, lekin $f(c-0)<f(c)$ bo‘ladi. $x \in [a, c)$ bo‘lganda $f(x) \leq f(c-0)$ va $x \in (c, b]$ bo‘lganda $f(x) \geq f(c)$ bo‘lganligidan, $C \in (f(c-0), f(c))$ son uchun $f(c)=C$ shartni qanoatlantiruvchi $c \in (a, b)$ nuqta mavjud emasligi kelib chiqadi. Bu esa teorema shartiga ziddir. Bu ziddiyat «f funksiya c nuqtada uzlukli bo‘lsin» degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, f funksiya c nuqtada uzluksiz. Xuddi shunday, f funksiyaning a va b nuqtalardagi uzluksizligini ham ko‘rsatish mumkin. Shunday qilib, f funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz ekan.

Teorema isbot qilindi.

2- eslatma. f funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan kamayuvchi funksiya bo‘lganda ham 2- teorema xuddi yuqoridagidek isbot qilinadi.

3- eslatma. 2- teorema yordamida asosiy elementar funksiyalarning o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo‘lishini (uzluksizlik ta’rifidan foydalanmasdan) ko‘rsatish mumkin. Masalan, $y=a^x$ $(a>1)$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $X=(-\infty; +\infty)$

to'plamda aniqlangan o'suvchi funksiyadir (41- rasm). Ko'rinib turibdiki, $\forall C \in (0; +\infty)$ son uchun $a^c = C$ shartni qanoatlantiruvchi $c = \log_a C \in (-\infty; +\infty)$ nuqta mavjud. Demak, 2- teoremaga binoan $y = a^x$ $(a > 1)$ funksiya $X = (-\infty; +\infty)$ to'plamda uzluksizdir.



41- rasm.

17.4. Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. *Agar f funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan, o'suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ segmentda aniqlangan, o'suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz $x = g(y)$ teskari funksiyaga ega bo'ladi.*

Isboti. 2- teoremaga binoan $Y = \{y : y = f(x),\ x \in [a, b]\} = [f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ bo'ladi. f funksiya $[a, b]$ segmentda qat'iy monoton bo'lgani sababli, har bir $y \in Y$ songa $f(x) = y$ shartni qanoatlantiruvchi faqat bitta $x \in [a, b]$ nuqta mos keladi. Shu sababli, teskari funksiyaning ta'rifiga binoan, $y = f(x)$ funksiya Y segmentda aniqlangan $x = g(y)$ teskari funksiyaga ega bo'ladi. Bundan tashqari, agar f funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, g funksiya ham $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ segmentda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi. Haqiqatan, aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi bo'lsin. $x = g(y)$ funksiyaning $[f(a), f(b)]$ segmentda o'suvchi ekanini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2$ bo'lsin. f funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi bo'lgani uchun $x_2 \leq x_1$ bo'lganda $y_2 = f(x_2) \leq y_1 = f(x_1)$, ya'ni $y_1 \geq y_2$ bo'ladi. Bu $y_1 < y_2$ shartga ziddir. Bu ziddiyat «$y_1 < y_2$ bo'lganda $x_1 \geq x_2$ bo'lsin» degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$, ya'ni f funksiya $[a, b]$ segmentda o'suvchi bo'lsa, unga teskari bo'lgan g funksiya ham $[f(a), f(b)]$ segmentda o'suvchi bo'lar ekan. f funksiya $[a, b]$ segmentda kamayuvchi bo'lsa, unga teskari bo'lgan g funksiyaning $[f(b), f(a)]$ segmentda kamayuvchi bo'lishi ham xuddi shu singari isbot qilinadi. $X = \{x : x = g(y),\ y \in Y\} = [a, b]$ bo'lgani sababli, 2- teoremaga asosan $x = g(y)$ funksiya Y segmentda uzluksiz bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

18- §. UZLUKSIZ FUNKSIYALAR HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR. TEKIS UZLUKSIZLIK

18.1. Uzluksiz funksiyalar haqidagi asosiy teoremalar. Quyidagilar o'rinli:

Funksiyaning lokal chegaralanganligi haqidagi teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.*

Isboti. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan va x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli, funksiyaning nuqtada uzluksizligining «$\varepsilon - \delta$» tilidagi ta'rifiga ko'ra, biror tayin $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon,\ x_0) > 0$ sonni ko'rsatish mumkinki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ qo'sh tengsizlikka teng kuchli. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofda chegaralanganligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

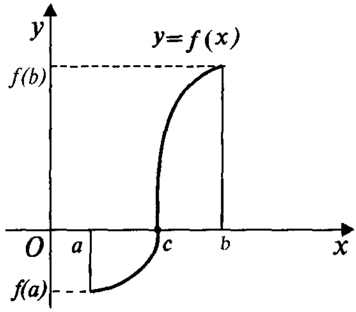
Funksiya ishorasining turg'unligi haqidagi teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi topiladiki, $f(x)$ funksiyaning bu atrofdagi ishorasi $f(x_0)$ sonning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.*

Isboti. Faraz qilaylik, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lib, $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$) bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $\varepsilon = f(x_0)$ ($\varepsilon = -f(x_0)$) son uchun shunday $\delta > 0$ sonni ko'rsatish mumkinki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$($|f(x) - f(x_0)| < -f(x_0)$) tengsizlik bajariladi. Bundan $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $0 < f(x) < 2f(x_0)$ ($2f(x_0) < f(x) < 0$) bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ atrofdagi ishorasi $f(x_0)$ sonning ishorasi bilan bir xil ekanligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

Funksiyaning nuli haqidagi teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmaning chetki a va b nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda kamida bitta shunday $c \in (a,\ b)$ nuqta topiladiki, $f(c) = 0$ bo'ladi.*

Isboti. Aniqlik uchun $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ bo'lsin deylik (42-rasm). x argument $[a, b]$ kesmada o'zgarganda $f(x)$ funksiya manfiy qiymatlar qabul qiladigan $x \in [a, b]$ nuqtalar to'plamini G harf bilan belgilaylik:

$$G = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} \subset [a, b].$$

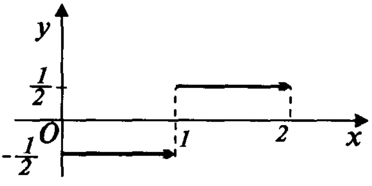


42- rasm.

Ravshanki, G sonli to'plam yuqoridan b haqiqiy son bilan chegaralangan. Demak, aniq chegara prinsipiga asosan G to'plamning aniq yuqori chegarasi ($c = \sup G$) mavjud. Biz $f(c) = 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $f(c) \neq 0$ bo'lsin. Bu holda yo $f(c) < 0$ yoki $f(c) > 0$ bo'lishi ravshan. Agar $f(c) < 0$ bo'lsa (shart bo'yicha $f(b) > 0$ bo'lgani sababli, $c < b$ bo'lishi ayon), bu holda funksiya ishorasining turg'unligi haqidagi teoremaga binoan c nuqtaning o'ng atrofida shunday x^* nuqta topiladiki, $f(x^*) < 0$ bo'ladi. Bu esa $c = \sup G$ ekanligiga ziddir. Agarda $f(c) > 0$ bo'lsa, bu holda ham yana o'sha teoremaga ko'ra c nuqtaning shunday chap atrofi topiladiki, bu atrofga tegishli bo'lgan barcha x nuqtalarda $f(x) > 0$ bo'ladi. Biroq bunday bo'lishi mumkin emas, chunki shart bo'yicha $c = \sup G$. Bu ziddiyatlar «$f(c) \neq 0$ bo'lsin» degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $f(c) = 0$. Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Funksiyaning nuli haqidagi teoremada funksiyaning qaralayotgan kesmada uzluksiz bo'lishi muhim ahamiyatga ega. Masalan, $f(x) = [x] - \frac{1}{2}$ funksiya [0; 2] kesmada aniqlangan va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{3}{2}$ qiymatlarni qabul qiladi. Biroq u [0; 2] kesmaning hech bir nuqtasida nulga aylanmaydi (43-rasm). Buning sababi, $f(x) = [x] - \frac{1}{2}$ funksiyaning $x = 1$ nuqtada uzlukli bo'lishidir: $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0}\left([x] - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = f(1)$.

Koshining oraliq qiymat haqidagi teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmaning chetki nuqtalarida bir-biriga teng bo'lmagan qiymatlarni qabul qilsa, u holda $f(a)$ va $f(b)$ sonlar orasida yotuvchi har qanday C son uchun*



43- rasm.

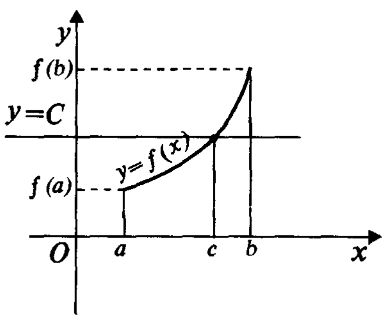
kamida bitta shunday $c \in (a, b)$ *nuqta topiladiki,* $f(c) = C$ *bo'ladi.*

I s b o t i. Aniqlik uchun $f(a) < f(b)$ deylik. C son $f(a) < C < f(b)$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy son bo'lsin. Ushbu yordamchi $g(x) = f(x) - C$ funksiyani qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, ikkita uzluksiz funksiyaning ayirmasi sifatida $g(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, bundan tashqari, $g(a) = f(a) - C < 0$, $g(b) = f(b) - C > 0$. Demak, funksiyaning nuli haqidagi teoremaga ko'ra kamida bitta shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $g(c) = 0$ bo'ladi. $g(c) = f(c) - C$ ekanligini e'tiborga olsak, $f(c) = C$ bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Bu teoremani geometrik tilda quyidagicha ifodalash mumkin: $y = C$ to'g'ri chiziq ($f(a) < C < f(b)$ yoki $f(b) < C < f(a)$) $y = f(x)$ funksiya grafigini kamida bitta nuqtada kesib o'tadi (44- rasm).

Veyershtrassning birinchi teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi.*

I s b o t i. Teskarisini faraz qilaylik: $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralanmagan bo'lsin. U holda $\forall M > 0$ son uchun shunday $x_M \in [a, b]$ nuqta topiladiki, $|f(x_M)| > M$ bo'ladi.



44- rasm.

Endi $M = n(n = 1, 2, \ldots)$ deb, shunday $\{x_n\}$, $\{x_n \in [a, b]\}$ sonli ketma-ketlikni tuzamizki, $|f(x_n)| > n$ bo'ladi. Ravshanki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan. Demak, Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_{k_n}\}$ qism ketma-ketlik ajratish mumkin. Aytaylik,

$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0$ bo'lsin. Bu yerda $a \le x_{k_n} \le b$ ekanligini e'tiborga olsak, tengsizliklarda limitga o'tish qoidasiga ko'ra $a \le x_0 \le b$ bo'ladi. Shart bo'yicha $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = f(x_0)$. Bunday bo'lishi esa mumkin emas, chunki $|f(x_n)| > n$ tengsizlikdan $|f(x_{k_n})| > k_n$ va $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \infty$ munosabatlar kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik «$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralanmagan bo'lsin» degan noto'g'ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangan bo'lar ekan. Teorema isbot qilindi.

Veyershtrassning ikkinchi teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $c \in [a, b]$ va $\bar{c} \in [a,b]$ nuqtalar topiladiki,* $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$ va $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = = f(\bar{c})$ *bo'ladi.*

I s b o t i. Ravshanki, $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = -\sup_{x\in[a,b]}(-f(x))$. Shuning uchun $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(\bar{c})(a \le \bar{c} \le b)$ ekanligini ko'rsatish bilan kifoyalanamiz. Qisqalik uchun $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = M$ deb belgilaylik. $f(\bar{c}) = M$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{c} \in [a,b]$ nuqtaning mavjudligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $f(\bar{c}) = M$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{c} \in [a,b]$ nuqta mavjud bo'lmasin. Ushbu

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} (a \le x \le b)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Farazimizga ko'ra bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz. Demak, Veyershtrassning birinchi teoremasiga binoan g(x) funksiya $[a, b]$ kesmada yuqoridan chegaralangan, ya'ni shunday $A > 0$ son topiladiki,

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \le A \quad (x \in [a,b])$$

bo‘ladi. Bu yerdan $\forall x \in [a,b]$ uchun $f(x) \le M - \frac{1}{A} < M$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas, chunki $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Bu ziddiyat «$f(\bar{c}) = M$ shartni qanoatlantiruvchi $\bar{c} \in [a,b]$ nuqta mavjud bo‘lmasin» degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Shunday qilib, shunday $\bar{c} \in [a,b]$ nuqta mavjud ekanki, $f(\bar{c}) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ bo‘lar ekan. Teorema isbot qilindi.

18.2. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror X ($X \subset \boldsymbol{R}$) to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

1- ta’rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, $|x'' - x'| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x', x'' \in X$ nuqtalar uchun $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda *tekis uzluksiz* deyiladi.

Kantor teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘ladi.*

I s b o t i. Teskarisini faraz qilaylik: $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, bu funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘lmasin. U holda biror tayin $\varepsilon > 0$ son va $\forall\delta > 0$ son uchun $|x'' - x'| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $x' \in [a, b]$ va $x'' \in [a, b]$ nuqtalar topiladiki, $|f(x'') - f(x')| \ge \varepsilon$ bo‘ladi.

Endi $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$ shartni qanoatlantiradigan $\{\delta_n\}$ $(\delta_n > 0)$ sonli ketma-ketlikni tanlab,

$$|x_n'' - x_n'| < \delta_n, |f(x_n'') - f(x_n')| \ge \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizliklarni qanoatlantiradigan $\{x_n'\}(x_n' \in [a,b])$ va $\{x_n''\}$ $(x_n'' \in [a,b])$ sonli ketma-ketliklarni tuzamiz. Ko‘rinib turibdiki, $\{x_n'\}$ va $\{x_n''\}$ sonli ketma-ketliklar chegaralangan. Demak, Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra ulardan mos ravishda, x_0' va x_0'' sonlarga yaqinlashuvchi, $\{x_{k_n}'\}$ va $\{x_{k_n}''\}$ qismiy ketma-ketliklarni ajratish mumkin. $x_n' \in [a,b]$ va $x_n'' \in [a,b]$ bo‘lgani uchun, ma’lumki $x_0' \in [a,b]$ va $x_0'' \in [a,b]$. (1) tengsizliklarning birinchisidan

$|x'_{k_n} - x''_{k_n}| < \delta_{k_n}$ yoki $x''_{k_n} - \delta_{k_n} < x'_{k_n} < x''_{k_n} + \delta_{k_n}$ bo‘ladi. Bu yerdan $\lim\limits_{n\to\infty}(x''_{k_n} - \delta_{k_n}) \le \lim\limits_{n\to\infty} x'_{k_n} \le \lim\limits_{n\to\infty}(x''_{k_n} + \delta_{k_n})$ yoki $x''_0 \le x'_0 \le x''_0$. Demak, $x''_0 = x'_0$. Shart bo‘yicha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x'_0)$. Shunday qilib, $\{f(x''_n)\}$ ва $\{f(x'_n)\}$ sonli ketma-ketliklar ayni bitta $f(x'_0)$ limit qiymatga ega bo‘ladi. Bunday bo‘lishi esa mumkin emas, chunki $|f(x''_n) - f(x'_n)| \ge \varepsilon$. Bu ziddiyat «$[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘lmasin» degan noto‘g‘ri farazimizdan kelib chiqdi. Demak, $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiya shu kesmada tekis uzluksiz bo‘lar ekan. Teorema isbot qilindi.

2- ta’rif. Ushbu

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)$$

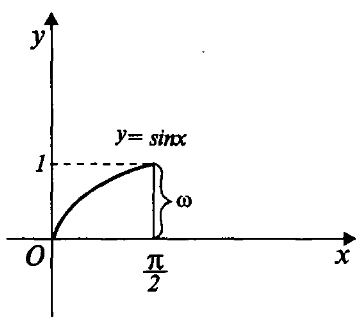
son X to‘plamda chegaralangan $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi *tebranishi* deb ataladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$ funksiyaning $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmadagi tebranishini topaylik (45- rasm):

$$\omega = \omega\left(\sin x; \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \sup_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \sin x - \inf_{x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \sin x = 1 - 0 = 1.$$

Kantor teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni ko‘rsatish mumkinki, $f(x)$ funksiyaning uzunligi δ sondan kichik bo‘lgan $\forall[c, d] \subset [a, b]$ qism kesmadagi tebranishi ε sondan kichik bo‘ladi.



45- rasm.

I s b o t i. Kantor teoremasiga binoan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda tekis uzluksiz. Shuning uchun $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni ko'rsatish mumkinki, $|x'' - x'| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x', x'' \in [a, b]$ sonlar uchun $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Aytaylik, $[c, d]$ kesma $[a, b]$ kesmaning $d - c < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy qism kesmasi bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[c, d]$ kesmada zluksiz bo'lgani uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga binoan shunday $x', x'' \in [c, d]$ nuqtalar topiladiki, $m = \inf_{x \in [c, d]} f(x) = f(x')$ va $M = \sup_{x \in [c, d]} f(x) = f(x'')$ bo'ladi. Demak, $|x'' - x'| < \delta$ (chunki $d - c < \delta$) bo'lgani sababli, yuqoridagiga ko'ra $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Ravshanki, $f(x'') - f(x') = M - m = \omega(f; [c, d])$. Shunday qilib, $\omega(f; [c, d]) < \varepsilon$. Natija isbot qilindi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Funksiyaning nuqtada va oraliqda uzluksizligini ta'riflang. Bir tomonli uzluksiz deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning nuqtada ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'lishi uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart bo'ladimi? Isbotlang.
3. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallarni bilasizmi? Murakkab funksiyaning uzluksizligi, darajali-ko'rsatkichli funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremalarni isbotlang.
4. $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ aniqmas ifodalar deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
5. Funksiyaning uzilish nuqtasi deb nimaga aytiladi? Ularning sinflarini ayting, misollar keltiring.
6. Bo'lakli-uzluksiz tushunchasini ta'riflang. Monoton funksiyaning uzilish nuqtalari va uzluksizligi haqidagi teoremalarni isbotlang.
7. Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotlang.
8. Funksiyaning lokal chegaralanganligi, funksiya ishorasining turg'unligi haqidagi teoremalarni isbotlang.
9. Funksiyaning nuli haqidagi, Koshining oraliq qiymat haqidagi teoremalarni isbotlang.
10. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalarini isbotlang.
11. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasini ta'riflang. Kantor teoremasini isbotlang.
12. X ($X \subset \mathbf{R}$) to'plamda chegaralangan funksiyaning X to'plamdagi tebranishi deb nimaga aytiladi?

II BOB
DIFFERENSIAL HISOB

1- §. HOSILA

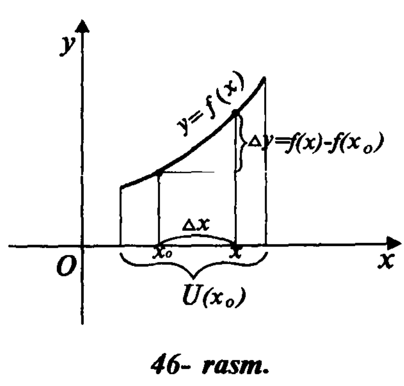
Biz endi matematik analizning asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lgan differensial hisob va uning tatbiqlarini o‘rganamiz.

Dastavval argument orttirmasi, funksiya orttirmasi va hosila tushunchalari bilan tanishamiz.

1.1. Argument va funksiya orttirmalari. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U(x_0)$ atrofida aniqlangan va $x\in \mathring{U}(x_0)$ bo‘lsin (46- rasm). Ushbu $x-x_0$ ayirma «x argumentning x_0 nuqtada qabul qilgan orttirmasi» yoki qisqacha «argument orttirmasi» deb ataladi va Δx bilan belgilanadi: $\Delta x=x-x_0$. Bu yerdan

$$x=x_0+\Delta x. \qquad (1)$$

Ushbu $f(x)-f(x_0)$ ayirma «x argument x_0 nuqtada Δx orttirma olganda f funksiyaning qabul qilgan orttirmasi» yoki qisqacha «funksiya orttirmasi» deb aytiladi va Δy, Δf, $\Delta f(x_0)$ simvollarning istalgan bittasi bilan belgilanadi: $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. Bu yerda (1) ifodani e’tiborga olsak, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ bo‘ladi. Masalan, $y=x^2$ funksiyaning, x argument $x_0=1$ nuqtada $\Delta x=0{,}1$ orttirma olganda qabul qilgan orttirmasi quyidagicha bo‘ladi:



46- rasm.

$$\Delta y\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0,1}}=(1+0{,}1)^2-1^2=$$
$$=1{,}21-1=0{,}21.$$

1.2. Hosilaning ta'rifi. Agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chekli limit mavjud bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *hosilasi* deb ataladi va $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ (Lagranj) belgilarning istalgan biri bilan belgilanadi:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

1- eslatma. (1) tenglikka ko'ra (2) formulani quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

1- misol. Ushbu $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi hosilasi hisoblansin.

Y e c h i s h. Ta'rif bo'yicha

$$y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{y(x) - y(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3.$$

2- misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} \, (x \neq 0), \\ 0 \qquad (x = 0) \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga egami?

Y e c h i s h. Ta'rif bo'yicha

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}.$$

Ma'lumki, oxirgi limit mavjud emas. Demak, $f(x)$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

1.3. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

1°. Agar $y = C$ (C=Const) bo'lsa, u holda $y' = 0$ bo'ladi.

I s b o t i. Faraz qilaylik, $y=f(x)=C$ ($C=$ Const) o'zgarmas funksiya berilgan bo'lsin. Agar x argumentga ixtiyoriy tayin x nuqtada Δx ($\Delta x \neq 0$) orttirma bersak, berilgan funksiya $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$ orttirma «qabul qiladi», ya'ni orttirma olmaydi. Shuning uchun hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

2°. Agar $y=x^{\alpha}$ (α — ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son) bo'lsa, u holda $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ bo'ladi.

I s b o t i. Avval $y=x^{\alpha}$ darajali funksiya haqida ikki og'iz so'z aytaylik. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α songa bog'liq bo'ladi. Masalan, α son manfiy butun son bo'lganida, funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, manfiymas butun son bo'lganida esa $D(y)=(-\infty, +\infty)$. Agarda $\alpha=\frac{1}{m}(m\in N, m\neq 1)$ bo'lsa, u holda m son juft bo'lganda $D(y)=[0; +\infty)$; m toq bo'lganda esa $D(y)=(-\infty, +\infty)$ bo'ladi. Agar α son irratsional son bo'lsa, bu holda $D(y)=(0; +\infty)$ deb olinadi (bunda $\alpha>0$ bo'lganida $D(y)=[0; +\infty)$ bo'ladi).

Endi $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ formulani isbot qilamiz. Albatta, yuqorida aytilganlarga asosan bu hosila funksiyaning aniqlanish sohasi ham α songa bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik, $x\neq 0$ bo'lsin. U holda hosilaning ta'rifiga asosan,

$$y'=(x^{\alpha})'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right)}{\Delta x}=$$

$$=x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha x^{\alpha-1}$$

(biz bu yerda limitlar nazariyasida isbot qilingan

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha$$

(α — o'zgarmas haqiqiy son) formuladan foydalandik).

2- eslatma. Agar $\alpha>1$ bo'lsa, u holda $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ formula $x=0$ nuqtada ham o'rinli bo'ladi.

3°. Agar $y = a^x$ $(0<a\neq 1)$ bo'lsa, $y' = a^x \ln a$ bo'ladi.
I s b o t i. Hosilaning ta'rifiga ko'ra

$$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Biz bu yerda

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a \quad (0 < a \neq 1)$$

formuladan foydalandik.

Xususan, $(e^x)' = e^x$, chunki $\ln e = 1$.

4°. Agar $y = \log_a x$ $(0< a\neq 1,\ x > 0)$ bo'lsa, u holda

$$y' = (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1, x > 0)$$

bo'ladi.

I s b o t i. Ta'rif bo'yicha $y' = (\log_a x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right\}^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1, x > 0).$$

Biz bu yerda logarifmik funksiyaning uzluksizligidan va ikkinchi ajoyib limitdan foydalandik.

Natija. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

5°. Agar $y = \sin x$ bo'lsa, u holda $y' = \cos x$ bo'ladi.

I s b o t i. Ta'rif bo'yicha

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

Bunda biz birinchi ajoyib limitdan va $y = \cos x$ funksiyaning uzluksizligidan foydalandik.

6°. Agar $y=\cos x$ bo'lsa, u holda $y'=-\sin x$ bo'ladi.
I s b o t i. Ta'rif bo'yicha

$$y'=(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\left(-\sin\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=(-1)\cdot\sin\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=-\sin x.$$

Bunda biz $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ formuladan, $y=\sin x$ funksiyaning toqligidan va uzluksizligidan hamda birinchi ajoyib limitdan foydalandik.

7°. Agar $y=\operatorname{tg}x$ bo'lsa, u holda $y'=\frac{1}{\cos^2 x}(x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in \boldsymbol{Z})$ bo'ladi.

I s b o t i. Ta'rif bo'yicha $y'=(\operatorname{tg}x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg}x}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\Delta x\cos(x+\Delta x)\cos x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\quad (x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in \boldsymbol{Z})$$

Biz bu yerda $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ formuladan, $y=\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalandik.

8°. Agar $y=\operatorname{ctg}x$ bo'lsa, u holda $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}(x\neq n\pi,n\in \boldsymbol{Z})$ bo'ladi.
I s b o t i. Ta'rif bo'yicha

$$y'=(\operatorname{ctg}x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x)-\operatorname{ctg}x}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\Delta x\cdot\sin(x+\Delta x)\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 x}\quad (x\neq n\pi,n\in \boldsymbol{Z}).$$

Bunda biz $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ formuladan, $y=\sin x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalandik.

Endi teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalarini qaraymiz. Buning uchun dastlab teskari funksiyaning hosilasi haqidagi quyidagi teoremani isbot qilamiz:

Teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya $X\,(X\subset \mathbf{R})$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va qat'iy monoton bo'lib, biror $x_0\in X$ nuqtada nuldan farqli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=g(y)(y\in Y, Y=\{y: y=f(x),\ x\in X\})$ funksiya $y_0=f(x_0)\in Y$ nuqtada hosilaga ega, shu bilan birga*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Berilgan $y=f(x)$ funksiya X oraliqda qat'iy monoton va uzluksiz bo'lgani sababli, teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan $\{y: y=f(x),\ x\in X\}$ to'plamda aniqlangan bir qiymatli $x=g(y)$ teskari funksiya mavjud. Bundan tashqari, agar $y=f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, $x=g(y)$ teskari funksiya ham $\{y: y=f(x),\ x\in X\}$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Shart bo'yicha

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad (f'(x_0)\neq 0)$$

chekli limit mavjud. Endi $x=g(y)$ funksiyaning y argumentiga $y=y_0$ nuqtada ixtiyoriy Δy $(\Delta y\neq 0,\ y_0+\Delta y\in\{y: y=f(x),\ x\in X\})$ orttirma beramiz. U holda $x=g(y)$ funksiya biror $\Delta x=g(y_0+\Delta y)-$ $-\,g(y_0)$ orttirmani qabul qiladi. Ushbu

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}$$

nisbatni qaraymiz. $y=f(x)$ funksiya bir qiymatli bo'lganligi sababli, $\Delta y\neq 0$ bo'lganda Δx ham nuldan farqli bo'ladi. Bundan tashqari, $x=g(y)$ funksiya $y=y_0$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta y\to 0}\Delta x=\lim_{\Delta y\to 0}\left(g(y_0+\Delta y)-g(y_0)\right)=$$

$$=g\left(\lim_{\Delta y\to 0}(y_0+\Delta y)\right)-g(y_0)=g(y_0)-g(y_0)=0.$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$g'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

ya'ni $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ $(f'(x_0)\neq 0)$.

Teorema shartiga ko'ra $f'(x_0)$ chekli hosila mavjud bo'lganligi sababli, yuqoridagi tenglikdan $g'(y_0)$ chekli hosilaning mavjudligi kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

3- eslatma. Yuqoridagi teoremada x_0 nuqta X oraliqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $x=g(y)$ funksiyaning hosilasini topish formulasini

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}\quad (f'(x)\neq 0, x\in X).$$

ko'rinishda yoki undan ham qulayroq

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\quad (y'_x\neq 0, x\in X) \qquad (*)$$

ko'rinishda yozish amaliy jihatdan juda qulay. $y=f(x)$ va $x=g(y)$ funksiyalar bir-biriga teskari funksiyalar bo'lganligi sababli, amaliyotda (*) formulani

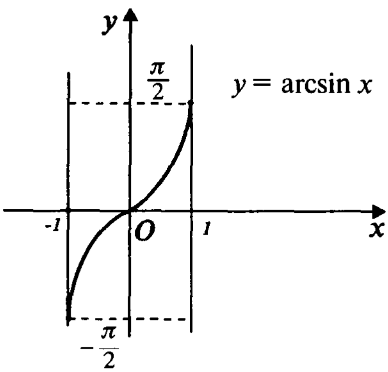
$$y'_x=\frac{1}{x'_y}\quad \left(x'_y\neq 0, y\in Y\right) \qquad (**)$$

ko'rinishda qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu yerda $Y=\{y: y=f(x),\ x\in X\}$. Bu formulanı biz bu yerda $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$ va $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ teskari trigonometrik funksiyalarning hosila funksiyalarini topishda qo'llaymiz.

9°. Agar $y=\arcsin x$ bo'lsa, u holda $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$ bo'ladi.

I s b o t i. $y=\arcsin x$ funksiya $[-1;\ 1]$ kesmada aniqlangan bir qiymatli funksiya bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami $Y=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ segmentdan iborat (47- rasm). Ma’lumki, bu funksiya $Y=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada bir qiymatli, o‘suvchi va uzluksiz bo‘lgan $x=\sin y$ funksiyaga teskari bo‘lgan funksiyadir. $x=\sin y$ funksiya $\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtada nuldan farqli hosilaga ega bo‘lgani sababli, (**) formulaga binoan

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}.$$



47- rasm.

$\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nuqtada $\cos y>0$ bo‘lgani uchun $\cos y=\ =\sqrt{1-\sin^2 y}$ bo‘ladi. Demak, $\sin y=x$ ekanligini e’tiborga olsak, $y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$ formula hosil bo‘ladi.

10°. Agar $y=\arccos x$ bo‘lsa, u holda $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$ bo‘ladi.

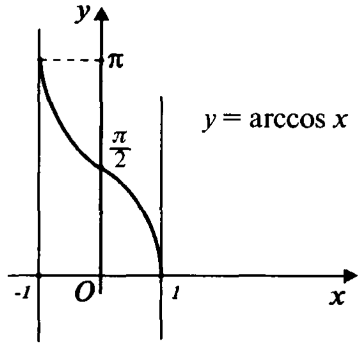
I s b o t i. $y=\arccos x$ funksiya $X=[-1;\ 1]$ kesmada aniqlangan, bir qiymatli, kamayuvchi funksiya bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami $Y=[0;\ \pi]$ kesmadan iborat (48- rasm). Bu funksiya $Y=$ $=[0;\ \pi]$ kesmada aniqlangan, bir qiymatli, kamayuvchi va uzluksiz bo‘lgan $x=\cos y$ funksiyaga teskari funksiyadir. Bundan tashqari, $x=\cos y$ funksiya $\forall y\in(0;\pi)$ nuqtada nuldan farqli bo‘lgan $x'_y=-\sin y$ hosilaga ega. Demak, (**) formulaga binoan,

$$y'=(\arccos x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{-\sin y}$$

bo‘ladi. Bu yerda $\forall y\in(0;\pi)$ uchun $\sin y>0$ ekanini e’tiborga olgan holda, $\sin\ y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\ =\sqrt{1-x^2}$ deb yozish mumkin. Shunday qilib,

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(-1 < x < 1).$$

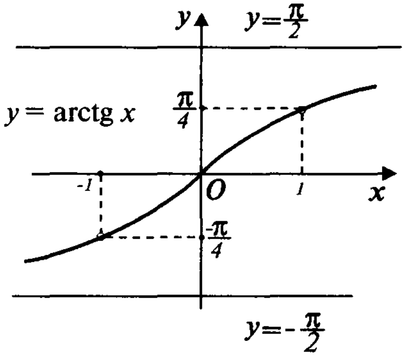


48- rasm.

11°. Agar $y = \operatorname{arctg} x$ bo‘lsa, u holda $y' = \frac{1}{1+x^2}$ bo‘ladi.

I s b o t i. $y = \operatorname{arctg} x$ funksiya $X = (-\infty, +\infty)$ cheksiz to‘g‘ri chiziqda aniqlangan bir qiymatli funksiya bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqdan iborat (49- rasm). Bu funksiya $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda aniqlangan, bir qiymatli, o‘suvchi va uzluksiz bo‘lgan $x = \operatorname{tg} y$ funksiyaga teskari bo‘lgan funksiyadir. $x = \operatorname{tg} y$ funksiya $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nuqtada nuldan farqli

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$$



49- rasm.

hosilaga ega bo‘lganligi sababli, (**) formulaga binoan

$$y' = (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

bo‘ladi. Bu yerda

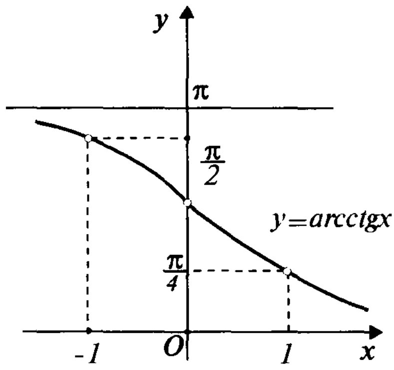
$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$$

ayniyatni va $\operatorname{tg} y = x$ ekanini e’tiborga olsak,

$$y' = (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

formula hosil bo‘ladi.

12°. Agar $y = \operatorname{arcctg} x$ bo‘lsa, u holda $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ $(-\infty < x < +\infty)$ bo‘ladi.



50- rasm.

I s b o t i. $y = \text{arcctg}x$ funksiya $X = (-\infty, +\infty)$ cheksiz to‘g‘ri chiziqda aniqlangan, bir qiymatli, kamayuvchi va uzluksiz funksiya bo‘lib, uning qiymatlari to‘plami $Y = (0; \pi)$ oraliqdan iborat (50-rasm). Bu funksiya $Y = (0; \pi)$ oraliqda aniqlangan, bir qiymatli, kamayuvchi va uzluksiz bo‘lgan $x = \text{ctg}y$ funksiyaga teskari bo‘lgan funksiyadir. $x = \text{ctg}y$ funksiya $\forall y \in (0;\pi)$ nuqtada nuldan farqli

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}$$

hosilaga ega bo‘lganligi sababli, (**) formulaga binoan

$$y' = (\text{arc tg}x)' = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y \quad (0 < y < \pi)$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$\sin^2 y = \frac{1}{1+\text{ctg}^2 y}$$

ayniyatni va $\text{ctg}y = x$ ekanini e’tiborga olsak,

$$y' = (\text{arc ctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

formula hosil bo‘ladi.

1.4. Hosilalar jadvali. Amaliy qulaylik maqsadida, yuqorida isbot qilingan 1°—12° teoremalarga ko‘ra quyidagi jadvalni tuzamiz:

№	y	y′	№	y	y′
1	C	0	5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2	x	1	6	x^a	ax^{a-1}
3	x^n	nx^{n-1}	7	$a^x (0<a\neq 1)$	$a^x \ln a$
4	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	8	e^x	e^x

<table>
<tr><th>№</th><th>y</th><th>y′</th><th>№</th><th>y</th><th>y′</th></tr>
<tr><td>9</td><td>$\log_a x$</td><td>$\frac{1}{x\ln a}$</td><td>15</td><td>arcsinx</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>lnx</td><td>$\frac{1}{x}$</td><td>16</td><td>arccosx</td><td>$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>sinx</td><td>cosx</td><td rowspan="2">17</td><td rowspan="2">arctgx</td><td rowspan="2">$\frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>cosx</td><td>−sinx</td></tr>
<tr><td>13</td><td>tgx</td><td>$\frac{1}{\cos^2 x}$</td><td rowspan="2">18</td><td rowspan="2">arcctgx</td><td rowspan="2">$-\frac{1}{1+x^2}$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>ctgx</td><td>$-\frac{1}{\sin^2 x}$</td></tr>
</table>

Bu jadval *hosilalar jadvali* deb ataladi va u hosila hisoblashga doir masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

2- §. BIR TOMONLI HOSILALAR. DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR

2.1. Bir tomonli hosilalar. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va $x\in X$, $x+\Delta x\in X$ bo‘lsin.

1- ta’rif. Agar

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\left(\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *o‘ng (chap) hosilasi* deyiladi va $f'(x+0)$ $(f'(x-0))$ kabi belgilanadi:

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\left(f'(x-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

Funksiyaning biror nuqtadagi o‘ng va chap hosilalari *bir tomonli hosilalar* deb ataladi.

1- misol. $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi bir tomonli hosilalari topilsin.

Y e c h i s h. Ta'rif bo'yicha

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} 1 = 1,$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} (-1) = -1.$$

Quyidagi teorema o'rinli:

1- t e o r e m a. *$f'(x)$ hosilaning mavjud bo'lishi uchun $f'(x-0)$ va $f'(x+0)$ bir tomonli hosilalarning mavjud bo'lishi, shu bilan birga $f'(x-0) = f'(x+0)$ bo'lishi zarur va yetarli.*

I s b o t i. Ma'lumki, funksiyaning biror nuqtada limit qiymatga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada bir tomonli limitlarga ega bo'lishi hamda ana shu bir tomonli limitlarning bir-biriga teng bo'lishi zarur va yetarli. Demak,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

chekli limitning mavjud bo'lishi uchun $f'(x-0)$ va $f'(x+0)$ bir tomonli hosilalarning mavjud bo'lishi, shu bilan birga $f'(x-0) = f'(x+0) = f'(x)$ bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

Bu teorema funksiyaning berilgan nuqtada hosilaga ega yoki ega emasligini tekshirishda muhim rol o'ynaydi. Masalan, 1- misoldan ko'rinib turibdiki, $f'(-0) \neq f'(+0)$. Demak, yuqoridagi teoremaga asosan «$f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas» deya olamiz.

Yana bitta misol qaraylik:

2- misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga egami?

Y e c h i s h. Ta'rif bo'yicha

$$f'(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to +0} \sin \frac{1}{x}.$$

Ma'lumki, oxirgi limit mavjud emas. Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra, berilgan $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2.2. Differensiallanuvchi funksiya tushunchasi. Endi differensial hisobning yana bir muhim tushunchasi bilan tanishamiz. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $x \in X$, $x + \Delta x \in X$ bo'lsin.

2- ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning (x argument x nuqtada Δx orttirma olganda qabul qilgan) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmasi x nuqtada

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \tag{1}$$

ko'rinishda tasvirlansa, bu holda $f(x)$ funksiya $x \in X$ *nuqtada differensiallanuvchi* deyiladi. Bu yerdagi A miqdor, umuman aytganda, x nuqtaga bog'liq bo'lib, Δx orttirmaga bog'liq bo'lmagan biror son; $\alpha = \alpha(\Delta x)$ va $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

2- teorema. *$y = f(x)$ funksiyaning berilgan x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun bu funksiyaning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirma x nuqtada

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0\right)$$

ko'rinishda tasvirlansin. Demak,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A.$$

Shart bo'yicha bu yerdagi A chekli son mavjud bo'lgani uchun $f'(x)$ chekli hosila ham mavjud bo'ladi.

2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli hosila mavjud bo'lsin. Bundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0\right)$$

deb yozishimiz mumkin. Demak, $f'(x) = A$ deb belgilasak,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0\right)$$

bo'ladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi ekanligini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

Bu teoremaga asosan funksiyaning nuqtada differensiallanishi tushunchasini quyidagicha ta'riflashimiz mumkin: agar $f(x)$ funksiya x nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, bu holda $f(x)$ funksiya *x nuqtada differensiallanuvchi* deb ataladi.

Bu ta'rifga ko'ra hosila hisoblashni odatda *differensiallash* deb yuritiladi.

Yana bir muhim teoremani isbot qilamiz:

3- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

chekli hosila mavjud bo'lsin. Bundan

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0\right)$$

yoki

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Bu yerda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x\right) = 0.$$

Demak, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x nuqtada uzluksizligini bildiradi.

1-eslatma. Shuni aytishimiz lozimki, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan bu funksiyaning shu nuqtada differensiallanuvchiligi har doim ham kelib chiqavermaydi. Boshqacha aytganda, funksiyaning uzluksizligi uning differensiallanuvchi bo'lishi uchun zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Buni quyidagi misol orqali tushuntirib berishimiz mumkin. $f(x) = |x|$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, chunki

$$f(-0)=\lim_{\Delta x\to -0}|x|=\lim_{\Delta x\to -0}(-x)=0=f(0),$$

$$f(+0)=\lim_{\Delta x\to +0}|x|=\lim_{\Delta x\to +0}x=0=f(0).$$

Biroq bu funksiya $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emas (buni biz yuqorida ko'rdik).

2.3. Differensiallashning asosiy qoidalari va formulalari. Endi biz differensiallashning asosiy qoidalari va formulalari bilan tanishamiz:

1°. Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi va $C=\text{Const}$ bo'lsa, u holda $Cf(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$(Cf(x))'=Cf'(x) \tag{A}$$

formula o'rinli bo'ladi. Boshqacha aytganda, o'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

I s b o t i. Faraz qilaylik,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

chekli hosila mavjud va $C=\text{Const}$ bo'lsin. Hosilaning ta'rifiga ko'ra,

$$(Cf(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{Cf(x+\Delta x)-Cf(x)}{\Delta x}=C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=Cf'(x).$$

2°. Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, $x\in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $u+v$, $u-v$, uv va $\frac{u}{v}$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x), \tag{B}$$

$$(u(x)\,v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)\,v'(x), \tag{D}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0) \tag{E}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

I s b o t i. Faraz qilaylik,

$$u'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x},$$

$$v'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x},$$

chekli limitlar mavjud bo'lsin. U holda ta'rif bo'yicha:

$$(u(x)\pm v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x))-(u(x)\pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u'(x) \pm v'(x);$$

$$(u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) +$$

$$+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(biz bu yerda $v = v(x)$ funksiyaning x nuqtada uzluksizligidan foydalandik);

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)}{\Delta x} - \frac{[v(x+\Delta x)-v(x)]u(x)}{\Delta x}\right\}\times$$

$$\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)} = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x)\neq 0).$$

Biz bu yerda ham $v = v(x)$ funksiyaning x nuqtada uzluksizligidan (bu xususiyat uning differensiallanuvchanligidan kelib chiqadi) foydalandik.

3°. Agar X oraliqda $f(g(x))$ murakkab funksiya aniqlangan bo'lib, $t = g(x)$ va $f(t)$ funksiyalar mos ravishda $x \in X$ va $t = g(x) \in E(g)$ nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x), \tag{F}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. $t = g(x)$ funksiyaning x argumenti x nuqtada Δx ($\Delta x \neq 0$) orttirma olganda t funksiya biror $\Delta t = g(x + \Delta x) - - g(x)$ orttirma oladi. Bu orttirmaga o'z navbatida $f(t)$ funksiyaning $\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t)$ orttirmasi mos keladi. Shart bo'yicha $f(t)$ funksiya $t = g(x) \in E(g)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun ta'rifga ko'ra,

$$\Delta f = f'(t)\Delta t + \alpha \cdot \Delta t \quad \left(\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0\right)$$

bo'ladi. Demak, hosilaning ta'rifiga asosan,

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(t)\Delta t + \alpha \Delta t}{\Delta x} = f'(g(x)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = f'(g(x))g'(x),$$

chunki $\Delta x \to 0$ da $\Delta t \to 0$ (bu $t = g(x)$ funksiyaning uzluksizligidan kelib chiqadi) va shart bo'yicha

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

chekli hosila mavjud. Teorema isbot qilindi.

3- misol. $y = \ln \cos x$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. Agar $t = \cos x$, $y = \ln t$ desak,

$$y' = y'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t} \cdot t'_x = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg} x.$$

4°. Logarifmik differensiallash. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya x nuqtada musbat va differensiallanuvchi bo'lsin. U holda x nuqtada

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bu formulani hosila hisoblashda qo‘llash uchun dastlab berilgan ifoda natural asosga nisbatan logarifmlanadi. So‘ngra hosila hisoblanadi va undan y' hosila aniqlanadi. Hosila hisoblashning bu usuli *logarifmik differensiallash* deyiladi. Bitta misol qaraylik:

4- misol. $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ funksiyaning hosilasi topilsin. Bu yerda $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi funksiyalar.

Y e c h i s h. Dastlab, berilgan $y = u(x)^{v(x)}$ ifodani logarifmlaymiz: $\ln y = v(x)\ln u(x)$. Bu yerdan

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)$$

yoki

$$y' = y\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x)\right).$$

Bunda $y = u(x)^{v(x)}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$\left(u^{v}\right)' = u^{v}\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) \quad (u > 0) \qquad \text{(G)}$$

bo‘ladi.

2- eslatma. (G) formuladan $y = u^{v}$ darajali-ko‘rsatkichli funksiya hosilasini hisoblashning quyidagi *formal qoidasi* kelib chiqadi: *$y = u^{v}$ darajali-ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasini topish uchun avval undan darajali funksiya sifatida hosila hisoblab, so‘ngra ko‘rsatkichli funksiya sifatida hosila hisoblab, natijalarni qo‘shish lozim:*

$$\left(u^{v}\right)' = vu^{v-1}u' + u^{v}v'\ln u = u^{v}\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) \quad (u > 0).$$

Haqiqatan, (G) formuladan

$$\left(u^{v}\right)' = u^{v}\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) = vu^{v-1}u' + u^{v}v'\ln u.$$

Ko‘rinib turibdiki, formal ravishda birinchi qo‘shiluvchi u^{v} funksiyadan darajali funksiya sifatida olingan hosilani, ikkinchi qo‘shiluvchi esa u^{v} funksiyadan ko‘rsatkichli funksiya sifatida olingan hosilani bildiradi.

Amaliyotda bu formal qoidadan foydalanish hosila hisoblash jarayonini ancha qisqartiradi. Masalan,

$$(x^x)' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x) \qquad (x > 0).$$

3- §. HOSILANING GEOMETRIK VA FIZIK MA'NOLARI. CHEKSIZ HOSILALAR. DIFFERENSIAL

3.1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

chekli limit mavjud bo'lsin. $f'(x_0)$ hosilaning geometrik ma'nosi quyidagi teorema orqali ifodalanadi:

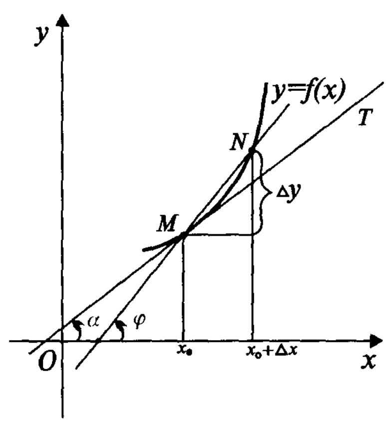
1- teorema. *$f'(x_0)$ hosila $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0; f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng:*

$$f'(x_0) = k \quad (k = \text{tg}\alpha),$$

bu yerda α — urinmaning abssissalar o'qi musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi.

Isboti. Faraz qilaylik, (1) chekli hosila mavjud bo'lsin. $y = f(x)$ funksiyaning x argumenti x_0 nuqtada Δx ($\Delta x \neq 0$) orttirma olganda, $y = f(x)$ funksiya grafigida yotgan $M(x_0; f(x_0))$ nuqta shu grafikda yotuvchi $N(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ nuqtaga siljiydi (51- rasm). Endi M va N nuqtalar orqali $y = f(x)$ funksiya grafigiga (MN):

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$



51- rasm.

kesuvchini o‘tkazamiz (bu yerda x va y lar orqali kesuvchi grafigida yotgan nuqtalarning abssissasi va ordinatasi belgilangan). Bu tenglamadan

$$y = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0) \tag{2}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (MN) kesuvchining burchak koeffitsientli tenglamasidir:

$$k_1 = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\varphi.$$

Bunda φ — (MN) kesuvchining abssissalar o‘qi musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagi. (2) tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tamiz. U holda, x va y lar Δx ga bog‘liq bo‘lmaganligi sababli,

$$y = (x - x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + f(x_0)$$

bo‘ladi. Demak,

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{3}$$

Ikkinchi tomondan, 51- rasmdan ko‘rinib turibdiki, N nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigi bo‘ylab M nuqtaga intilganda (ya'ni $\Delta x \to 0$ da) (MN) kesuvchi $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0; f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan (MT) urinma holatini oladi. Shunday qilib, (3) tenglama (MT) urinmaning burchak koeffitsientli tenglamasini bildiradi. Unda $k = f'(x_0)(k = \mathrm{tg}\alpha)$. Teorema isbot qilindi.

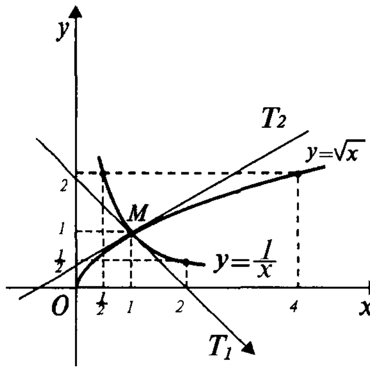
1- misol. $y = \frac{1}{x}$ va $y = \sqrt{x}$ egri chiziqlarning bir-biri bilan qanday burchak ostida kesishishi aniqlansin.

Y e c h i s h. $\frac{1}{x} = \sqrt{x}(x > 0)$ tenglamani yechib, berilgan chiziqlarning bir-biri bilan $M(1;\ 1)$ nuqtada kesishishini aniqlaymiz (52- rasm). So‘ngra berilgan chiziqlarga $M(1;\ 1)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsientlarini topamiz:

$$k_1 = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=1} = -1,\quad k_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Demak, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3.$ Bundan $\alpha=\operatorname{arctg}3.$

3.2. Hosilaning fizik ma'nosi. Fizika nuqtai nazaridan matematikaning hosila tushunchasi turli fizik tushunchalarni ifodalashi mumkin. Masalan:



52- rasm.

1) Faraz qilaylik, moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $y=f(x)$ qonun bo‘yicha harakat qilayotgan bo‘lsin (x —vaqt, y esa x vaqt davomida bosib o‘tilgan yo‘l). Ravshanki, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirma harakatdagi moddiy nuqtaning x dan $x+\Delta x$ gacha bo‘lgan vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘lini,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}(\Delta x\neq 0)$$

nisbat esa moddiy nuqtaning shu vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezligini bildiradi:

$$v_{o'rt}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Bu yerda, $\Delta x\to 0$ da limitga o‘tsak,

$$v(x)=\lim_{\Delta x\to 0}v_{o'rt}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

Shunday qilib, *mexanika nuqtai nazaridan $f'(x)$ hosila $y=f(x)$ qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakat qilayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi oniy tezligini bildiradi:*

$$f'(x)=v(x).$$

2) Faraz qilaylik, o‘tkazgichning ko‘ndalang kesimi orqali x vaqt momentida $y=f(x)$ elektr miqdori oqib o‘tsin. U holda

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ orttirma o'tkazgichning ko'ndalang kesimi orqali $[x, x+\Delta x]$ vaqt oralig'ida oqib o'tgan elektr miqdorini,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} (\Delta x \neq 0)$$

nisbat esa Δx vaqt oralig'idagi o'rtacha tok kuchini bildiradi. Demak, $\Delta x \to 0$ da bu nisbatning limit holati, ya'ni $f'(x)$ hosila x vaqt momentidagi *tok kuchini* ifodalaydi:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = I(x).$$

3) Faraz qilaylik, biror jismni 0°C dan x°C gacha qizdirish uchun $y = f(x)$ issiqlik miqdori kerak bo'lsin. U holda $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ orttirma jismni x°C dan $(x+\Delta x)$°C gacha qizdirish uchun sarf qilingan issiqlik miqdorini,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} (\Delta x \neq 0)$$

nisbat esa jismning x°C dan $(x+\Delta x)$°C gacha qizdirilgandagi o'rtacha issiqlik sig'imini bildiradi. Demak, issiqlik fizikasi nuqtai nazaridan $f'(x)$ hosila jismning berilgan x haroratdagi issiqlik sig'imini ifodalaydi:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = C(x).$$

3.3. Cheksiz hosilalar. Biz shu paytgacha chekli hosilalar haqida so'z yuritdik. Endi cheksiz hosilalar bilan tanishamiz. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va $x_0 \in X$, $x_0 + \Delta x \in X$ bo'lsin.

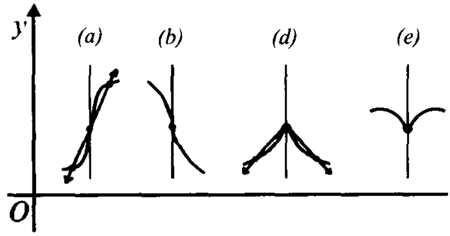
1- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \text{ (yoki } -\infty)$$

bo'lsa, bu holda $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada cheksiz hosilaga ega* deyiladi va $f'(x_0) = +\infty$ (yoki $f'(x_0) = -\infty$) ko'rinishda yoziladi. Masalan, agar $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bo'lsa, $f'(0) = +\infty$ bo'ladi. Haqiqatan, ta'rif bo'yicha

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty .$$

Cheksiz hosilani ham geometrik nuqtai nazardan urinmaning burchak koeffitsienti deyish mumkin (bu holda urinma ordinatalar o'qiga parallel bo'ladi) (53-rasm). Bundan tashqari, mazkur holda ham bir tomonli hosilalar haqida so'z yuritish mumkin. Shuni aytishimiz lozimki, bu holda bir tomonli hosila faqat tayin ishorali cheksizlikka (ya'ni $+\infty$ yoki $-\infty$) teng bo'ladi. Aniqlik uchun,

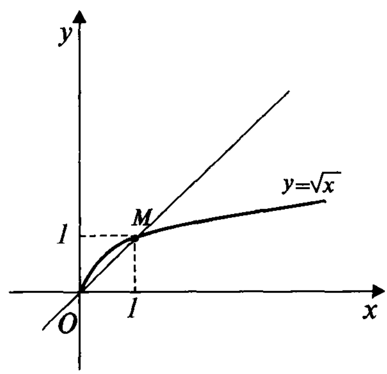


53- rasm.

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

o'ng hosilani qaraylik. Ko'rinib turibdiki, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nisbat $X=(x_0;+\infty)$ ochiq yarim to'g'ri chiziqda x argumentning uzluksiz funksiyasidir. Demak, funksiyaning nuli haqidagi teoremaga ko'ra, bu funksiya o'z ishorasini o'zgartirganda nulga aylanishi lozim. Shuning uchun, agar $f'(x_0+0)=\infty$ bo'lsa,

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

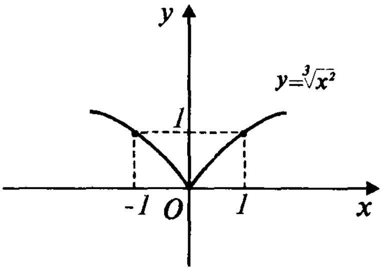


54- rasm.

funksiya x_0 nuqta yaqinida o'z ishorasini o'zgartira olmaydi. Bu esa $f'(x_0+0)$ o'ng hosilaning tayin ishorali cheksizlikka teng bo'lishini bildiradi. Masalan, $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi $f'(+0)$ o'ng hosilasini qaraylik (54-rasm):

$$f'(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

Xuddi shunga o'xshash, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiya uchun $f'(+0)=+\infty, f'(-0)=-\infty$ bo'ladi (55- rasm).



55-rasm.

Eslatma. Agar biror x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya shu nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda bu hosila geometrik nuqtai nazaridan 53- rasmdagi (*a*), (*b*) holatlarning birini ifodalaydi. (*a*) holatda $+\infty$; (*b*) holatda $-\infty$ (bir tomonli hosilalar bir xil ishorali); (*d*) va (*e*) holatlarda cheksiz hosila mavjud emas (bir tomonli hosilalar ishora bilan farqlanadi).

3.4. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya biror x nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni x nuqtada $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$ bo'lsin. Bu yerda A bilan Δx ga bog'liq bo'lmagan biror son belgilangan; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$. Ko'rinib turibdiki, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = 0$ $(\Delta x \neq 0)$, ya'ni $\alpha\Delta x = o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$. Demak, $A \neq 0$ bo'lganda $A\Delta x$ qo'shiluvchi Δy orttirmaning *bosh qismi* bo'ladi. Ana shu bosh qism $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *differensiali* deb ataladi va dy simvol bilan belgilanadi:

$$dy = A\Delta x. \tag{4}$$

$A = 0$ bo'lganda $A\Delta x = 0$ bo'lganligi hamda, umuman aytganda, $\alpha\Delta x \neq 0$ bo'lganligi sababli, bu holda $A\Delta x$ qo'shiluvchi Δy orttirmaning bosh qismi bo'la olmaydi. Bu holda, agar $dy = 0$ deb qabul qilinsa, (4) formula yana o'z kuchini saqlaydi: $dy = 0 \cdot \Delta x$.

Erkli o'zgaruvchi x ning differensiali deb, uning x nuqtada qabul qilgan Δx orttirmasiga aytiladi: $dx = \Delta x$. $A = f'(x)$ ekanligini e'tiborga olib, bu ta'rifga ko'ra (4) formulani

$$dy = f'(x)dx$$

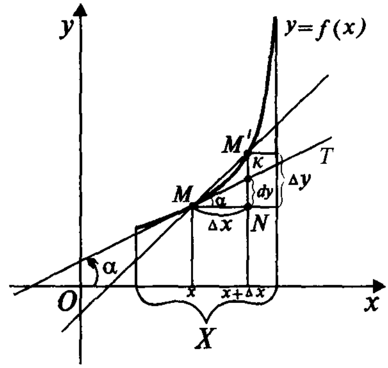
shaklda yozamiz. Bu formula $y=f(x)$ *funksiyaning* x *nuqtadagi differensialini topish formulasi* deb ataladi.

Differensialning geometrik ma'nosi quyidagi teorema orqali ifodalanadi:

2- teorema. $y=f(x)$ *funksiyaning* x *nuqtadagi* $dy=f'(x)dx$ *differensiali* $y=f(x)$ *funksiya grafigiga* $M(x;\ f(x))$ *nuqtada* *o'tkazilgan urinma ordinatasining (x argument $\Delta x \neq 0$ orttirma olganda) qabul qilgan orttirmasiga teng.*

I s b o t i. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin:

$$\Delta y = dy + o\ (\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$



56- rasm.

$y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x;\ f(x))$ nuqtada (MT) urinmani o'tkazamiz (56- rasm). Hosilaning geometrik ma'nosidan ma'lumki, bu urinmaning $k = \text{tg}\alpha$ burchak koeffitsienti $f'(x)$ hosilaga teng. Agar x abssissaga Δx $(\Delta x \neq 0)$ orttirma bersak, M nuqtaning ordinatasi

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = NM'$$

orttirma qabul qiladi. U holda (MT) urinmadagi nuqtaning ordinatasi NK orttirma oladi. To'g'ri burchakli ΔMNK dan $NK = MN \cdot \text{tg}\alpha$. Bu yerda $MN = \Delta x = dx$, $\text{tg}\alpha = f'(x)$ ekanini e'tiborga olsak, $dy = NK$ bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Argument va funksiya orttirmalarini ta'riflang. Misollar keltiring.
2. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini ta'rif yordamida hisoblang.
4. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremani isbotlang va bu teorema yordamida teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalarini toping.
5. Hosila hisoblashda qo'llaniladigan hosilalar jadvalini tuzing.
6. Bir tomonli hosila deb nimaga aytiladi? Funksiyaning nuqtadagi chap va o'ng hosilalarining mavjud bo'lishi hamda bu hosilalarning o'zaro teng bo'lishi funksiyaning shu nuqtada hosilaga ega bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart bo'ladimi?

7. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchiligi deb nimaga aytiladi? Uning zaruriy va yetarli sharti nima?
8. Nuqtada differensiallanuvchi bo'lgan funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladimi? Isbotlang.
9. Hosila hisoblashning asosiy qoidalarini ayting va formulalarini yozing . Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremani isbotlang.
10. Logarifmik differensiallash deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
11. Hosilaning geometrik ma'nosi nima? Fizik ma'nolari-chi?
12. Cheksiz hosila deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
13. Funksiyaning nuqtadagi differensiali deb nimaga aytiladi? Uning geometrik ma'nosi nima?

4- §. BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL SHAKLINING INVARIANTLIGI.

4.1. Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligi. Ma'lumki, agar $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va $x\in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali

$$dy=f'(x)dx \tag{1}$$

shaklda bo'ladi.

Tabiiy ravishda quyidagi savolni qo'yish mumkin: $y=f(x)$ funksiyaning x argumenti o'z navbatida biror yangi t o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lganida $y=f(x)$ funksiyaning differensiali (1) shaklda bo'ladimi yoki boshqacha ko'rinishda bo'ladimi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

1- teorema. *Agar $x=g(t)$ funksiya ixtiyoriy $t\in T$ nuqtada differensiallanuvchi va $y=f(x)$ funksiya $x=g(t)\in X=\{x: x=g(t), t\in T\}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning differensiali (1) shaklda bo'ladi: $dy=f'(x)dx$.*

Birinchi tartibli differensialning bu xususiyati *birinchi tartibli differensial shaklining invariantligi* deb ataladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $y=f(g(t))$ murakkab funksiya $t\in T$ nuqtada differensiallanuvchi (murakkab funksiyani differensialash haqidagi teoremaga binoan), shu bilan birga

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \qquad (2)$$

formula o'rinli. Demak, (1) formulaga ko'ra $y=f(g(t))=F(t)$ funksiyaning $t \in T$ nuqtadagi differensiali $dy = y'_t\,dt$ bo'ladi. Bundan (2) tenglikka asosan, $dy = y^1_x \cdot x'_t dt$ formulani hosil qilamiz. Bu yerda $x'_t dt = dx$, $y'_x = f'(x)$ ekanligini e'tiborga olsak, $dy = f'(x)dx$ bo'ladi. Bu esa (1) formulaning xuddi o'zginasidir. Teorema isbot qilindi.

Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligidan foydalanib hosila funksiyani belgilash uchun yana bitta belgi, ya'ni $\frac{dy}{dx}$ belgi (Leybnits) kiritilgan:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

Haqiqatan, ma'lumki, $dy = y'dx$. Bundan $y' = \frac{dy}{dx}$ · $\frac{dy}{dx}$ belgini «y funksiyadan x bo'yicha hosila» yoki «dy ning dx ga nisbati» deb o'qish mumkin.

4.2. Differensial hisoblashning asosiy qoidalari va formulalari. Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligidan foydalanib, differensial hisoblashning quyidagi qoidalarini va formulalarini aniqlash mumkin:

1°. O'zgarmas ko'paytuvchini differensial belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$d(Cu) = Cdu \qquad (C = \text{Const}).$$

Bu yerda, $u = u(x)$ funksiya differensiallanuvchi funksiya.

I s b o t i. Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligiga asosan $d(Cu) = (Cu)'dx$ bo'ladi. Bu yerda $(Cu)' = Cu'$ va $u'dx = du$ ekanini e'tiborga olsak,

$$d(Cu) = Cdu \qquad (C = \text{Const})$$

bo'ladi.

2°. Agar X oraliqda aniqlangan $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar biror $x \in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$u+v$, $u-v$, $u\cdot v$ va $\frac{u}{v}$ (oxirgisida $v\neq 0$) funksiyalar ham x nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\qquad d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

I s b o t i. Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligi va hosila hisoblash formulalariga binoan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=(u'\pm v')dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv;$$

$$d(uv)=(uv)'dx=(vu'+uv')dx=vu'dx+uv'dx=vdu+udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{vu'dx-uv'dx}{v^2}dx=$$
$$=\frac{vdu-udv}{v^2}(v\neq 0).$$

4.3. Differensialning taqribiy hisoblashga tatbiqi. Funksiya differensialidan funksiya qiymatini taqribiy hisoblashda foydalanish mumkin. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda aniqlangan va $x_0\in X$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\Delta x\to 0).$$

Ravshanki, $f'(x_0)\neq 0$ bo‘lganda $f'(x_0)\Delta x$ qo‘shiluvchi $\Delta f(x_0)$ orttirmaning bosh qismi bo‘ladi. Shu sababli

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\qquad(*)$$

taqribiy tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ko‘rinib turibdiki, bu yerdagi Δx orttirma yetarli kichik bo‘lsa, (*) taqribiy tenglikning nisbiy xatosi istalgancha kichik bo‘ladi. (*) formulani qisqacha $\Delta y\approx dy$ ko‘rinishda yozish mumkin. (*) formula yordamida, funksiya va uning hosila funksiyasining x_0 nuqtadagi qiymatlariga ko‘ra, funksiyaning $x_0+\Delta x\in X$ nuqtadagi qiymati taqribiy hisoblanadi.

1- misol. $\sqrt{4,01}$ sonning taqribiy qiymati topilsin.

Y e c h i s h. Ushbu $y=\sqrt{x}$ funksiyani qaraymiz. Ma’lumki, (*) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x.$$

Bu yerda, $x_0=4$ va $\Delta x=0{,}01$ deb olsak, $\sqrt{4{,}01}\approx 2+\frac{1}{4}\cdot 0{,}01=$ $=2+0{,}0025=2{,}0025$, ya'ni $\sqrt{4{,}01}\approx 2{,}0025$ bo'ladi.

2- misol. cos 31° sonning taqribiy qiymati topilsin.

Y e c h i s h. $y=\cos x$ funksiyani qaraymiz. (*) formulaga ko'ra

$$\cos(x_0+\Delta x)\approx\cos x_0-\sin x_0\cdot\Delta x.$$

Bu yerda, $x_0=30°$ va $\Delta x=1°$ deb olsak,

$$\cos 31°\approx\cos 30°-\sin 30°\cdot 1°=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\pi}{180}\approx$$

$$\approx\frac{1{,}73}{2}-\frac{3{,}14}{360}=\frac{308{,}26}{360}=\frac{30{,}826}{36}\approx 0.856.$$

4.4. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini hisoblash. Aytaylik, $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar biror T oraliqda aniqlangan bo'lib, $x=\varphi(t)$ funksiya T oraliqda qat'iy monoton va uzluksiz bo'lsin. Bu holda $X=\{x: x=\varphi(t),\ t\in T\}$ oraliqda $x=\varphi(t)$ funksiyaga teskari bo'lgan $t=g(x)$ funksiya mavjud bo'lib, y o'zgaruvchi t oraliq argument orqali x o'zgaruvchining murakkab funksiyasi bo'ladi: $y=\psi(g(x))$ $(x\in X)$.

Bu holda $y=y(x)$ funksiya

$$\left.\begin{array}{l}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{array}\right\}(t\text{ - parametr})$$

tenglamalar bilan *parametrik ko'rinishda berilgan* deb ataladi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi quyidagi teoremaga asosan topiladi:

2- teorema. Agar $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar T to'plamda aniqlangan bo'lib, ular ixtiyoriy $t\in T$ nuqtada differensiallanuvchi va $\varphi'(t)\neq 0$, shu bilan birga $x=\varphi(t)$ funksiya T oraliqda qat'iy monoton va uzluksiz bo'lsa, u holda $y=\psi(g(x))$ murakkab funksiya $t\in T$ nuqtaga mos $x=\varphi(t)\in X$ nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish formulasi* deb ataladi. Bu yerdagi z'_u belgi «z dan u bo'yicha hosila» deb o'qiladi.

I s b o t i. $x = \varphi(t)$ funksiya T oraliqda qat'iy monoton, uzluksiz va qaralayotgan $t \in T$ nuqtada $\varphi'(t) \neq 0$ bo'lganligi sababli, $X = \{x : x = \varphi(t),\ t \in T\}$ oraliqda $x = \varphi(t)$ funksiyaga teskari bo'lgan $t = g(x)$ funksiya mavjud va u $x = \varphi(t) \in X$ nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{x'_t}.$$

Bundan tashqari, shart bo'yicha $y = \psi(t)$ funksiya $t = g(x) \in T$ nuqtada differensiallanuvchidir. Demak, murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra, $y = \psi(g(x))$ murakkab funksiya $x = \varphi(t) \in X$ nuqtada differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$y'_x = \psi'(g(x))g'(x)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $g(x) = t$ va $g'(x) = \frac{1}{x'_t}$ hamda $\psi'(t) = y'_t$ ekanini e'tiborga olsak,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \left(x'_t \neq 0\right)$$

formula hosil bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

3- misol. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t\text{-arctg}\,t$ ko'rinishda berilgan y funksiyaning x bo'yicha hosilasi topilsin.

Y e c h i s h.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2} \quad (t \neq 0).$$

4.5. Oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish. $F(x, y) = 0$ ko'rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiya oshkormas ko'rinishda berilgan funksiya deb ataladi. Masalan, $y^2 = 2x$ bo'lsin. Bu yerda, x va y lar orasidagi funksional bog'lanish $y^2 - 2x = 0$

ko‘rinishda berilgani sababli, $y=\sqrt{2x}$ (yoki $y=-\sqrt{2x}$) funksiya oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyadir. Biz bu yerda oshkormas funksiyaning mavjudligi haqida to‘xtalib o‘tirmasdan, oshkormas funksiyaning hosilasini topishni misol orqali ko‘rsatish bilan kifoyalanamiz:

4- misol. Agar $y^2 = 2x$ bo‘lsa, y' topilsin.

Y e c h i s h. $y^2 = 2x$ tenglikdan x bo‘yicha hosila hisoblaymiz: $2yy' = 2$. Bundan $yy' = 1$ yoki $y'=\frac{1}{y}$. Agar bu yerda $y=\pm\sqrt{2x}$ ekanini e'tiborga olsak, $y'=\pm\frac{1}{\sqrt{2x}}$ bo‘ladi.

5- misol. Agar $y = \sin(x+y)$ bo‘lsa, y' topilsin.

Y e c h i s h.

$$y=\sin(x+y)\Rightarrow y'=\cos(x+y)\cdot(1+y')\Rightarrow y'(1-\cos(x+y))=$$
$$=\cos(x+y)\Rightarrow y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

T a ' r i f. Agar $f'(x)$ hosila funksiya $[a,b]$ kesmada uzliksiz bo‘lsa, f funksiya $[a,b]$ da uzliksiz differensiallanuvchi deyiladi.

5- §. YUQORI TARTIBLI HOSILALAR

5.1. Yuqori tartibli hosilalar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya biror X oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib, $x\in X$ va $x+\Delta x\in X$ bo‘lsin.

1- ta'rif. Agar $f'(x)$ hosila funksiya uchun

$$(f'(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

chekli (yoki cheksiz) limit mavjud bo‘lsa, bu limit $y=f(x)$ funksiyaning $x\in X$ nuqtadagi *ikkinchi tartibli hosilasi* deyiladi va $f''(x)$ («ef ikki shtrix iks») yoki y'' («igrek ikki shtrix») belgi bilan belgilanadi: $f''(x)=(f'(x))'$. Bu holda $y=f(x)$ funksiya $x\in X$ nuqtada *ikki marta differensiallanuvchi* deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya $x=1$ nuqtada ikki marta differensiallanuvchi funksiyadir. Haqiqatan, ta'rif bo‘yicha

$$f''(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(1+\Delta x)-f'(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\Delta x}}-\frac{1}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{2\sqrt{1+\Delta x}\Delta x}=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\left(1+\sqrt{1+\Delta x}\right)\sqrt{1+\Delta x}\Delta x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\Delta x}\right)\sqrt{1+\Delta x}}=-\frac{1}{4}.$$

$f''(1)$ ni quyidagi usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f''(x)=(f'(x))'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}};\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

Xuddi shunga o'xshash, uchinchi, to'rtinchi va hokazo n-tartibli hosila tushunchalarini kiritish mumkin:

2- ta'rif. Agar, $y=f(x)$ funksiya x nuqtaning $U(x)$ atrofida $n-1$ marta differensiallanuvchi bo'lib, uning $n-1$- tartibli hosila funksiyasi $f^{(n-1)}(x)$ berilgan $x\in X$ nuqtada chekli (yoki cheksiz) $(f^{(n-1)}(x))'$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *n- tartibli hosilasi* (yoki qisqacha *n- hosilasi*) deyiladi va $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ belgi bilan belgilanadi:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\quad (n\geq 1).\tag{1}$$

Bu yerda, $f^{(0)}(x)=f(x)$. (1) rekurrent (qaytarma) formulani qisqacha

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'\qquad (n\geq 1)$$

shaklda yozish ham mumkin. y funksiyaning uchinchi hosilasi odatda y''' simvol bilan belgilanadi va «igrek uch shtrix» deb o'qiladi. Berilgan x nuqtada n- tartibli chekli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya x nuqtada *n marta differensiallanuvchi funksiya* deb ataladi.

1- misol. Agar $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ bo'lsa, y''' hosila topilsin.

Y e c h i s h. Dastlab y' va y'' larni topamiz:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad y''=(y')'=-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Ta'rif bo‘yicha

$$y'''=(y'')'=\left(-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\right)'=-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-3x^2\sqrt{1+x^2}}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

$$=-\frac{1+x^2-3x^2}{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2-1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}.$$

3- ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqning har bir nuqtasida n marta differensiallanuvchi bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya X *oraliqda n marta differensiallanuvchi* deyiladi. Agarda $f(x)$ funksiya X oraliqning har bir nuqtasida istalgancha marta differensiallanuvchi bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya X oraliqda *cheksiz differensiallanuvchi* deyiladi.

Masalan, har qanday

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

algebraik ko‘p had $X=\boldsymbol{R}$ to‘plamda cheksiz differensiallanuvchidir. Haqiqatan,

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1},$$

$$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1\cdot a_0=n!a_0.$$

$f^{(n)}(x)$ hosila funksiya o‘zgarmas funksiya bo‘lgani sababli, $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n+2)}(x)$ va bundan keyingi barcha yuqori tartibli hosilalar nulga teng.

5.2. Yuqori tartibli hosilalarni hisoblash qoidalari va formulalari. Yuqoridagilardan ko‘rinib turibdiki, funksiyaning n-tartibli hosilasini topish uchun, umuman aytganda, dastlab uning birinchi, ikkinchi va hokazo $(n-1)$-nchi tartibli hosilalarini hisoblash lozim. Lekin shunday holatlar ham uchrab turadiki, bunda matematik induksiya usuli (metodi) yordamida n-hosila uchun bevosita n ga bog'liq bo'lgan formulani keltirib chiqarish mumkin. Masalan, $y = \sin x$ funksiyaning n- tartibli hosilasini hisoblash talab qilingan bo'lsin. Ma'lumki, $n = 1$ bo'lganda

$$y' = \cos x = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Faraz qilaylik,

$$y^{(n-1)} = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

formula o'rinli bo'lsin. Bundan

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Shunday qilib,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Teorema. *Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar X oraliqda aniqlangan bo'lib, biror $x \in X$ nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $Cu(x)$ ($C =$ Const), $u(x) + v(x)$, $u(x) - v(x)$ va $u(x)v(x)$ funksiyalar ham $x \in X$ nuqtada n marta differensiallanuvchi, shu bilan birga*

$$(Cu(x))^{(n)} = Cu^{(n)}(x) \quad (C = \text{Const}), \tag{2}$$

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x), \tag{3}$$

$$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)}(x) v^{(m)}(x) \tag{4}$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bu yerda

$$u^{(0)}(x) = u(x), \quad v^{(0)}(x) = u(x), \quad C_n^0 = 1,$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \quad (m = 1, 2, \ldots n).$$

(4) formula *Leybnits formulasi* deyiladi.

Isboti. Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $x \in X$ nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lib, $C =$ Const bo'lsin.

Avval (2) formulani isbot qilamiz. Matematik induksiya usulini qo'llaylik. $n = 1$ bo'lsin. Bu holda, ma'lumki

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

Faraz qilaylik,

$$(Cu(x))^{(n-1)} = Cu^{(n-1)}(x)$$

formula o‘rinli bo‘lsin. Bundan

$$(Cu(x))^{(n)} = ([Cu(x)]^{(n-1)})' = (Cu^{(n-1)}(x))' =$$

$$= \mathrm{C}(\mathrm{u}^{(n-1)}(x))' = Cu^{(n)}(x).$$

Demak, C o‘zgarmas son bo‘lib, $u^{(n)}(x)$ hosila mavjud bo‘lgani uchun $Cu^{(n)}(x)$ hosila mavjud, shu bilan birga (2) formula o‘rinli bo‘lar ekan.

Endi (3) formulani isbot qilamiz. Yana matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Aytaylik, $n = 1$ bo‘lsin. Bu holda, ma'lumki,

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$

faraz qilaylik,

$$(u(x) \pm v(x))^{(n-1)} = u^{(n-1)}(x) \pm v^{(n-1)}(x)$$

formula o‘rinli bo‘lsin. Bu yerdan

$$(u(x) \pm v(x)\ )^{(n)} = ((u(x) \pm v(x))^{(n-1)})' =$$

$$= (u^{(n-1)}(x))' \pm (v^{(n-1)}(x))' = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x).$$

Shart bo‘yicha $u^{(n)}(x)$ va $v^{(n)}(x)$ hosilalar mavjud. Demak, tenglikning chap tomonidagi $(u(x) \pm v(x))^{(n)}$ hosila ham mavjud, shu bilan birga (3) formula o‘rinli.

Nihoyat, Leybnits formulasini isbot qilamiz. Bunda ham matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Aytaylik, $n = 1$ bo‘lsin. Bu holda, ma'lumki $(uv)' = u'v + uv'$.

Bu tenglikni, $v^{(0)} = u$, $u^{(0)} = u$, $C_1^0 = 1$ kelishuvlarni va $C_1^1 = 1$ tenglikni e'tiborga olib,

$$(uv)^{(1)} = C_1^0 u^{(1)} v^{(0)} + C_1^1 u^{(0)} v^{(1)} = \sum_{m=0}^{1} C_1^m u^{(1-m)} v^{(m)}$$

shaklda yozib olamiz. Bunda $v' = v^{(1)}$, $u' = u^{(1)}$ va $(uv)' = (uv)^{(1)}$ belgilashlardan foydalanildi.

Faraz qilaylik,

$$(uv)^{(n-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m u^{(n-1-m)} v^{(m)}$$

formula o'rinli bo'lsin. Bu yerdan

$$(uv)^{(n)} = ((uv)^{(n-1)})' = \left(\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} u^{(n-1-m)} v^{(m)}\right)' =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} (u^{(n-1-m)} v^{(m)})' = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} \left(u^{(n-m)} v^{(m)} + u^{(n-1-m)} v^{(m+1)}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} u^{(n-m)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} u^{(n-1-m)} v^{(m+1)}.$$

Endi birinchi yig'indining birinchi hadini alohida yozib, ikkinchi yig'indida $m+1$ ni m bilan almashtiramiz va uning oxirgi hadini alohida yozamiz:

$$(uv)^{(n)} = C_{n-1}^{0} u^{(n)} v^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^{m} u^{(n-m)} v^{(m)} + \sum_{m=1}^{n-1} C_{n-1}^{m-1} u^{(n-m)} v^{(m)} +$$

$$+ C_{n-1}^{n-1} u^{(o)} v^{(n)} = C_{n-1}^{0} u^{(n)} v^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} \left(C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1}\right) u^{(n-m)} v^{(m)} + C_{n-1}^{n-1} u^{(0)} v^{(n)}.$$

Bu yerda,

$$C_{n-1}^{0} = C_{n}^{0}, \quad C_{n-1}^{n-1} = C_{n}^{n}, \quad C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1} = C_{n}^{m}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$(uv)^{(n)} = C_{n}^{0} u^{(n)} v^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} C_{n}^{m} u^{(n-m)} v^{(m)} + C_{n}^{n} u^{(o)} v^{(n)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_{n}^{m} u^{(n-m)} v^{(m)}$$

bo'ladi. Demak, C_n^m lar o'zgarmas sonlar bo'lib, shart bo'yicha $u^{(n-m)}$ va $v^{(n)}$ hosilalar mavjud bo'lganligi sababli, tenglikning chap tomonidagi $(uv)^{(n)}$ hosila ham mavjud, shu bilan birga (4) formula o'rinli bo'lar ekan. Teorema to'liq isbot qilindi.

2- misol. Ushbu $y = x^2 + 2\sin x$ funksiyaning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Y e c h i s h. (2) va (3) formulalarga ko'ra

$$y^{(20)} = \left(x^2 + 2\sin x\right)^{(20)} = \left(x^2\right)^{(20)} + 2\left(\sin x\right)^{(20)} =$$

$$= 0 + 2\sin\left(x + 20\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x.$$

3- misol. Ushbu $y = e^x \sin x$ funksiyaning n- tartibli hosilasi topilsin.

Y e c h i s h. Leybnits formulasiga asosan

$$y^{(n)}=\left(e^{x}\sin x\right)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\left(e^{x}\right)^{(n-m)}\left(\sin x\right)^{(m)}=$$

$$=e^{x}\sum_{m=0}^{n}C_n^m\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)=e^{x}\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\sin\left(x+m\frac{\pi}{2}\right).$$

4- misol. Ushbu

$$\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}\quad (n=1,2,...)\tag{5}$$

formula isbot qilinsin.

I s b o t i. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. Ravshanki, $n=1$ bo‘lganda

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(1)}=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=(-1)^1\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{1+1}}.$$

Aytaylik,

$$\left(e^{\frac{1}{x}}x^{k-1}\right)^{(k)}=(-1)^k\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{k+1}}\quad (k=1,2,...,n-1)$$

formulalar o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-1}\right)^{(n)}=\left\{\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-1}\right)'\right\}^{(n-1)}=\left\{(n-1)e^{\frac{1}{x}}x^{n-2}-e^{\frac{1}{x}}x^{n-3}\right\}^{(n-1)}=$$

$$=(n-1)\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-2}\right)^{(n-1)}-\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-3}\right)^{(n-1)}=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)e^{\frac{1}{x}}x^{-n}-\left(\left(e^{\frac{1}{x}}x^{n-3}\right)^{(n-2)}\right)'=$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)e^{\frac{1}{x}}x^{-n}-\left\{(-1)^{n-2}e^{\frac{1}{x}}x^{-n+1}\right\}'=$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)e^{\frac{1}{x}}x^{-n} - (-1)^{n-1}e^{\frac{1}{x}}x^{-(n+1)} - (-1)^{n-1}(n-1)e^{\frac{1}{x}}x^{-n} =$$

$$= (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Demak, har qanday n natural son uchun (5) formula o'rinli bo'lar ekan.

6- §. IKKINCHI TARTIBLI HOSILANING MEXANIK MA'NOSI. YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIALLAR

6.1. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi birinchi tartibli hosilasi, mexanika nuqtai nazaridan, $y=f(x)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi oniy tezligini bildirar edi. Endi $y=f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilasining mexanik ma'nosini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, moddiy nuqta $y=f(x)$ qonun bo'yicha $f'(x)=v(x)$ tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsin. Ravshanki,

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

nisbat moddiy nuqtaning $[x,\ x+\Delta x]$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanishini ifodalaydi. Demak,

$$v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

hosila harakatdagi moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi tezlanishini bildiradi: $v'(x) = a(x)$. Bu yerda $v(x) = f'(x)$ ekanini e'tiborga olib, $f''(x) = a(x)$ ifodani hosil qilamiz. Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi, mexanika nuqtai nazaridan, harakatdagi moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi tezlanishini bildirar ekan.

6.2. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilasini hisoblash. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilasi

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \left(x'_t \neq 0\right)$$

formula yordamida odatdagi hosila hisoblash qoidalari bo‘yicha hisoblanadi. Masalan,

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^2}\frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

Bu yerdagi y''_{x^2} belgi y dan x bo‘yicha ikki marta hosila olinayotganini bildiradi (ba'zan uni y''_{xx} deb ham yoziladi). Uchinchi, to‘rtinchi va hokazo n-tartibli hosilalar ham xuddi shu singari hisoblanadi.

1- misol. $x = a(1\text{-}\cos t)$, $y = a(t - \sin t)$ bo‘lsa, y''_{x^2} topilsin.

Y e c h i s h.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a(1-\cos t)}{a\sin t} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Demak,

$$y''_{x^2} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)'}{a\sin t} = \frac{1}{2a\sin t\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{a(1+\cos t)\sin t}.$$

6.3. Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilasini hisoblash. Endi oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini hisoblash masalasini qaraylik. Biz $F(x, y) = 0$ ko‘rinishda (ya’ni oshkormas ko‘rinishda) berilgan $y = y(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasini hisoblashni bilamiz. Masalan, $\sin(x + y) - y = 0$ ko‘rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiyaning birinchi tartibli y' hosilasi quyidagicha hisoblanar edi:

$$\cos\ (x + y)(1 + y') - y' = 0.$$

Bu yerdan

$$y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

Oshkormas ko'rinishda berilgan $y=y(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilalari ham odatdagi hosila hisoblash qoidalari bo'yicha navbatma-navbat hisoblanadi. Masalan, yuqorida qaralgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topaylik: ma'lumki,

$$y'=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}.$$

Bundan

$$y''=\frac{-\sin(x+y)(1+y')\{1-\cos(x+y)+\cos(x+y)\}}{(1-\cos(x+y))^2}=\frac{-\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^3}.$$

Ikkinchi hosilaga ko'ra uchinchi, uchinchi hosilaga ko'ra to'rtinchi va hokazo tartibli hosilalarni topish mumkin.

6.4. Yuqori tartibli differensiallar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya berilgan x nuqtaning biror atrofida bir marta differensiallanuvchi bo'lsin. U holda, ma'lumki, bu funksiyaning x nuqtadagi differensiali

$$dy=f'(x)dx=y'dx$$

bo'lar edi. Ravshanki, dy differensial x va $dx=\Delta x$ o'zgaruvchilarga bog'liq (Δx miqdorning x ga bog'liq emasligi bizga avvaldan ma'lum). Demak, $y'=f'(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lganda, dy differensialning (x ga nisbatan) differensiali haqida so'z yuritishimiz mumkin. Keyingi differensialni (avvalgisidan farqlash uchun) δ harf bilan belgilaymiz:

$$\delta(dy)=\delta\left[f'(x)dx\right]=\left[f'(x)dx\right]'\delta x=$$
$$=\left[f''(x)dx+f'(x)(dx)'_x\right]\delta x=f''(x)dx\delta x,$$

chunki $(dx)'_x=0.$

Ta'rif. Biror x nuqtada ikki marta differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning $dy=f'(x)dx$ differensialidan olingan $\delta(dy)$ differensialning $\delta x=dx$ bo'lgandagi qiymati $y=f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *ikkinchi tartibli differensiali* yoki *ikkinchi differensiali* deb ataladi va d^2y bilan belgilanadi:

$$d^2y=\delta(dy)\big|_{\delta x=dx}=f''(x)(dx)^2=y''(dx)^2$$

Ko‘rinib turibdiki, d^2y differensial x ga va $dx = \Delta x$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq. Demak, $y'' = f''(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lganda, d^2y differensialning (x ga nisbatan) differensiali haqida gapirish mumkin:

$$\delta\left(d^2 y\right) = \delta\left[f''(x)dx^2\right] = \left[f''(x)dx^2\right]'\delta x =$$

$$= \left\{f'''(x)dx^2 + f''(x)\left[(dx)^2\right]'_x\right\}\delta x = f'''(x)(dx)^2\delta x,$$

chunki $\left[(dx)^2\right]'_x = 0.$

Shunday qilib, *uchinchi differensial*ni quyidagicha ta'riflash mumkin: ixtiyoriy tayin x nuqtada uch marta differensiallanuvchi bo‘lgan $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi differensialidan olingan $\delta(d^2y)$ differensialning $\delta x = dx$ bo‘lgandagi qiymati $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *uchinchi tartibli differensiali* yoki *uchinchi differensiali* deb ataladi va d^3y belgi bilan belgilanadi:

$$d^3y = \delta(d^2y)\,|_{\delta x = dx} = f'''(x)(dx)^3 = y'''(dx)^3.$$

Xuddi ikkinchi va uchinchi differensiallar singari to‘rtinchi, beshinchi va hokazo n- differensial tushunchalari aniqlanadi. Ixtiyoriy tayin x nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lgan $y = f(x)$ funksiyaning $(n-1)$- tartibli differensialidan olingan $\delta(d^{n-1}y)$ differensialning $\delta x = dx$ bo‘lgandagi qiymati $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *n- tartibli differensiali* yoki *n- differensiali* deb ataladi va d^ny bilan belgilanadi.

Har qanday n natural son uchun

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n \qquad (*)$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Buni isbotlash uchun matematik induksiya usulini qo‘llaymiz. $n = 1$ uchun $(*)$ formulaning to‘g‘riligi ma'lum:

$$dy = y'dx = y^{(1)}dx.$$

Faraz qilaylik, $d^{n-1}y = y^{(n-1)}(dx)^{n-1}$ bo‘lsin. $d^n y$ differensialning ta'rifiga ko‘ra

$$d^n y = \delta\left(d^{n-1} y\right)\big|_{\delta x=dx} = \delta\left[y^{(n-1)}(dx)^{n-1}\right]_{\delta x=dx} =$$

$$= \left[y^{(n-1)}(dx)^{n-1}\right]' \delta x\big|_{\delta x=dx} =$$

$$= \left\{y^{(n)}(dx)^{n-1} + y^{(n-1)}\left[(dx)^{n-1}\right]'_x\right\} dx = y^{(n)}(dx)^n,$$

chunki $[(dx)^{n-1}]'_x = 0$. Shunday qilib, (*) formulaning har qanday n natural son uchun to'g'riligi isbot qilindi.

Odatda qulaylik maqsadida $(dx)^n$ o'rniga dx^n deb yoziladi (hech vaqt uni x^n ning differensiali deb tushunmaslik kerak; x^n ning differensiali $d(x^n)$ ko'rinishda yoziladi):

$$d^n y = y^{(n)} dx^n. \tag{1}$$

Bundan $y^{(n)}$ hosilani

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

nisbat ko'rinishda ifodalash va «y dan x bo'yicha n-hosila» deb o'qish imkoniyati paydo bo'ladi.

Shuni aytishimiz lozimki, (1) va (2) formulalar $n \geq 2$ uchun umuman aytganda, faqat x o'zgaruvchi erkli bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Boshqacha aytganimizda, ikkinchi differensialdan boshlab, barcha yuqori tartibli differensiallarning shakllari invariantlik xususiyatiga ega bo'lmaydi. Buni biz ikkinchi differensial misolida ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $y = f(x)$, $x = g(t)$ murakkab funksiya berilgan bo'lib, $y = f(x)$ va $x = g(t)$ funksiyalar ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda

$$d^2 y = \delta(dy)\,|_{\delta x=dx} = \delta(f'(x)dx)\,|_{\delta x=dx} =$$

$$= \delta(f'(x))\,|_{\delta x=dx} dx + f'(x)\delta(dx)\,|_{\delta x=dx} =$$

$$= f''(x)\delta x\,|_{\delta x=dx} dx + f'(x)d^2 x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x.$$

Ko'rinib turibdiki, bu holda $f'(x)d^2x$ qo'shimcha had paydo bo'ldi. Ya'ni ikkinchi differensialning x erkli bo'lgan holidagi shakli buzildi. Yuqorida biz «umuman aytganda» dedik. Bu shunga ishoraki, $y=f(x)$, $x=at+b$ (a, b — o'zgarmas sonlar) bo'lganda (1) va (2) formulalar o'z kuchini saqlaydi, chunki bu holda $d^2x=0$.

Yuqori tartibli differensial tushunchasi turli adabiyotlarda turlicha bayon qilinadi. Masalan, bu tushuncha [6] da aksiomatik usulda, [1] da induktiv usulda berilgan.

2- misol. $y=\sin x$ funksiyaning n-tartibli differensiali topilsin.

Y e c h i s h. Ma'lumki, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. Demak, (1) formulaga asosan

$$d^n y=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)dx^n.$$

3- misol $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$ funksiyaning n- tartibli differensiali topilsin.

Y e c h i s h. Ma'lumki, $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$. Demak, (1) formulaga asosan

$$d^n y=a^x\ln^n a\,dx^n.$$

T e o r e m a. *Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar biror x nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda Cu($C=\text{Const}$), $u\pm v$, uv funksiyalarning x nuqtadagi n differensiallari uchun*

$$d^n(Cu)=Cd^n u,$$

$$d^n(u\pm v)=d^n u\pm d^n v,$$

$$d^n(uv)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}d^{n-m}u\,d^m v \tag{3}$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bu yerda va bundan keyin har doim

$$n(n-1)\dots(n-0+1)=1,\quad 0!=1,\quad d^0u=u,\quad d^0v=v$$

deb hisoblaymiz.

Bu teoremaning isboti bevosita (1) formuladan va 5-paragrafdagi (2)—(4) formulalardan kelib chiqadi. (3) formula *Leybnits formulasining differensial shakli* deb ataladi.

4- misol. $y=e^x\cos x$ funksiyaning n- differensiali topilsin.

Y e c h i s h. (3) formulaga asosan

$$d^n y=\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}d^{n-m}\left(e^x\right)d^m(\cos x)=$$

$$=e^x\sum_{m=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\cos\left(x+m\frac{\pi}{2}\right)dx^n.$$

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Birinchi tartibli differensial shaklining invariantligi deb nimaga aytiladi?
2. Differensial hisoblashning asosiy qoidalari va formulalarini aytib bering va yozing.
3. Differensialning taqribiy hisoblashga tatbiqini ayting va misollar keltiring.
4. Parametrik va oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyalarning hosilalari qanday hisoblanadi? Misollar keltiring.
5. Yuqori tartibli hosila deb nimaga aytildi? Misollar keltiring.
6. Yuqori tartibli hosilalarni hisoblash qoidalari va formulalarini ayting va yozib ko'rsating.
7. Leybnits formulasini isbotlang.
8. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi nima?
9. Parmetrik va oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari qanday hisoblanadi? Misollar keltiring.
10. Yuqori tartibli differensial deb nimaga aytiladi?
11. Ikkinchi va undan yuqori tartibli differensiallar invariantlik xosasiga ega-mi? Tushuntirib bering.

7- §. DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR HAQIDAGI ASOSIY TEOREMALAR

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya biror X intervalda aniqlangan bo'lsin.

1- ta'rif. Agar biror $x_0 \in X$ nuqtaning shunday $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in\ (x_0-\delta,\ x_0)$ nuqtada $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ va $\forall x \in\ (x_0,\ x_0+\delta)$ nuqtada $f(x)>f(x_0)(f(x)<f(x_0)$ tengsizliklar bajarilsa, bu holda $y=f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada o'sadi* (*kamayadi*) deyiladi (57-, 58- rasmlar).

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o'sadi (kamayadi).*

Isboti. Shart bo'yicha

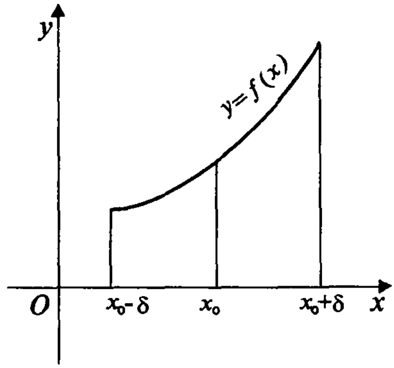
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chekli limit mavjud. Demak, funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga asosan $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $0 < |x - x_0| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall x$ nuqtada

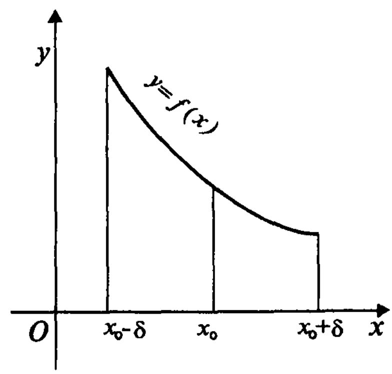
$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu tengsizlik quyidagi qo'sh tengsizlikka teng kuchli:

$$f'(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} <$$
$$< f'(x_0) + \varepsilon. \qquad (1)$$



57- rasm.



58- rasm.

Shartga ko'ra $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) bo'lganligi sababli, ε sonni shunday tanlaymizki, $\varepsilon < f'(x_0)$ ($\varepsilon < -f'(x_0)$) bo'lsin. U holda (1) tengsizliklarning chap (o'ng) tomonidan

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \right)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikdan ko'rinib turibdiki, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ nuqtada $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) va $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ nuqtada $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) tengsizlik bajariladi. Bu esa 1- ta'rifga ko'ra $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada o'sishini (kamayishini) bildiradi. Teorema isbot qilindi.

1- misol. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ funksiya $x=1$ nuqtada o'sadimi yoki kamayadimi? $g(x)=e^{-x^2}$ funksiya-chi?

Y e c h i s h. **a)** 1- u s u l. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.$$

2- u s u l. Hosila hisoblash qoidasiga ko'ra

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0.$$

Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada o'sadi.

b) 1- u s u l. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$g'(1)=\lim_{x\to1}\frac{e^{-x^2}-e^{-1}}{x-1}=-e^{-1}\lim_{x\to1}\frac{(e^{1-x^2}-1)(1+x)}{1-x^2}=$$

$$=-\frac{2}{e}\ln e=-\frac{2}{e}<0 \quad (e=2.718...)$$

2- u s u l. Hosila hisoblash qoidasiga ko'ra

$$g'(x)=e^{-x^2}(-2x)\Rightarrow g'(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}<0.$$

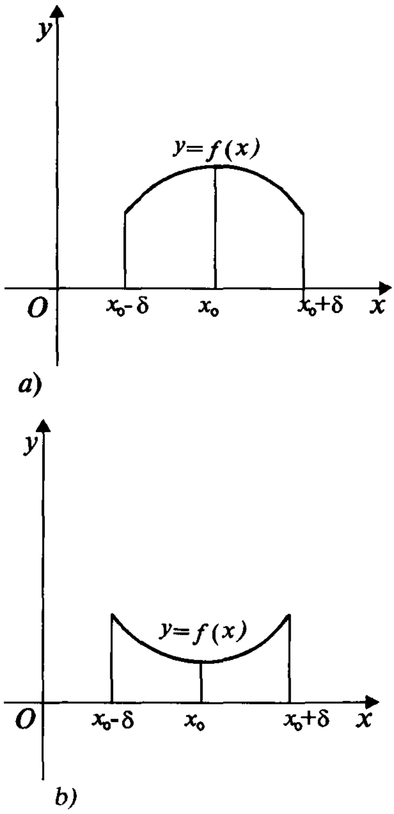
Demak, $g(x)$ funksiya $x=1$ nuqtada kamayadi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X intervalda aniqlangan bo'lsin.

2- ta'rif. Agar $x_0\in X$ nuqtaning shunday $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofga tegishli bo'lgan har bir x nuqtada $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *lokal maksimumga (lokal minimumga)* ega deyiladi (59, *a*, *b*- rasm)).

Bu yerdagi x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaga *lokal maksimum (lokal minimum)* beradigan nuqta, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ *funksiyaning lokal maksimumi* (*lokal minimumi*) deb ataladi.

Funksiyaning lokal maksimumi va lokal minimumi bitta nom bilan *funksiyaning lokal ekstremumi* deyiladi.



59- rasm.

Endi fransuz matematigi va huquqshunosi Per Ferma (1601—1665) ga mansub bo‘lgan quyidagi teoremani isbot qilamiz.

Ferma teoremasi. *Agar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo‘ladi.*

Isboti. Shart bo‘yicha

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

chekli hosila mavjud. Demak,

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad (2)$$

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (3)$$

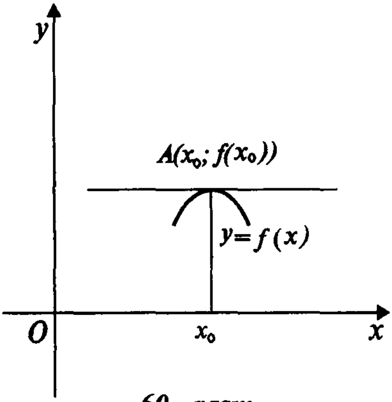
bir tomonli hosilalar mavjud va

$$f'(x_0-0)=f'(x_0),\ f'(x_0+0)=f'(x_0). \quad (4)$$

Yana teoremaning sharti bo‘yicha $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) ega, ya'ni x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofga tegishli bo‘lgan har qanday x nuqtada quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$f(x)\le f(x_0) \quad (f(x)\ge f(x_0)). \quad (5)$$

Demak, (5) tengsizlikka ko‘ra (2) va (3) ifodalardan $f'(x_0-0)\ge 0$ va $f'(x_0+0)\le 0$ ($f'(x_0-0)\le 0$ va $f'(x_0+0)\ge 0$) tengsizliklar hosil bo‘ladi. Shunday qilib, (4) tengliklardan bir vaqtning o‘zida $f'(x_0)\ge 0$ va $f'(x_0)\le 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa $f'(x_0)=0$ bo‘lishini bildiradi. Teorema isbot qilindi.



60- rasm.

Geometrik nuqtai nazardan, Ferma teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin: agar $y=f(x)$ funksiyaning grafigiga $A(x_0, f(x_0))$ nuqtada urinma mavjud bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo‘lsa, u holda bu urinma abssissalar o‘qiga parallel bo‘ladi (60- rasm).

Endi fransuz matematigi M. Rollning (1652—1719) hosila funksiyaning nuli haqidagi teoremasi bilan tanishamiz.

Roll teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a)=f(b)$ shartni qanoatlantirsa, u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday ξ nuqta topiladiki, $f'(\xi)=0$ bo‘ladi.*

Isboti. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzliksiz bo‘lganligi sababli, Veyershtrassning birinchi teoremasiga binoan bu funksiya shu segmentda chegaralangan bo‘ladi. Demak, aniq chegara prinsipiga ko‘ra

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

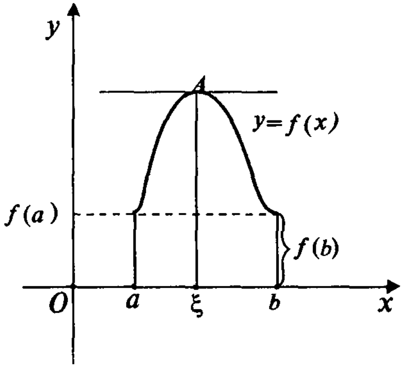
aniq chegaralar mavjud.

Bu yerda ikkita holat bo‘lishi mumkin: 1) $M=m$; 2) $M>m$. Bu holatlarni alohida-alohida qaraymiz:

1. Aytaylik, $M=m$ bo‘lsin. Bu holda, ravshanki, $f(x)= =M=m=\text{Const}(a\le x\le b)$ bo‘ladi. Demak, $\forall x\in[a, b]$ nuqtada $f'(x)=0$ tenglik bajariladi. Shunday qilib, mazkur holatda $f'(\xi)=0$ shartni qanoatlantiruvchi ξ nuqta sifatida istalgan $x\in(a, b)$ nuqtani olish mumkin.

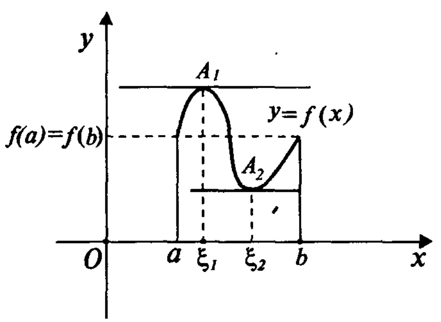
2. Faraz qilaylik, $M>m$ bo‘lsin. Bu holda, ravshanki, $f(a)=f(b)<M$ va $f(a)=f(b)>$ m munosabatlarning kamida bittasi o‘rinli bo‘ladi. Aniqlik uchun $f(a)=f(b)<M$ deylik. U holda, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lganligi sababli,

Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga binoan kamida bitta shunday $\xi \in (a,\ b)$ nuqta topiladiki, $M = f(\xi)$ (bunda $\xi \neq a,\ b$ bo'lishi ravshan, chunki $f(a) = f(b) < M$) bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya ξ nuqtada lokal maksimumga ega bo'ladi (61-rasm). Bundan tashqari, shart bo'yicha $f(x)$ funksiya ξ nuqtada differensiallanuvchi. Demak, bu holda, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(\xi) = 0$ bo'ladi. Teorema isbot qilindi.



61- rasm.

Geometrik nuqtai nazardan, Roll teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin: agar $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz, $(a,\ b)$ oraliqda differensiallanuvchi va $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda bu funksiya grafigida kamida bitta shunday A nuqta topiladiki, bu nuqta orqali $y = f(x)$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma abssissalar o'qiga parallel bo'ladi (62- rasm).



62- rasm.

2- misol. Ushbu $y = 4^{\sin x}$ funksiya hosilasining $[0;\ \pi]$ segmentdagi nullari topilsin.

Y e c h i s h . $y = 4^{\sin x}$ funksiya $[0;\ \pi]$ segmentda differensiallanuvchi:

$$y'(x) = 4^{\sin x} \cos x \cdot \ln 4 \quad (0 \le x \le \pi).$$

Demak, bu funksiya $[0;\ \pi]$ segmentda uzluksiz. Bundan tashqari, $y(0) = y(\pi) = 1$. U holda Roll teoremasiga asosan shunday $\xi \in (0;\ \pi)$ nuqta mavjudki, $y'(\xi) = 0$, ya'ni

$$y'(\xi) = 4^{\sin \xi} \cos \xi \cdot \ln 4 = 0 \Rightarrow \cos \xi = 0.$$

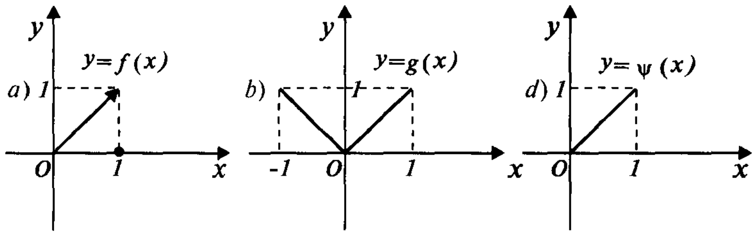
Bundan $\xi = \frac{\pi}{2}$.

Eslatma. Roll teoremasida $f(x)$ funksiyaga qo'yilgan har uchala shartning har biri muhim ahamiyatga ega. Buni biz misollar orqali tushuntirib beramiz. Masalan, ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x & (0 \le x < 1), \\ 0 & (x=1), \end{cases}$$

$$g(x)=|x| \ (-1 \le x \le 1), \ \psi(x)=x \ (0 \le x \le 1)$$

funksiyalarni qaraylik. Ravshanki, $f(x)$ funksiya uchun Roll teoremasining birinchi shartidan boshqa hamma shartlari, $g(x)$ funksiya uchun ikkinchi shartidan boshqa hamma shartlari, $\psi(x)$ funksiya uchun esa uchinchi shartidan boshqa hamma shartlari bajariladi (63- rasm).



63- rasm.

Hech qiyinchiliksiz tekshirish mumkinki, $f(x)$, $g(x)$, $\psi(x)$ funksiyalarning hech biri uchun Roll teoremasining xulosasi o‘rinli bo‘lmaydi.

Endi fransuz matematigi va mexanigi J.L. Lagranjning (1736—1813) o‘rta qiymat haqidagi teoremasi bilan tanishaylik.

Lagranj teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topiladiki,*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad (a < \xi < b)$$

bo‘ladi. Bu formula amalda ko‘pincha $\Delta f=f'(\xi)\Delta x$ $(\Delta f=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$; $\xi=x_0+\theta\cdot\Delta x$ $(0<\theta<1))$ ko‘rinishda qo‘llanilgani uchun u Lagranjning *chekli orttirmalar formulasi* deb ataladi.

Isboti. Quyidagi yordamchi funksiyani qaraymiz:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ravshanki, $g(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi va $g(a)=g(b)=0$. Demak, Roll teoremasiga ko'ra kamida bitta shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $g'(\xi) = 0$ bo'ladi. Endi $g'(\xi)$ ni topamiz:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (a < x < b)$$

bo'lgani uchun

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bu yerda $g'(\xi) = 0$ ekanini e'tiborga olsak,

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

yoki $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ $(a < \xi < b)$ tenglik hosil bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Nihoyat, Lagranj teoremasining umumiy holi bo'lgan Koshi teoremasi bilan tanishamiz.

Koshi teoremasi. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda kamida bitta shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta topiladiki,*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *chekli orttirmalar formulasining umumlashgan shakli* deyiladi. Xususan, agar hech bir $x \in (a, b)$ nuqtada $g'(x)$ funksiya nulga teng bo'lmasa, bu holda

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$\psi(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Ravshanki, bu funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi hamda $\psi(a) = \psi(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$ tenglik o'rinli. Demak, Roll teoremasiga ko'ra kamida bitta shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta mavjudki, $\psi'(\xi) = 0$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $\forall x \in (a, b)$ uchun

$$\psi'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - (f(b) - f(a))g'(x).$$

Xususan, $x=\xi \in (a, b)$ nuqtada $\psi'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)-$ $-(f(b)-f(a))g'(\xi)$. Demak, $\psi'(\xi)=0$ tenglikni hisobga olsak, $(g(b)-g(a))f'(\xi)=(f(b)-f(a))g'(\xi)$ $(a<\xi<b)$ bo'ladi. Agar $\forall x\in$ (a, b) nuqtada $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, bu holda yuqoridagi formuladan

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a<\xi<b)$$

formula kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Koshi teoremasida $g(x)=x$ desak, undan Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

8- §. LOPITAL QOIDASI

Biz bu yerda hosilaning limit hisoblashga tatbiqini, aniqrog'i aniqmaslikni ochishning *Lopital qoidasi* (G. Lopital (1661—1704) — fransuz matematigi) deb ataladigan maxsus usuli bilan tanishamiz.

Ushbu $\frac{0}{0}\left(\text{yoki}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishning Lopital qoidasi quyidagi teoremaga asoslanadi:

Bernulli-Lopital teoremasi. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a (a — chekli yoki ∞) nuqtaning biror $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ atrofida aniqlangan va differensiallanuvchi* $(g'(x)\neq 0)$ *bo'lib,*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \quad \left(\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty\right)$$

hamda chekli yoki cheksiz $b=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *limit mavjud bo'lsa, u holda* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *funksiya a nuqtada limitga ega, shu bilan birga*

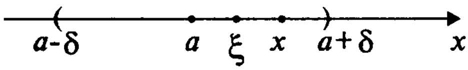
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. **a)** Aytaylik, $a\in \boldsymbol{R}$ bo'lsin. $f(a)=g(a)=0$ deb olamiz. U holda shartga ko'ra

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ \text{ва} \ \lim_{x\to a} g(x) = g(a),$$

ya'ni $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar ixtiyoriy $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ nuqtani tanlasak, u holda, Koshining o'rta qiymat haqidagi teoremasiga ko'ra, a va x nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki (64- rasm),



64- rasm.

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $f(a) = g(a) = 0$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1)$$

tenglik hosil bo'ladi. Bundan, $\lim\limits_{x\to a} \xi = a$ ekanini nazarga olib,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

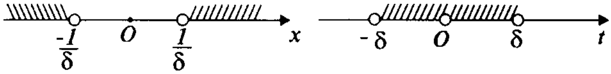
tenglikka ega bo'lamiz. Shart bo'yicha bu tenglikning o'ng tomoni mavjud bo'lganligi sababli, uning chap tomoni ham mavjud.

Shunday qilib, a-chekli va $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo'lgan holatda Bernulli-Lopital teoremasi isbot qilindi.

b) Endi bu teoremani $a = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ holatda isbot qilamiz. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $a = \infty$ «nuqta»ning biror $U_{\frac{1}{\delta}}(\infty) = \left\{x : |x| > \frac{1}{\delta}\right\}$ atrofida aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lib, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ bo'lsin. Bundan tashqari, chekli yoki cheksiz

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limit mavjud bo'lsin. Bu holda $t=\frac{1}{x}$ almashtirishni bajarsak, $U_{\frac{1}{\delta}}(\infty)$ atrof $U_{\delta}(0)=\{t:0<|t|<\delta\}$ atrofga o'tadi (65- rasm).



65- rasm.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar esa $\overset{\circ}{U}_{\delta}(0)$ to'plamda aniqlangan va differensiallanuvchi $h(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $\psi(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalarga o'tadi. Bundan tashqari, shart bo'yicha ushbu (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{t\to0}\frac{h'(t)}{\psi'(t)}=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b$$

limit mavjud hamda $\lim\limits_{t\to0}h(t)=\lim\limits_{t\to0}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{t\to0}\psi(t)=\lim\limits_{t\to0}g\left(\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

Demak, a) bandda isbot qilinganiga ko'ra $\frac{h(t)}{\psi(t)}$ funksiya $t=0$ nuqtada limit qiymatga ega, shu bilan birga

$$\lim_{t\to0}\frac{h(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to0}=\frac{h'(t)}{\psi'(t)}$$

tenglik o'rinli. Bu yerda $t=\frac{1}{x}$, $h(t)=f(x)$, $\psi(t)=g(x)$, $h'(t)=$ $=f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ ва $\psi'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bo'ladi. Shunday qilib, bu holatda ham Bernulli-Lopital teoremasi isbot qilindi.

d) Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ ($a\in \boldsymbol{R}$) bo'lsin. Bu holda, avvalgidagidek, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $x = a$ nuqtadagi uzluksizligini tiklay olmaymiz. Shuning uchun bu yerda avvalgidan boshqacha yo'l tutamiz. Ravshanki, $U(a) = U_\delta(a) = (a-\delta,\ a+\delta)$ $(\delta > 0)$. Agar $x_0 = a \pm \delta_0$ $(0 < \delta_0 < \delta)$ deb, ixtiyoriy $x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$ nuqtani olsak, teoremaning shartiga binoan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[x, x_0]$ yoki $[x_0, x]$ kesmada Koshining o'rta qiymat haqidagi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu teoremaga ko'ra x va x_0 nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (*)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi mana shu yerdan boshlab, $b\in \boldsymbol{R}$ va $b = \infty$ holatlarni alohida-alohida qaraymiz:

1) $b\in \boldsymbol{R}$ bo'lsin. (*) tenglikdan

$$\frac{f(x)}{g(x)} - b = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

deb yozib olamiz. Haqiqiy son modulining xossasiga ko'ra

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - b\right| \le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b\right| + \left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \qquad (1)$$

bo'ladi. Teoremaning sharti bo'yicha $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ chekli limit mavjud. Demak, agar ε ni ixtiyoriy musbat son desak, funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga asosan $\frac{\varepsilon}{3}$ son uchun shunday $\delta_1 = \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$ son topiladiki, $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_1}(a)$ nuqtada $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - b\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik bajariladi. Agarda $x_0 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a)$ (ya'ni $\delta_0 < \delta_1$) deb tanlasak, bu holda $\xi \in U_{\delta_1}(a)$ bo'ladi va demak,

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{\varepsilon}{3} > \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - b\right| \geq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| - |b|.$$

Bundan

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < |b| + \frac{\varepsilon}{3} + = \frac{3|b|+\varepsilon}{3} \tag{3}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shart bo‘yicha $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lganligi sababli, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x_0)}{g(x)} = 0$ va $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x_0)}{g(x)} = 0$. Demak, limitning ta’rifiga ko‘ra, yuqorida tayinlangan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_2}$ (a) nuqtada

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3|b|+\varepsilon} \tag{4}$$

tengsizliklar bajariladi.

Endi $\delta^* = \min\ (\delta_0,\ \delta_2)$ deb belgilaymiz. U holda ravshanki, $\forall x \in \mathring{U}_{\delta^*}(a)$ nuqtada (2), (3) va (4) tengsizliklarning hammasi o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, $\forall x \in \mathring{U}_{\delta^*}$ (a) nuqtada (1) tengsizlikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - b\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3|b|+\varepsilon}\cdot\frac{3|b|+\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu esa $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyaning $x = a$ nuqtada limitga ega ekanini, shu bilan birga

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = b = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tengliklarning o‘rinli bo‘lishini bildiradi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ $(b \in \boldsymbol{R})$ holda ham teorema isbot qilindi.

2) $b=\infty$, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy yetarli katta $E>0$ son berilganda ham $2E$ son uchun shunday $\delta_3=\delta_3(E)>0$ son topiladiki, $\forall x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_3}(a)$ nuqtada ushbu $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|>2E$ tengsizlik bajariladi. Agar $x_0\in\overset{\circ}{U}_{\delta_3}(a)$ (ya'ni $x_0=a\pm\delta_0$, $0<\delta_0<\delta_3$) deb olsak, bu holda $\xi\in\overset{\circ}{U}_{\delta_3}(a)$ bo'ladi, demak,

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|>2E. \tag{5}$$

bo'ladi. Endi (*) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{**}$$

Bu yerda, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ shartga ko'ra $\forall x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$ nuqtada $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ bo'lishi va $x_0=a\pm\delta_0$ deb tanlanganligidan $f(x)\neq f(x_0)$ bo'lishi ravshan. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1.$$

Demak, funksiya limitining Koshi bo'yicha ta'rifiga binoan $\varepsilon=1/2$ son uchun shunday $\delta_4>0$ son mavjudki, $\forall x\in\overset{\circ}{U}_{\delta_4}(a)$ nuqtada

$$\left|1-\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right|<\frac{1}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda haqiqiy son modulining xossasiga ko'ra

$$\left|\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right| = \left|1-\left(1-\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right)\right| \geq 1-\left|1-\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\right| > 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{6}$$

bo'ladi. Agar bu yerda $\delta^* = \min(\delta_0, \delta_4)$ desak, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta^*}(a)$ nuqtada (5) va (6) tengsizliklar bir vaqtda o'rinli bo'ladi va (**) tenglikdan $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta^*}(a)$ nuqtada $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > E$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ekanini bildiradi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $b=\infty$ holda teorema isbot qilindi.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ bo'lsin. $x = \frac{1}{t}$ almashtirishni bajarsak, $U_{\frac{1}{\delta}}(\infty) = \left\{x : |x| > \frac{1}{\delta}\right\}$ atrof $\overset{\circ}{U}_{\delta}(0)$ atrofga, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar esa $\overset{\circ}{U}_{\delta}(0)$ to'plamda aniqlangan va differensiallanuvchi $h(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $\psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalarga ($\psi'(t) \neq 0$) o'tadi. Bundan tashqari, teoremaning shartiga asosan

$$\lim_{t\to 0}\frac{h'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = b$$

(chekli yoki cheksiz) limit mavjud hamda $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Demak, d) bandda isbot qilinganiga ko'ra $\frac{h(t)}{\psi(t)}$ funksiya $t_0 = 0$ nuqtada limitga ega, shu bilan birga

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{h'(t)}{\psi'(t)}$$

tenglik o'rinli. Bu yerda $t = \frac{1}{x}$, $h(t) = f(x), \psi(t) = g(x)$, $h'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ va $\psi'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bo'ladi. Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ holda ham teorema isbot qilindi.

Teorema to'la isbotlandi.

1- eslatma. Bernulli-Lopital teoremasi (mos o‘zgartirishlar bilan) $x \to a+0$ (yoki $x \to a-0$) da ham, $x \to +\infty$ (yoki $x \to -\infty$) da ham o‘rinli bo‘ladi.

Aniqmaslikni ochishning

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglikka asoslangan usuli adabiyotlarda *Lopital qoidasi* deb yuritiladi. Ayrim manbalarda ko‘rsatilishicha bu qoida G.F. Lopitalgacha shveysariya matematigi Iogan Bernulli (1667—1748)ga ma’lum bo‘lgan. Shuning uchun biz yuqorida isbot qilingan teoremani *Bernulli-Lopital teoremasi* deb aytishni lozim topdik.

1- misol. Ushbu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}x - x}{x - \sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

limit Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

2- misol. Ushbu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

limit Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\varepsilon}} = 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

2- eslatma. Agar $f'(x)$ va $g'(x)$ hosila funksiyalar Bernulli-Lopital teoremasidagi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun bajarilgan barcha shartlarni qanoatlantirsa, bu holda Lopital qoidasidan takroran foydalanish mumkin:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

3- misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

limit Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblansin.

Y e c h i s h:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

3- eslatma. Qolgan barcha aniqmasliklar mos almashtirishlar yordamida yo $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikka keltirilib, so‘ngra Lopital qoidasini qo‘llash yo‘li bilan ochiladi.

4- misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to +0} x^{\alpha}\ln x$ $(\alpha>0)$ $(0\cdot\infty)$ limit Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblansin.

Y e c h i s h:

$$\lim_{x\to +0}x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to +0}x^{\alpha}=0\quad(\alpha>0).$$

4- eslatma. Lopital qoidasi limit hisoblashning qulay usuli bo‘lgani bilan uning ba’zi kamchiliklari ham bor. Masalan, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo‘lmasa ham $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo‘lishi mumkin. Buni bitta misol orqali ko‘rsatish kifoya. Aytaylik, $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

limit mavjud emas (chunki $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ mavjud emas). Biroq $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud, aniqrog‘i

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Funksiyaning nuqtada o'sishini (kamayishini) ta'riflang.
2. Nuqtada musbat (manfiy) ishorali hosilaga ega bo'lgan funksiyaning shu nuqtada o'sishini (kamayishini) isbotlang.
3. Funksiyaning nuqtadagi lokal minimumi (lokal maksimumi) deb nimaga aytiladi? Ular bitta nom bilan qanday ataladi?
4. Nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lgan funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, uning shu nuqtadagi hosilasini nulga teng bo'lishini (Ferma teoremasi) isbotlang.
5. Roll teoremasini isbotlang.
6. Lagranj va Koshi teoremalarini isbotlang.
7. Lopital qoidasi nima? Misollar keltiring.
8. Lonital qoidasi qulay bo'lgani bilan bir qatorda qanday kamchilikka ega?

9- §. TEYLOR FORMULASI

Matematik analizning asosiy formulalaridan biri ingliz matematigi Bruk Teylor (1685—1731) tomonidan kashf qilingan Teylor formulasidir. Bu formula ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyani Teylor ko'phadi deb ataladigan maxsus ko'rinishdagi algebraik ko'phad orqali taqribiy (yoki asimptotik) ifodalaydi.

9.1. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Faraz qilaylik.

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ (a_n \neq 0) \tag{1}$$

n-darajali algebraik ko'phad berilgan bo'lsin. Bu ko'phadni ketma-ket n marta differensiallaymiz:

$$\left.\begin{array}{l}
P_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}, \\
P_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + n(n-1)a_nx^{n-2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_n^{(n-1)}(x) = (n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2a_{n-1} + n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2a_nx, \\
P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n = n!a_n.
\end{array}\right\} \tag{2}$$

(1) va (2) ifodalarda $x = 0$ desak,

$$a_0 = P_n(0), \quad a_k = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 1,2,\dots,n)$$

bo'ladi. Bularni (1) ifodaga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k, \qquad (3)$$

bu yerda $P_n^{(0)}(0)=P_n(0),\quad 0!=1.$

Ravshanki, (1) va (3) ifodalar bir-biridan faqatgina k... -fitsiyentlarining yozilishi bilan farq qiladi.

Endi faraz qilaylik, x_0 ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin. (1) ko‘rinishda berilgan $P_n(x)$ algebraik ko‘phadni

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-x_0)^k \qquad (*)$$

ko‘rinishda ifodalash masalasini qaraymiz. Bu yerdagi α_0, α_1, α_2, α_3, ... , α_n lar hozircha noma’lum bo‘lgan o‘zgarmas haqiqiy sonlar. (*) ifodada $x-x_0=t$ almashtirishni bajarsak, $P_n(x)=$ $=P_n(x_0+t)=Q_n(t)$ va $Q_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k$ bo‘lib, (3) formulaga asosan

$$Q_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{Q_n^{(k)}(0)}{k!}t^k$$

bo‘ladi. Bunda $Q_n(t)=P_n(x), Q_n^{(k)}(0)=P_n^{(k)}(x_0)(k=0,1,2,..,n)$ va $x-x_0=t$ ekanini e’tiborga olsak,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0\right)^k \qquad (4)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula *ko‘phad uchun Teylor formulasi* deb ataladi.

1- misol. Ushbu $P_4(x)=x^4+1$ ikkihad $x_0=1$ nuqta atrofida Teylor formulasi bo‘yicha yoyilsin.

Yechish. Berilgan ikkihadni ketma-ket to‘rt marta differensiallaymiz:

$$P_4^{(1)}(x)=4x^3,\ P_4^{(2)}(x)=12x^2,\ P_4^{(3)}(x)=24x,\ P_4^{(4)}(x)=24.$$

Bu yerdagi x lar o‘rniga $x=x_0=1$ qiymatni qo‘ysak,

$$P_4^{(1)}(1)=4,\ P_4^{(2)}(1)=12,\ P_4^{(3)}(1)=24,\ P_4^{(4)}(1)=24$$

bo‘ladi. Demak, $P_4(1) = 2$ ekanini e’tiborga olsak, (4) formuladan

$$x^4 + 1 = 2 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 + (x - 1)^4$$

yoyilmani hosil qilamiz.

9.2. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi. x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan va x_0 nuqtada n marta differensiallanuvchi bo‘lgan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun (4) algebraik ko‘phadga o‘xshash

$$T_f(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5}$$

maxsus algebraik ko‘phadni tuzish mumkin. Bunday ko‘phad har bir $f(x)$ funksiya uchun yagona bo‘lib, unga $f(x)$ funksiyaning *Teylor ko‘phadi* deyiladi. Masalan,

$$T_{\sin x}(x; 0) = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1}. \tag{5′}$$

Haqiqatan, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ deylik. U holda

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Bundan

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{m-1} \ (k=2m-1), \\ 0 \ (k = 2m), \ (m \in N) \end{cases}$$

tengliklar kelib chiqadi. Bularni (5) ga qo‘ysak, (5′) hosil bo‘ladi.

Quyidagi asosiy teorema o‘rinli:

Teylor teoremasi. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ atrofida aniqlangan bo‘lib, shu atrofda $(n+1)$-tartibli hosilaga ega bo‘lsa, u holda x_0 va $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ nuqtalar orasida yotuvchi shunday ξ nuqta topiladiki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\left(\frac{x - x_0}{x - \xi}\right)^p (x - \xi)^{n+1} \tag{6}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda n — ixtiyoriy tayin natural son; p— ixtiyoriy musbat son. (6) formula f funksiya uchun (markazi x_0 nuqtada joylashgan, $(n+1)$-hadidan keyingi qoldig'i *umumiy shaklda* (yoki Shlemilx—Rosh shaklida)gi *Teylor formulasi* deyiladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $U_\delta(x_0)$ atrofda aniqlangan va x_0 nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lganligi sababli, yuqorida aytganimizga ko'ra, bu funksiya uchun

$$T_f(x;x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ko'phad mavjud bo'lib, $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)=T_f(x;\ x_0)+R_{n+1}(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\forall x\in U_\delta(x_0)$ nuqtada $f(x)$ miqdor $R_{n+1}(x)$ xatolik bilan $T_f(x;\ x_0)$ miqdorga teng bo'ladi. Bundan

$$R_{n+1}(x)=f(x)-T_f(x;\ x_0).$$

Endi $R_{n+1}(x)$ qoldiq uchun (6) ifodaning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $x\in U_\delta(x_0)$ nuqta ixtiyoriy tayin nuqta bo'lsin. Aniqlik uchun, $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ deylik. $[x_0,\ x]$ segmentda aniqlangan

$$g(t)=f(x)-T_f(x;\ t)-(x-t)^pQ^*(x)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu yerda

$$Q^*(x)=\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p},\quad T_f(x;t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Ravshanki, $g(t)$ funksiya $[x_0,\ x]$ segmentda differensiallanuvchi va $g(x_0)=g(x)=0$, ya'ni $g(t)$ funksiya $[x_0,\ x]$ segmentda Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, Roll teoremasiga ko'ra shunday $\xi\in(x_0,\ x)$ nuqta topiladiki, $g'(\xi)=0$ bo'ladi. $g'(t)$ hosilani topamiz:

$$g'(t) = \left(f(x) - T_f(x,t) - (x-t)^p Q^*(x)\right)'_t =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + f^{(k)}(t)k(x-t)^{k-1}(-1)\right) +$$

$$+ p(x-t)^{p-1} Q^*(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + p(x-t)^{p-1} Q^*(x) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + p(x-t)^{p-1} Q^*(x) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q^*(x),$$

ya'ni

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1} Q^*(x).$$

Bu yerda, $t = \xi$ desak,

$$g'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p(x-\xi)^{p-1} Q^*(x)$$

bo'ladi. Bundan, $g'(\xi) = 0$ ekanini e'tiborga olib,

$$Q^*(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-\xi)^{n-p+1}$$

ifodani hosil qilamiz. Ma'lumki,

$$Q^*(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p}.$$

Demak,

$$R_{n+1}(x) = Q^*(x)(x-x_0)^p = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}(x-\xi)^{n-p+1}(x-x_0)^p =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1} \quad (x_0 < \xi < x).$$

Ushbu $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ holda ham $R_{n+1}(x)$ uchun xuddi shunday ifoda keltirib chiqariladi.

Shunday qilib,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x - \xi)^{n+1}$$

$(\xi = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1)$. Bu yerdagi θ miqdor, umuman aytganda, n, p va x larga bog'liq; ξ nuqta x_0 va x nuqtalar orasida joylashganligi sababli

$$\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p$$

ifoda har qanday $p > 0$ qiymatda aniqlangan. Teorema isbot qilindi.

9.3. Qoldiq hadning Lagranj va Koshi shakllari. Teylor formulasini qo'llashdagi asosiy qiyinchiliklardan biri uning $R_{n+1}(x)$ qoldig'ini baholashdir. Shu maqsadda qoldiqning Lagranj va Koshi shakllari keltirib chiqarilgan. Avval qoldiqning Lagranj shakli bilan tanishaylik. Ushbu

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x - \xi)^{n+1} \tag{7}$$

umumiy ifodada $p = n + 1$ deymiz. U holda

$$x - \xi = (x - x_0)(1 - \theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

ekanini e'tiborga olib,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifoda *qoldiq hadning Lagranj shakli* deb ataladi.

Endi qoldiqning Koshi shaklini keltirib chiqaramiz. Buning uchun (7) ifodada $p = 1$ deymiz. U holda,

$$x - \xi = (x - x_0)(1 - \theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

tenglikka ko'ra,

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

bo'ladi. Bu ifoda *qoldiqning Koshi shakli* deyiladi. Qoldiqning Lagranj va Koshi shakllari (7) ifodadan p parametrning turli qiymatlarida hosil bo'lganligi tufayli, ulardagi θ ning qiymatlari, umuman aytganda, turlicha bo'ladi. Qoldiqning Lagranj va Koshi shakllari odatda $f(x)$ funksiyaning u yoki bu tayin x nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblashda qo'llaniladi. Ayrim hollarda qoldiqning Koshi shakli uning Lagranj shakliga qaraganda ma'lum afzallikka ega bo'ladi. Buni biz kelgusi paragrafda qaraymiz.

10- §. QOLDIQ HADNI BAHOLASH. AYRIM ELEMENTAR FUNKSIYALARNI MAKLOREN FORMYLASI BO'YICHA YOYISH

10.1. Qoldiq hadning Peano shakli. Matematik analiz va uning tatbiqlarida shunday masalalar uchraydiki, ularga Teylor formulasini qo'llaganda, bizni qoldiq hadning son qiymati emas, balki uning $x \to x_0$ da ($x-x_0$ cheksiz kichik funksiyaga nisbatan) cheksiz kichiklik tartibi qiziqtiradi. Bunday masalalarda qoldiq hadning Peano shakli (Juzeppe Peano (1858—1932) — italyan matematigi) qo'llaniladi.

Quyidagi teorema o'rinli:

1- teorema (Peano). *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $U_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bo'lib, shu atrofda $(n-1)$- tartibli hosilaga va x_0 nuqtada n- tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0) \tag{1}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula (markazi x_0 nuqtada joylashgan) *qoldiq hadi Peano shaklida bo'lgan Teylor formulasi* deyiladi.

Isboti. Teylor teoremasiga ko'ra, x_0 va $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki, $n \in N$ va $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ qiymat uchun

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2}$$

formula o'rinli bo'ladi. $f^{(n)}(x)$ hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli,

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0), \quad \text{chunki} \quad \lim_{x\to x_0} \xi = \lim_{x\to x_0}(x_0 + \theta(x - x_0)) =$$

$$= x_0 \quad (0 < \theta < 1).$$

Demak, $f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \alpha$ $(\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0)$ deb yozishimiz mumkin. U holda

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x - x_0)^n =$$
$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha}{n!}(x - x_0)^n \tag{3}$$

bo'ladi. Har qanday n natural son uchun

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \alpha = 0$$

bo'lganligi tufayli, ta'rifga ko'ra

$$\frac{\alpha}{n!}(x - x_0)^n = o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \to x_0) \tag{4}$$

baho o'rinli bo'ladi. (3) va (4) tengliklardan

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

ifodani hosil qilamiz. Buni (2) ifodaga qo'ysak, (1) formula kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Amaliyotda ko'pincha markazi $x_0 = 0$ nuqtada bo'lgan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x) \tag{5}$$

Teylor formulasi qo'llaniladi. Bu yerda $R_{n+1}(x)$ qoldiqni quyidagi ko'rinishlarning istalgan biri shaklida yozish mumkin:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \quad (\textit{Lagranj}),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \quad (\textit{Koshi}),$$

$$R_{n+1}(x) = o(x^n) \quad (x \to 0) \quad (\textit{Peano}).$$

Shuni aytish lozimki, (5) formula adabiyotlarda ingliz matematigi Kolin Makloren (1698—1746) nomi bilan *Makloren formulasi* deb yuritiladi. Biz ham bundan keyin har doim bu formulani «markazi $x_0=0$ nuqtada bo'lgan Teylor formulasi» deyish o'rniga, ham qulaylik uchun, ham an'anaviy udumga putur yetkazmaslik maqsadida Makloren formulasi deb ataymiz.

10.2. Qoldiq hadni baholash. Endi Makloren formulasidagi qoldiq hadni baholash masalasini qaraymiz. Bu masala barcha hosilalari majmuasi biror $U_\delta(0)$ atrofda chegaralangan funksiyalar uchun oson yechiladi.

1- ta'rif. Agar shunday $M>0$ son mavjud bo'lib, barcha k natural sonlar va $\forall x \in U_\delta(0)$ uchun $|f^{(k)}(x)| \le M$ tengsizlik bajarilsa, f *funksiyaning barcha hosilalari majmuasi* $U_\delta(0)$ *atrofda* M *son bilan chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $f(x)=e^x$, $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar ana shunday funksiyalardir. Haqiqatan, e^x funksiyaning barcha $f^{(k)}(x)=e^x$ $(k=1,2,...)$ hosilalari ixtiyoriy $[-r, r]$ $(r>0)$ segmentda $M=e^r$ son bilan chegaralangan; $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning barcha $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ va $(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=1,2,...)$ hosilalari cheksiz to'g'ri chiziqning hamma joyida $M=1$ son bilan chegaralangan.

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya biror $U_\delta(0)=(-\delta, \delta)$ atrofda aniqlangan bo'lib, uning barcha hosilalari majmuasi shu atrofda $M>0$ son bilan chegaralangan bo'lsa, u holda ixtiyoriy n natural son va $\forall x \in U_\delta(0)$ uchun*

$$|R_{n+1}(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \le M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Qoldiqning Lagranj shaklidan foydalanamiz:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| =$$
$$= \left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1). \tag{*}$$

Shartga ko'ra $\forall n$ natural son va $\forall x \in U_\delta(0)$ uchun $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ bo'lganligi sababli, xuddi ana shu n va x larda $|f^{n+1)}(\theta x)| \le M$ $(0 < \theta < 1)$ bo'ladi. Shunday qilib, (*) dan (6) tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

1- eslatma. Har qanday x haqiqiy son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

I s b o t i. Aytaylik, x ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. Ushbu

$$\left\{ a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right\}$$

sonli ketma-ketlikni qaraymiz. Ravshanki, bu ketma-ketlik quyidan 0 son bilan chegaralangan. Bundan tashqari,

$$a_{n+1} = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{|x|}{n+2} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+2} a_n.$$

Yetarli katta n qiymatda (ixtiyoriy x haqiqiy son uchun) $\frac{|x|}{n+2} < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli, shunday n_0 natural sonni ko'rsatish mumkinki, $\forall n \ge n_0$ uchun $a_{n+1} = \frac{|x|}{n+2} a_n < a_n$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu esa $\{a_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanini bildiradi. Demak, monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ chekli limit mavjud. $a = 0$ ekanini ko'rsatamiz. Har qanday n natural son uchun $a_n = \frac{|x|}{n+1} a_{n-1}$ bo'lgani hamda ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$ ekanligi sababli, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = 0 \cdot a = 0$.

1- eslatmadan ko'rinib turibdiki, n natural sonni yetarli katta qilib tanlash hisobiga (6) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodaning qiymatini istalgancha kichraytirishimiz mumkin. Bu esa barcha hosilalari majmuasi $x_0=0$ nuqta atrofida chegaralangan funksiyalarni taqribiy hisoblashga Makloren formulasini oldindan berilgan har qanday aniqlik bilan tatbiq qilish imkonini beradi.

10.3. Ayrim elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish. Endi ayrim eng muhim elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyamiz va qoldiqlarini baholaymiz:

a) $f(x) = e^x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoying va qoldig'ini baholang.

Yechish. $f(x) = e^x$ funksiya $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada istalgancha marta differensiallanuvchi: $f^{(k)}(x) = e^x$ $(k = 1, 2, ...)$. Xususan,

$f^{(k)}(0) = e^0=1$ $(k = 1,2,...)$. Demak, $\forall n$ natural son va $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x)$$

bo'ladi. $R_{n+1}(x)$ qoldiqni baholash uchun qoldiqning Lagranj shaklidan foydalanamiz:

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Ixtiyoriy tayin $r > 0$ olinganda ham $\forall x \in [-r, r]$ uchun $e^{\theta x} < e^r$ bo'lgani sababli, $\forall x \in [-r, r]$ qiymat uchun

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

b) $f(x) = \sin x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoying va qoldig'ini baholang.

Yechish. $f(x) = \sin x$ funksiya $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada istalgancha differensiallanuvchi:

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 1,2,...).$$

Xususan, $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ va $\forall k$ natural son uchun

$$f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{m-1} & (k = 2m - 1) \ (m \in N), \\ 0 & (k = 2m) \ (m \in N). \end{cases}$$

Demak, bu funksiya uchun Makloren formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\sin x = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} x^{2m-1} + R_{2n+1}(x).$$

Bu yerda, n — ixtiyoriy natural son, $x \in R$. $R_{2n+1}(x)$ qoldiq hadni baholash uchun uni Lagranj shaklida ifodalaymiz:

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Ravshanki, $\forall x \in [-r, r]$ (r — ixtiyoriy musbat son) qiymat va $\forall n$ natural son uchun

$$|R_{2n+1}(x)| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| < \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

d) $f(x) = \cos x$ funksiyani Makloren formulasi bo‘yicha yoying va qoldig‘ini baholang.

Y e c h i s h. $f(x) = \cos x$ funksiya $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada istalgancha differensiallanuvchi:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Xususan, $f^{(0)}(0) = f(0) = \cos 0 = 1$ va $\forall k \in N$ son uchun

$$f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (k = 2m) \quad (m \in N), \\ 0 & (k = 2m-1) \ (m \in N) \end{cases}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun bu funksiyaning Makloren formulasi bo‘yicha yoyilmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2n+2}(x).$$

Bu yerda, n — ixtiyoriy natural son, $x \in \boldsymbol{R}$. $R_{2n+2}(x)$ qoldiq hadni baholash uchun uni Lagranj shaklida ifodalaymiz:

$$R_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)\quad (0<\theta<1).$$

Ko'rinib turibdiki, $\forall x\in[-r,\ r]$ (r — ixtiyoriy musbat son) qiymat va $\forall n$ natural son uchun

$$|R_{2n+2}(x)|=\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|\cos(\theta x+(n+1)\pi)\right|<\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

e) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoying va qoldig'ini baholang.

Y e c h i s h. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya $\forall x\in(-1,\ +\infty)$ nuqtada istalgancha differensiallanuvchi:

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k})\quad (k=1,2,...).$$

Xususan,

$$f^{(0)}(0)=f(0)=\ln 1=0 \text{ va } f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)! \qquad (k=1,2,...).$$

Demak, bu funksiya uchun Makloren formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+R_{n+1}(x).$$

Bu yerda, n — ixtiyoriy natural son, $x\in(-1,\ +\infty)$. $R_{n+1}(x)$ qoldiq hadni baholashda x ning qayerda yotishi muhim ahamiyatga ega. Biz bu yerda qoldiq hadni $x\in(-1,\ +1]$ bo'lganda baholaymiz. $x\in[0;\ 1]$ bo'lganda qoldiq hadning Lagranj shaklidan foydalanamiz:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\quad (0<\theta<1).$$

Ko'rinib turibdiki, $\forall x\in\ [0,\ 1]$ uchun

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{1}{n+1}$$

bo'ladi. Demak, barcha $x\in[0;\ 1]$ qiymatlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$.

Endi $R_{n+1}(x)$ qoldiqni $x\in[-r;\ 0]$ $(0<r<1)$ qiymatlarda baholash uchun uni Koshi shaklida ifodalaymiz:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^n}{1+\theta x}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \quad (0<\theta<1).$$

Bu yerda $\forall x\in[-r,\ 0]$ uchun $\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$ ekanini e'tiborga olsak,

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{1+\theta x}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right|<\frac{r^{n+1}}{1-r} \quad (0<\theta<1)$$

bo'ladi. $r\in(0;\ +1)$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{1-r}=0.$

Demak, $\forall x\in[-r;\ 0]$ $(0<r<1)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0 \tag{*}$$

bo'lar ekan.

Shuni aytishimiz lozimki, $x\in(1;\ +\infty)$ bo'lganda (*) tenglik bajarilmaydi. Haqiqatan,

$$R_{n+1}(x)-R_n(x)=\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k-\ln(1+x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=(-1)^n\frac{x^n}{n}$$

deb yozib olaylik. $x\in(1;\ +\infty)$ bo'lganda $(-1)^n\frac{x^n}{n}$ ifoda $n\to\infty$ da nulga intilmaydi. Shu sababli, $x>1$ bo'lganda $\{R_n(x)\}$ ketma-ketlik uchun limit mavjudligining Koshi kriteriyasi bajarilmaydi. Demak, bu holda $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)$ mavjud emas.

f) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoying va qoldig'ini baholang ($\alpha\in\boldsymbol{R}$).

Y e c h i s h.

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad (k=1,2,\ldots)$$

va

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1),\ f^{(0)}(0)=f(0)=1$$

bo'lganligi sababli, bu funksiya uchun Makloren formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}+R_{n+1}(x).$$

Bu yerda, n — ixtiyoriy natural son, x ning qandayligi α ga bog'liq. Xususan, agar $\alpha\in N$ bo'lsa, u holda x qanday bo'lmasin, formuladagi $(\alpha+2)$-nchi haddan boshlab, barcha hadlar yo'qolib ketadi va Makloren formulasi Nyuton binomi formulasiga aylanadi:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\alpha}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}\quad(\alpha\in N).$$

Qaralayotgan funksiyaning Makloren formulasi bo'yicha yoyilmasi α ning boshqa qiymatlarida, har qalay $x>-1$ bo'lganda ma'noli bo'ladi. Shuning uchun $R_{n+1}(x)$ qoldiq hadni $x\in(-1;\ +\infty)$ bo'lganda baholaymiz. Aytaylik, $x\in[0;\ 1)$ bo'lsin. Bu holda qoldiq hadning Lagranj shaklidan foydalanamiz:

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\quad(0<\theta<1).$$

Bundan

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\,|1+\theta x|^{\alpha-n-1}\leq$$

$$\leq\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\quad(n>\alpha,\ 0\leq x<1).$$

Ko'rinib turibdiki,

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{(n+1)!}x^{n+1}=0\quad(0\leq x<1).$$

Demak, $\forall x\in\ [0;\ 1)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0.$$

Faraz qilaylik, $x\in(-1;\ 0)$ bo'lsin. $R_{n+1}(x)$ qoldiqni Koshi shaklida ifodalab, so'ngra uni baholaymiz:

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^{n}\quad(0<\theta<1).$$

Bundan

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \times$$
$$\times|1+\theta x|^{\alpha-1} \le C\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \quad (-1 < x < 1),$$

chunki $\alpha-1>0$ bo'lganda $(1+\theta x)^{\alpha-1} \le 2^{\alpha-1}$; $\alpha-1<0$ bo'lganda esa $(1+\theta x)^{\alpha-1} < (1-|x|)^{\alpha-1}$ va

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \le \left(\frac{1-\theta}{1-\theta}\right)^n = 1.$$

Bu yerda C deb n ga bog'liq bo'lmagan, umuman aytganda x ga bog'liq bo'lgan son belgilangan. Demak, $\forall x \in (-1;\ 0)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Endi $x \in (1;\ +\infty)$ holatni qaraymiz. Bu holda, qaralayotgan funksiyaning Makloren formulasi bo'yicha yoyilmasidagi qoldiq had $n\to\infty$ da nulga intilmaydi. Haqiqatan, bu holda

$$R_n(x) - R_{n+1}(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k -$$
$$-(1+x)^\alpha + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k =$$
$$= x^n\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \to \infty \quad (n\to\infty)$$

bo'lgani sababli, $\{R_{n+1}(x)\}$ uchun limit mavjudligining Koshi kriteriyasi bajarilmaydi.

$x=-1$ va $x=1$ hollarni qaramaymiz. Faqat, bu hollarda $n\to\infty$ da (α ga bog'liq ravishda) $R_{n+1}(-1)$ va $R_{n+1}(1)$ qoldiqlarning nulga intilishi ham, intilmasligi ham mumkinligini aytib o'tish bilan kifoyalanamiz ($\alpha<0$ bo'lganda $x=-1$ nuqtada $(1+x)^\alpha$ funksiya aniqlanmagan).

Eslatma. Yuqorida qaralgan funksiyalarga nisbatan murakkabroq funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish uchun bevosita (funksiya hosilalarini hisoblamasdan, yoyilmaning yagonaligiga asoslanib) e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ ($\alpha\in\boldsymbol{R}$) va boshqa ma'lum funksiyalarning Makloren formulasi bo'yicha yoyilmalaridan foydalanish kifoya.

Misol. $e^{\sin x}$ funksiya uchun $o(x^3)$ qoldiqli Makloren formulasi yozilsin.

Y e c h i s h. Ushbu $e^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} + o(y^n) \quad (y \to 0)$ yoyilmaga ko'ra, $x \to 0$ da

$$e^{\sin x} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^k x}{k!} + o\left(\sin^3 x\right) =$$

$$= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o\left(\sin^3 x\right) =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right).$$

Demak, $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad (x \to 0)$. Bu yerda, $\sin x$ funksiyaning Makloren formulasiga yoyilmasidan va $o(\sin^3 x) = o(x^3)$ $(x \to 0)$ asimptotik tenglikdan foydalanildi.

11- §. FUNKSIYANING O'ZGARMASLIK SHARTI. FUNKSIYANING MONOTONLIK SHARTLARI

11.1. Funksiyaning oraliqda o'zgarmaslik sharti. Quyidagi teorema o'rinli:

1- t e o r e m a. *(a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu oraliqda o'zgarmas bo'lishi uchun* $\forall x \in (a, b)$ *nuqtada $f'(x) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.*

I s b o t i. 1) **Zarurligi.** Faraz qilaylik, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f(x) = C =$Const bo'lsin. Bu holda $\forall x \in (a, b)$ nuqtada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = 0.$$

2) **Yetarliligi.** Aytaylik, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) = 0$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0 \in (a, b)$ nuqtani olib, $[x_0, x]$ yoki $[x, x_0]$ segmentda $f(x)$ funksiya uchun Lagranjning o'rta qiymat haqidagi teoremasini qo'llaymiz (bu segmentda $f(x)$ funksiya uchun Lagranj

teoremasining barcha shartlari bajariladi). Bu teoremaga ko'ra shunday $\xi\in(x_0, x)$ yoki $\xi\in(x, x_0)$ nuqta topiladiki,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(x) = 0$ $(a < x < b)$ bo'lgani sababli, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f(x) = f(x_0) = \text{Const}$ bo'ladi.

Teorema isbot qilindi.

11.2. Funksiyaning monotonlik shartlari. Quyidagi teoremalar o'rinli:

2- teorema. *(a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu oraliqda kamaymaydigan (o'smaydigan) bo'lishi uchun $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. Teoremani kamaymaydigan funksiya uchun isbot qilamiz (o'smaydigan funksiya uchun ham xuddi shu kabi isbotlanadi).

1) **Zarurligi.** Aytaylik, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiya shu oraliqda kamaymaydigan bo'lsin (ya'ni $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x_1 \in (a, b)$ va $\forall x_2 \in (a, b)$ nuqtalar uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ shart bajarilsin). U holda ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtani olib, unga $x + \Delta x \in (a, b)$ shartga bo'ysinuvchi ixtiyoriy $\Delta x > 0$ orttirmani bersak,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

bo'ladi. Tengsizliklarda limitga o'tish qoidasiga ko'ra, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Zarurligi isbot qilindi.

2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) oraliqda kamaymaydigan ekanini ko'rsatamiz. $a < x_1 < x_2 < b$ shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $[x_1, x_2]$ segmentda $f(x)$ funksiya uchun Lagranjning o'rta qiymat haqidagi teoremasini qo'llaymiz. Bu teoremaga asosan shunday $\xi\in (x_1, x_2)$ nuqta topiladiki,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f'(\xi) \geq 0$ bo'lganligi sababli, bu yerdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) oraliqda kamaymaydigan ekanini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

3- teorema. *(a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu oraliqda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ va hech bir $X (X \subset (a, b))$ oraliqda $f'(x) \not\equiv 0$ bo'lishi zarur va yetarli.*

Isboti. Teoremaning isbotini o'suvchi funksiya uchun bajaramiz (kamayuvchi funksiya uchun ham xuddi shu singari isbot qilinadi).

1) **Zarurligi.** Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi va o'suvchi funksiya bo'lsin. U holda 2- teoremaga asosan $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ bo'ladi. Endi hech bir $X(X \subset (a, b))$ oraliqda $f'(x) \not\equiv 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: shunday $X(X \subset (a, b))$ oraliq mavjud bo'lsinki, $\forall x \in X$ nuqtada $f'(x) = 0$ bo'lsin. Bu holda 1- teoremaga ko'ra $\forall x \in X$ nuqtada $f(x) = C = \text{Const}$ bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) da o'suvchi bo'lishiga ziddir. Demak, hech bir $X(X \subset (a, b))$ oraliqda $f'(x) \equiv 0$ bo'lmaydi.

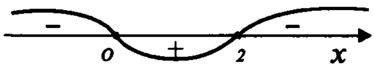
2) **Yetarliligi.** Faraz qilaylik, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ va hech bir $X(X \subset (a, b))$ oraliqda $f'(x) \equiv 0$ bo'lmasin. U holda 2- teoremaga asosan $f(x)$ funksiya (a, b) da kamaymaydigan bo'ladi, ya'ni $\forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ nuqtada $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ bo'ladi. Endi bu tengsizliklardagi tenglik belgilarining o'rinli bo'lmasligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $f(x_1) = f(x_2)$ bo'lsin. U holda, ravshanki, $\forall x \in (x_1, x_2)$ nuqtada $f(x) = f(x_1) = \text{Const}$ bo'ladi. Bundan (1- teoremaga asosan) $\forall x \in (x_1, x_2)$ nuqtada $f'(x) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa «Hech bir $X(X \subset (a, b))$ oraliqda $f'(x) \equiv 0$ bo'lmasin» degan shartga ziddir. Demak, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'suvchi bo'lar ekan.

Teorema isbot qilindi.

1- misol. Ushbu $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ funksiyaning monotonlik oraliqlari topilsin.

Yechish. $f(x)$ funksiyaning hosilasini topamiz: $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Ko'rinib turibdiki, $f'(x)$ funksiya faqat $x_0 = 0$ va $x_1 = 1$ nuqtalarda nulga aylanadi. Uning qayerda musbat va qayerda manfiy bo'lishini aniqlash uchun «oraliqlar usuli (intervallar metodi)» dan foydalanamiz (66- rasm). Demak, 3- teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $(-\infty,\ 0)$ va $(1,\ +\infty)$ oraliqlarda o'suvchi, $(0;\ 1)$ oraliqda esa kamayuvchi bo'lar ekan.

66- rasm.



67- rasm.

2- misol. Ushbu $f(x) = x^2e^{-x}$ funksiyaning monotonlik oraliqlari topilsin.

Yechish. $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$. Oraliqlar usulini qo'llaymiz (67- rasm). Demak, 3- teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $(-\infty;\ 0)$ va $(2;\ +\infty)$ oraliqlarda kamayuvchi, $(0;\ 2)$ oraliqda esa o'suvchi bo'lar ekan.

12- §. FUNKSIYANING LOKAL VA ABSOLUT EKSTREMUMLARINI TOPISH

12.1. Funksiyaning lokal ekstremumlarini topish. Biz funksiyaning lokal ekstremumi tushunchasini Ferma teoremasini bayon qilgan vaqtda ta'riflagan edik. Eslatamizki, agar x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ atrofi mavjud bo'lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $f(x) \leq f(x_0)$ yoki $f(x) \geq f(x_0)$ bo'lsa, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal ekstremumi deyiladi.

Agar lokal ekstremum ta'rifidagi tenglik belgisi faqat x_0 nuqtadagina o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning *xos lokal ekstremumi* deb ataladi. «Ekstremum» so'zi lotincha (extremum) so'z bo'lib, «chetki» (qiymat) degan ma'noni anglatadi.

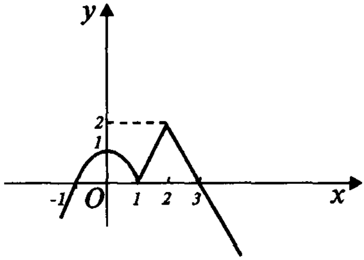
Biz bu yerda hosila yordamida funksiyaning lokal ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

Teorema (Zaruriy shart). *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lsa, u holda yo $f'(x_0) = 0$ bo'ladi, yoki $f'(x_0)$ chekli hosila mavjud bo'lmaydi.*

Bu teoremaning birinchi qismi Ferma teoremasi bilan ustma-ust tushadi. Ikkinchi qismini quyidagi misol orqali tushuntirish mumkin:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & (x<1),\\ 2x-2 & (1\le x<2),\\ 6-2x & (x\ge 2)\end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $X=(-\infty;\ +\infty)$ sonli to'g'ri chiziqda aniqlangan bo'lib, $x=0$, $x=1$ va $x=2$ nuqtalarda lokal ekstremumga ega (68- rasm): $\max\limits_{x\in U_\delta(0)} f(x)=f(0)=1$,



68- rasm.

$\min\limits_{x\in U_\delta(1)} f(x)=f(1)=0$, $\max\limits_{x\in U_\delta(2)} f(x)=f(2)=2$. Bu yerda $\delta\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

Ko'rinib turibdiki, $f'(0)=0$; $f'(1)$ va $f'(2)$ hosilalar mavjud emas (buni bir tomonli hosilalar yordamida tekshirib ko'rish qiyin emas):

$$f'(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x^2}{x-1}=-\lim_{x\to 1-0}(x+1)=-2,$$

$$f'(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}2=2,$$

$$f'(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}2=2,$$

$$f'(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{4-2x}{x-2}=-\lim_{x\to 2+0}2=-2.$$

Shuni aytish kerakki, $f'(x_0)=0$ yoki «$f'(x_0)$ chekli hosila mavjud emas» degan shart zaruriy shartlar bo'lib, ular yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun $f'(0)=0$, lekin u $x_0=0$ nuqtada o'suvchi. Yoki

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & (x\ne 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Ma'lumki, $f'(0)$ mavjud emas, lekin u $x_0=0$ nuqtada ekstremumga ega emas.

Ushbu $f'(x)$ hosila funksiyaning nullari $f(x)$ funksiyaning *statsionar nuqtalari* deb ataladi (bunday nuqtalarda funksiyaning o'zgarish tezligi go'yo «to'xtagandek» tuyulgani uchun ular shunday nom bilan ataladi). Biz bundan keyin har doim, $f'(x)$ chekli hosila mavjud bo'lmagan $x\in D(f)$ nuqtalarni $f(x)$ funksiyaning *maxsus* *nuqtalari* deb atashni kelishib olamiz. $f(x)$ funksiyaning statsionar va maxsus nuqtalarini bitta nom bilan $f(x)$ funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataymiz.

Yuqorida keltirilgan zaruriy shart, funksiyaga lokal ekstremum beruvchi nuqtalarni shu funksiyaning kritik nuqtalari to'plamidan izlash kerakligini bildiradi. Bu esa ishimizni ancha yengillashtiradi.

Funksiyaga lokal ekstremum beruvchi nuqtalar uning barcha kritik nuqtalari to'plamidan quyidagi qoidalar (yetarli shartlar) asosida ajratib olinadi:

Birinchi qoida. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya o'zining x_0 kritik nuqtasining biror $U_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan, x_0 nuqtada uzluksiz va kamida $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ o'yiq atrofda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda:*

1) *agar $\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ nuqtada $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ va $\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ nuqtada $f'(x) < 0(f'(x) > 0)$ bo'lsa, u holda $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) bo'ladi;*

2) *agar barcha $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtalarda $f'(x)$ hosilaning ishorasi bir xil bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lmaydi.*

I s b o t i. Aytaylik, $x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ $(x \in (x_0-\delta,\ x_0))$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani sababli, bu funksiya $[x_0, x]([x, x_0])$ kesmada Lagranjning o'rta qiymat haqidagi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. O'sha teoremaga asosan x_0 va x nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Teoremaning 1) va 2) qismlarini alohida-alohida qaraymiz:

1) Aytaylik, $\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ nuqtada $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$ va $\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ nuqtada $f'(x) < 0(f'(x) > 0)$ bo'lsin. U holda, ravshanki, (1) tenglikdan $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtada $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa ta'rifga

ko‘ra $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) ekanini bildiradi.

2) Aytaylik, barcha $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ nuqtalarda $f'(x)$ hosilaning ishorasi bir xil bo‘lsin. U holda yana (1) tenglikdan foydalanib, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ nuqtada $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$ va $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ nuqtada $f(x) > f(x_0)(f(x) < f(x_0))$ ekaniga ishonch hosil qilamiz. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada o‘suvchi (kamayuvchi) [ya'ni, lokal ekstremum yo‘q] ekanini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

1- misol. Ushbu $y = 2 + x - x^2$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Y e c h i s h. Avval kritik nuqtalarni topamiz: $y' = 1 - 2x$; $1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ — statsionar nuqta (maxsus nuqtalari yo‘q). Endi oraliqlar usuli yordamida $x_0 = \frac{1}{2}$ nuqtaning chap va o‘ng atroflarida y' hosilaning ishorasini aniqlaymiz (69- rasm):

$$y' > 0\left(-\infty < x < \frac{1}{2}\right),$$

$$y' < 0\left(\frac{1}{2} < x < +\infty\right).$$

69- rasm.

Demak, ekstremum topishning birinchi qoidasidagi 1) bandga ko‘ra $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}25$ son $y = 2 + x - x^2$ funksiyaning lokal maksimumi bo‘ladi: $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 2{,}25.$

2- misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (x < 1), \\ 2x - 2 & (1 \le x < 2), \\ 6 - 2x & (x \ge 2). \end{cases}$$

funksiyani ekstremumga tekshiring.

Y e c h i s h. Ravshanki,

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & (x < 1), \\ 2 & (1 < x < 2), \\ -2 & (x > 2). \end{cases}$$

bo'lib, $f'(1)$, $f'(2)$ hosilalar mavjud emas va $f'(0) = 0$. Demak, $x_0=0$ statsionar nuqta, $x_1=1$ va $x_2=2$ nuqtalar esa maxsus nuqtalar. Endi oraliqlar usuli yordamida topilgan kritik nuqtalarning chap va o'ng atroflarida $f'(x)$ hosilaning ishorasini aniqlaymiz (70- rasm):

70- rasm.

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & (x > 2), \\ > 0 & (1 < x < 2), \\ < 0 & (0 < x < 1), \\ > 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Shunday qilib, ekstremum topishning birinchi qoidasidagi 1) bandga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\max_{x \in U_\delta(0)} f(x) = f(0) = 1, \quad \min_{x \in U_\delta(1)} f(x) = f(1) = 0,$$

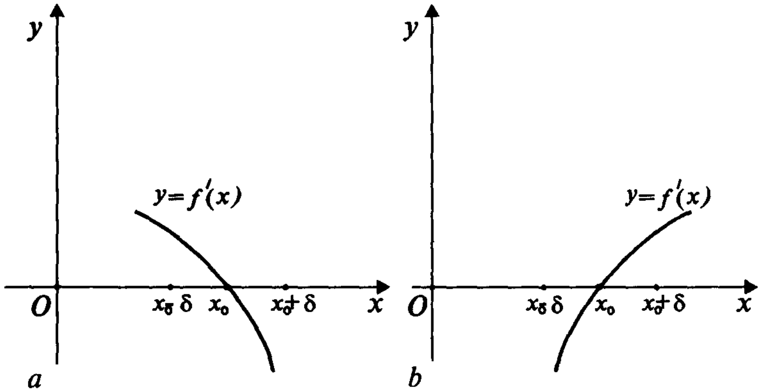
$$\max_{x \in U_\delta(2)} f(x) = f(2) = 2.$$

Ba'zi bir hollarda kritik nuqtalarning bir tomonli atroflarida hosila funksiyaning ishorasini tekshirish qiyin bo'lganligi sababli, ekstremum topishning yuqori tartibli hosilalarga asoslangan qoidalari ham ishlab chiqilgan. Biroq shuni aytish kerakki, bu qoidalarning «ishlash qobiliyati» birinchi qoidaga nisbatan «kuchsizroq» bo'lsa-da, ular amaliy jihatdan juda qulay.

Ikkinchi qoida. Agar $f(x)$ funksiya x_0 statsionar nuqtada ikki marta differensiallanuvchi, shu bilan birga $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda $f(x_0)$ son $f(x)$ funksiyaning lokal ekstremumi ($f''(x_0) < 0$ bo'lganda lokal maksimum; $f''(x_0) > 0$ bo'lganda lokal minimum) bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $f''(x_0) = 0$ va $f''(x_0) < 0$($f''(x_0) > 0$) bo'lsin. U holda funksiyaning nuqtada kamayishining (o'sishining) yetarlilik shartiga ko'ra $f'(x)$ hosila funksiya x_0 nuqtada kamayadi (o'sadi). Demak, $f'(x) = 0$ bo'lganligi sababli, shunday $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ atrof topiladiki, $\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ nuqtada $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) va $\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ nuqtada $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) bo'ladi (71- rasm).

Bu esa ekstremum topishning birinchi qoidasiga ko'ra $f(x_0)$ son $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimumi) bo'lishini bildiradi. Teorema isbot qilindi.



71- rasm.

3- misol. Ushbu $y = 2x^2 - x^4$ funksiya ikkinchi qoida yordamida ekstremumga tekshirilsin.

Y e c h i s h. Dastavval statsionar nuqtalarni topamiz:

$$y' = 4x - 4x^3 = 4x(1-x)(1+x); \ x_0 = -1, \ x_1 = 0, \ x_2 = 1.$$

Endi $y'' = 4 - 12x^2$ hosila funksiyaning topilgan statsionar nuqtalardagi ishoralarini aniqlaymiz:

$$y''(-1) = -8 < 0, \ y''(0) = 4 > 0, \ y''(1) = -8 < 0.$$

Demak, ekstremum topishning ikkinchi qoidasiga ko'ra

$$y_{\max} = y(-1) = y(1) = 1, \ y_{\min} = y(0) = 0.$$

Agar ikkinchi qoidada $f''(x_0) = 0$ bo'lib qolsa, bu holda (birinchi qoidaga murojaat qilishdan oldin) yuqori tartibli hosilalarga asoslangan quyidagi uchinchi qoidani qo'llash mumkin (albatta, uchinchi qoida o'z navbatida ikkinchi qoidaga nisbatan kuchsizroqdir).

Uchinchi qoida. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 statsionar nuqtaning biror $U_\delta(x_0)$ atrofida n marta ($n \geq 2$) differensiallanuvchi, shu bilan birga $f^{(n)}(x)$ hosila funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda, agar*

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \qquad (*)$$

bo'lsa, quyidagilar o'rinli bo'ladi:

1) *agar* $n = 2m$ *(m – natural son) bo'lsa, u holda* $f(x_0)$ *son* $f(x)$ *funksiyaning xos lokal ekstremumi* ($f^{(n)}(x_0) < 0$ *bo'lganda, lokal maksimum,* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *bo'lganda esa minimum) bo'ladi,*

2) *agar* $n = 2m + 1$ *(m — natural son) bo'lsa, u holda* $f(x_0)$ *son* $f(x)$ *funksiyaning lokal ekstremumi bo'lmaydi.*

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada Teylor teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, x_0 va $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtalar orasida shunday ξ nuqta topiladiki,

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

bo'ladi. Bu yerda $(*)$ shartni e'tiborga olsak,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli, nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya ishorasining turg'unligi haqidagi teoremaga asosan, $f^{(n)}(\xi)$ sonning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ sonning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Endi teoremaning 1) va 2) qismlarini alohida-alohida qaraymiz:

1) Aytaylik, $n = 2m$ (m — natural son) bo'lsin. Bu holda $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ nuqtada $(x-x_0)^n > 0$ bo'lgani uchun, $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$) bo'lganda (2) ifodadan $\forall x \in U_\delta(x_0)$ nuqtada $f(x) \leq f(x_0)$($f(x) \geq f(x_0)$) bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa ta'rifga ko'ra $f(x_0)$ son $f(x)$ funksiyaning xos lokal maksimumi (xos lokal minimumi) ekanini bildiradi.

2) Aytaylik, $n = 2m + 1$ (m — natural son) bo'lsin. Bu holda $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ nuqtada $(x-x_0)^n < 0$ va $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ nuqtada $(x-x_0)^n > 0$ bo'lgani uchun, $f^{(n)}(x_0) < 0$ ($f^{(n)}(x_0) > 0$) bo'lganda (2) ifodadan $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ uchun $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) va $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ uchun $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) bo'lishi, ya'ni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada kamayishi (o'sishi) kelib chiqadi. Bu esa $f(x_0)$ son $f(x)$ funksiyaning lokal ekstremumi bo'la olmasligini bildiradi.

Teorema to'la isbotlandi.

Shuni aytishimiz lozimki, ekstremumni topishning ikkinchi va uchinchi qoidalari (aslida ikkinchi qoida uchinchi qoidaning xususiy holi ($n = 2$) bo'lsa-da, uni biz amaliy qulaylik uchun alohida bayon qildik) x_0 kritik nuqta statsionar nuqta bo'lgandagina qo'llaniladi. Agarda x_0 kritik nuqta maxsus nuqta bo'lsa, yoinki x_0 nuqta statsionar nuqta bo'lib, funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini hisoblash qiyin bo'lgan hollarda albatta birinchi qoidadan foydalanish lozim.

12.2. Funksiyaning absolut ekstremumlari (eng katta va eng kichik qiymatlari)ni topish. Ma'lumki (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi), agar f funksiya biror $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada o'zining aniq yuqori va aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni kamida bitta shunday $\alpha \in [a, b]$ ($\beta \in [a, b]$) nuqta topiladiki,

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha) \quad \left(\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta)\right)$$

bo'ladi. Bu yerdagi $f(\alpha)$ va $f(\beta)$ sonlar mos ravishda f funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi *eng katta* va *eng kichik* qiymatlari yoki bitta nom bilan *absolut ekstremumlari* deyiladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha) \quad \left(\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta)\right)$$

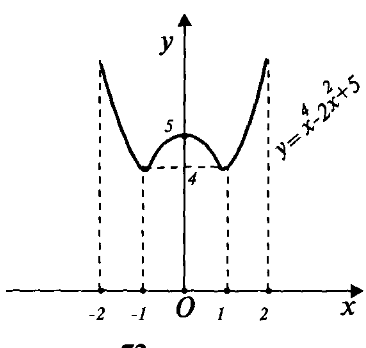
ko'rinishda yoziladi.

4- misol. Ushbu $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiya $[-2; 2]$ kesmada absolut ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Berilgan funksiyani $f(x) = 4 + (x^2 - 1)^2$ ko'rinishda ifodalab, birinchidan, uning $x_0 = 1$ va $x_1 = -1$ nuqtalarda eng kichik qiymatga erishishiga qanoat hosil qilamiz: $\min\limits_{[-2,2]} f(x) = f(-1) = f(1) = 4$; ikkinchidan, f funksiya juft funksiya bo'lib, $(0; 1)$ oraliqda kamayuvchi, $(1; +\infty)$ nurda esa o'suvchi (72- rasm) bo'lgani uchun

$$\max_{x\in[-2,2]} f(x) = f(-2) = f(2) = 13.$$

Funksiyaning absolut ekstremumlarini yuqorida keltirilgan misoldagi singari elementar usulda topish ko'pchilik hollarda mantiqiy mulohazalar bilan bog'liq bo'lgan



72- rasm.

qiyinchiliklarga olib keladi. Shuning uchun odatda hosila tushunchasiga asoslangan quyidagi sodda usuldan foydalaniladi:

1) f funksiyaning $[a,\ b]$ kesmada uzluksizligi tekshiriladi;

2) f funksiyaning $(a,\ b)$ oraliqdagi barcha kritik nuqtalari topiladi: $x = x_1,\ x_2,\ ...,\ x_s$;

3) $f(x_1),\ f(x_2),\ ...,\ f(x_s),\ f(a),\ f(b)$ qiymatlar hisoblanadi.

Bu sonlarning eng kattasi (eng kichigi) f funksiyaning $[a,\ b]$ kesmadagi eng katta (eng kichik) qiymati bo'ladi:

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\left(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_s), f(a), f(b)\right)$$

$$\left(\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\left(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_s), f(a), f(b)\right)\right).$$

Chunki, $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f funksiya o'zining shu kesmadagi eng katta (eng kichik) qiymatiga yo o'zining kritik nuqtasida yoki $[a,\ b]$ kesmaning chetki nuqtalarida erishadi.

Masalan, yuqorida qaralgan $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;\ 2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini kritik nuqtalar yordamida topaylik. Dastlab f funksiyaning $(-2;\ 2)$ oraliqdagi kritik nuqtalarini topamiz:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$; $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — statsionar nuqtalar (maxsus nuqtalar yo'q). Ravshanki,

$$f(-1) = f(1) = 4,\ f(0) = 5,\ f(-2) = f(2) = 13.$$

Demak,

$$\max_{x\in[-2,2]} f(x) = \max(4;5;13) = 13,\quad \min_{x\in[-2,2]} f(x) = \min(4;5;13) = 4$$

Yana bitta misol qaraylik:

5- misol. $y = \sin 2x - x$ funksiyaning $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Y e c h i s h.

$y' = 2\cos 2x - 1$; $\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{6}$ — s t a t s i o n a r nuqtalar (maxsus nuqtalar yo'q). Ravshanki,

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-3\sqrt{3}+\pi}{6},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6},\ y\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Demak, $\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = \frac{\pi}{2}$, $\min\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} y(x) = -\frac{\pi}{2}$.

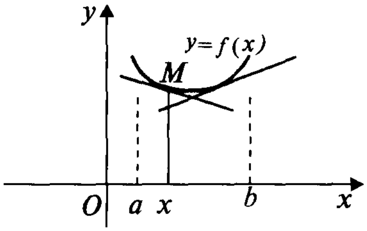
O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Ko'phad uchun Teylor formulasini keltirib chiqaring.
2. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi qanday bo'ladi? Keltirib chiqaring.
3. Teylor formulasidagi qoldiqning Shlemilx-Rosh, Lagranj, Koshi va Peano ko'rinishlari qanday bo'ladi?
4. Makloren formulasi deb nimaga aytiladi? Undagi qoldiq had qanday baholanadi?
5. e^x, sinx, cosx, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in R)$ funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoying va qoldiqlarini baholang.
6. Funksiyaning o'zgarmaslik sharti nima? Monotonlik shartlari-chi?
7. Funksiyaning nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lishinining zaruriy sharti nima?
8. Funksiyaning nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lishining birinchi, ikkinchi va uchinchi yetarli shartlarini ayting va ular asosida ekstremum topishning birinchi, ikkinchi va uchinchi qoidalarini shakllantiring.
9. Absolut ekstremumlar deb nimaga aytiladi? Ular qanday sxema asosida topiladi? Misollar keltiring.

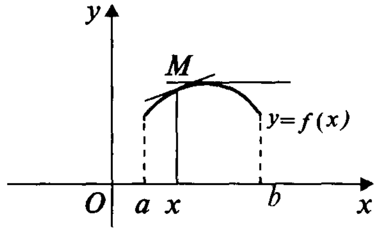
13- §. FUNKSIYA GRAFIGINING QAVARIQLIK YO'NALISHI VA EGILISH NUQTASI

Funksiya grafigini xarakterli nuqtalar bo'yicha yasashda va boshqa ayrim masalalarda (masalan, ba'zi bir tengsizliklarni isbot qilishda) funksiya grafigining qavariqligi yo'nalishini va egilish nuqtalarini topish muhim ahamiyatga ega. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda hosilaning geometrik ma'nosiga asosan $y=f(x)(a<x<b)$ egri chiziqqa $\forall M$ $(x; f(x))$ nuqtada urinma o'tkazish mumkin. $f'(x)(a<x<b)$ hosila chekli bo'lganligi sababli, bu urinmalarning hech biri ordinatalar o'qiga parallel bo'lmaydi.

1- ta'rif («urinma» tilida). Agar $y=f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $y=f(x)$ $(a<x<b)$ egri chiziq o'ziga $\forall M$ $(x; f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmadan pastda (yuqorida) yotmasa, bu holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a, b) oraliqda *qavariqligi bilan pastga (yuqoriga) yo'nalgan* deyiladi. Buni chizmada quyidagicha tasvirlash mumkin (73-, 74- rasm).



73- *rasm.*



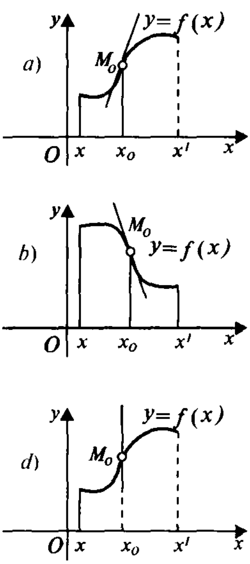
74- *rasm.*

Endi egilish nuqtasini ta'riflaymiz:

2- ta'rif. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan va x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsin. Agar o‘zgaruvchan x nuqta x_0 nuqtadan «o‘tayotgan»da $y=f(x)$ egri chiziq o‘zining qavariqlik yo‘nalishini o‘zgartirsa, bu holda $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqta $y=f(x)$ funksiya grafigining *egilish nuqtasi* deyiladi.

Ta'rifdan ko‘rinib turibdiki, $f'(x_0)$ hosila $-\infty$ yoki $+\infty$ bo‘lishi ham mumkin ekan (bu holda egri chiziqqa $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma ordinatalar o‘qiga parallel bo‘ladi). Egilish nuqtalarini chizmada 75- rasmdagidek tasvirlash mumkin.

Egri chiziq M_0 nuqta orqali urinmaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o‘tish jarayonida «egilganligi» (aniqrog‘i, qavariqlik yo‘nalishini o‘zgartirgani) uchun M_0 nuqta «egilish nuqtasi» deb yuritiladi.



75- *rasm.*

Endi funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishi va egilish nuqtalarini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Biz bu yerda oraliqda ikki marta differensiallanuvchi bo‘lgan funksiyalarni qaraymiz.

1- teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ oraliqda ikki marta differensiallanuvchi bo‘lib, $\forall x\in(a,\ b)$ nuqtada $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ bo‘lsa, u holda bu funksiyaning grafigi $(a,\ b)$ oraliqda qavariqligi bilan pastga (yuqoriga) yo‘nalgan bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ oraliqda ikki marta differensiallanuvchi va $x_0\in(a,\ b)$ ixtiyoriy tayin nuqta bo‘lsin. U holda, birinchidan, Teylor teoremasiga ko‘ra x_0 va $x\in(a,\ b)$ $(x\neq x_0)$ nuqtalar orasida yotuvchi shunday $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$ nuqta topiladiki, $\forall x \in (a, b)$ uchun

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \qquad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda Teylor formulasining qoldiq hadi Lagranj bo'yicha olingan. Ikkinchidan, $f'(x_0)$ chekli hosila mavjud bo'lgani uchun $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqtada, tenglamasi

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

bo'lgan urinmani o'tkazish mumkin.

Endi (1) va (2) tengliklarning chap tomonidan chap tomonini, o'ng tomonidan o'ng tomonini ayiramiz:

$$f(x) - Y = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0)(0 < \theta < 1).$$

Ko'rinib to'ribdiki, $f(x)$ — Y ayirmaning ishorasi $f''(\xi)$ sonning ishorasi bilan to'la aniqlanadi. Shart bo'yicha $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ bo'lgani sababli, $f''(\xi) > 0$ $(f''(\xi) < 0)$, ya'ni $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $f(x) \geq Y(x)$ $(f(x) \leq Y(x))$ tengsizlik bajariladi (bu yerda tenglik belgisi faqat $x = x_0$ nuqtada bajariladi). Bu esa, qavariqlik yo'nalishining «urinma» tilidagi ta'rifiga ko'ra, $y = f(x)$ funksiya grafigining (a, b) oraliqda qavariqligi bilan pastga (yuqoriga) yo'nalganini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega, shu bilan birga $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi qavariqligi bilan pastga (yuqoriga) yo'nalgan bo'ladi.*

Isboti. Aytaylik, $f''(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shu bilan birga $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ bo'lsin. U holda, nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiya ishorasining turg'unligi haqidagi teoremaga asosan, shunday $U(x_0)$ atrof topiladiki, $\forall x \in U(x_0)$ nuqtada $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ bo'ladi. Bu esa, yuqorida isbot qilingan 1- teoremaga ko'ra, $y = f(x)$ funksiya grafigining $U(x_0)$ atrofda qavariqligi bilan pastga (yuqoriga) yo'nalganligini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

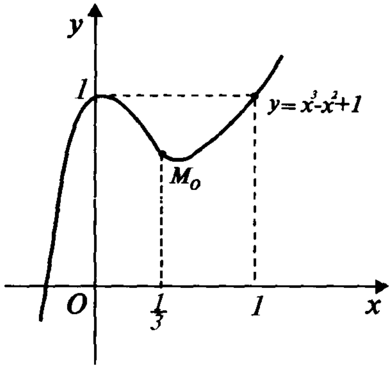
Shuni aytishimiz kerakki, 1- va 2- teoremalarning shartlari yetarli shartlar bo'lib, ular zaruriy shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^4$ funksiyaning grafigi $(-\infty;\ +\infty)$ cheksiz to'g'ri chiziqda qavariqligi bilan pastga yo'nalgan, lekin uning ikkinchi hosilasi $y''=12x^2$ ni ishorasi $x=0$ nuqtada musbat ham emas, manfiy ham emas.

1- misol. $y=x^3-x^2+1$ funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi va egilish nuqtalari topilsin hamda tarhiy (sxematik) chizmasi chizilsin.

Y e c h i s h. Berilgan funksiya son o'qining hamma joyida aniqlangan va unda istalgan marta differensiallanuvchidir. Ikkinchi hosilani topamiz:

$$y' = 3x^2-2x,\quad y'' = 6x-2=2(3x-1).$$

Ko'rinib turibdiki, $\forall x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ nuqtada $y''(x)<0$ va $\forall x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ nuqtada $y''(x)>0$. Demak, 1- teoremaga ko'ra $y=x^3-$ $-x^2+1$ funksiyaning grafigi $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ oraliqda qavariqligi bilan yuqoriga, $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ oraliqda esa qavariqligi bilan pastga yo'nalgan. O'zgaruvchan $M(x,\ f(x))$ nuqta $M_0\left(\frac{1}{3},\frac{25}{27}\right)$ nuqtadan «o'tayotgan»da $y=f(x)=x^3-x^2+1$ funksiyaning grafigi qavariqlik yo'nalishini o'zgartirgani sababli, 2- ta'rifga ko'ra M_0 nuqta shu funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (76- rasm).



76- rasm.

2- misol. $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ egri chiziqning $A(-1; 0)$, $B(1; 2)$ va $C(0; 1)$ nuqtalardagi qavariqlik yo‘nalishlari topilsin va tarhiy chizmasi chizilsin.

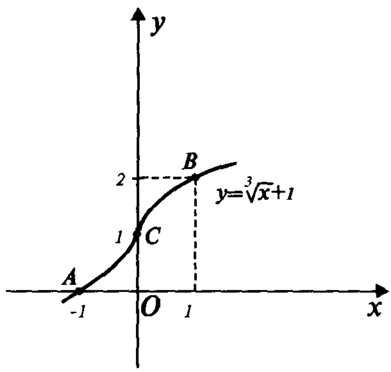
Y e c h i s h.

$$D(y) = (-\infty; +\infty) \quad y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

$$y''(-1) = \frac{2}{9}, \quad y''(+0) = \lim_{x \to +0} y''(x) = -\infty,$$

$$y''(-0) = \lim_{x \to -0} y''(x) = +\infty, \quad y''(1) = \frac{-2}{9}.$$

Demak, berilgan funksiyaning grafigi $A(-1; 0)$ nuqtada qavariqligi bilan pastga yo‘nalgan, $B(1; 2)$ nuqtada qavariqligi bilan yuqoriga yo‘nalgan; $C(0; 1)$ nuqta funksiya grafigining egilish



77- rasm.

nuqtasi bo‘ladi (77- rasm). Funksiya grafigiga $C(0; 1)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma ordinatalar o‘qidan iborat.

14- §. FUNKSIYA GRAFIGINING ASIMPTOTALARI. FUNKSIYANI TO‘LA TEKSHIRISH VA GRAFIGINI YASASH

14.1. Funksiya grafigining asimptotalari. Funksiya grafigini yasashda uning asimptotalari muhim ahamiyatga ega.

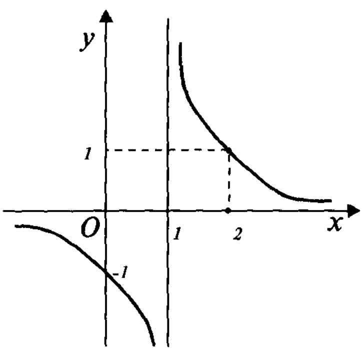
1- ta'rif. Agar $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ yoki $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ bir tomonli limitlarning kamida bittasi $+\infty$ yoki $-\infty$ bo‘lsa, bu holda

$x = a$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deyiladi. Masalan, $x = 1$ to‘g‘ri chiziq $y = \frac{1}{x-1}$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo‘ladi, chunki $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$ va $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$ (78- rasm). Ko‘rinib turibdiki, funksiya grafigining $x = a$ vertikal asimptotasi a nuqtaning chap yoki o‘ng atrofida $y = f(x)$ funksiya grafigini tarhiy (sxematik) tasvirlash imkonini berar ekan.

2- ta'rif. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x argumentning yetarli katta qiymatlarida, masalan, yetarli katta musbat qiymatlarida aniqlangan bo‘lsin. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $Y = kx + b$ chiziqli funksiya mavjud bo‘lsaki, $f(x)$ funksiya

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (1)$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0\right)$$



78- rasm.

ko‘rinishda tasvirlansa, bu holda $Y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining ($x \to +\infty$ da) *og‘ma asimptotasi* ($k = 0$ bo‘lganda *gorizontal asimptotasi*) deyiladi. Masalan, $Y = x$ to‘g‘ri chiziq $y = x + \frac{1}{x}$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi. Haqiqatan, bu hol uchun (1) ifodada $k = 1$, $b = 0$, $\alpha(x) = \frac{1}{x}$. Ravshanki,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

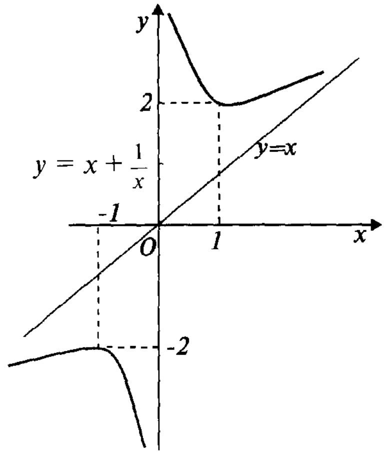
Agar bu yerda $x = 0$ to‘g‘ri chiziq (ya'ni ordinatalar o‘qi)ning $y = x + \frac{1}{x}$ uchun vertikal asimptota ekanini e'tiborga olsak, $y = x + \frac{1}{x}$ funksiyaning quyidagi tarhiy chizmasini hosil qilamiz (79- rasm).

Funksiya grafigining og‘ma asimptotalarini topish usuli quyidagi teoremaga asoslanadi:

T e o r e m a. *$y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\to+\infty$ da $Y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b \quad (2)$$

chekli limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.



79- rasm.

I s b o t i. 1) **Z a r u r l i g i .** Aytaylik, (1) ifoda o'rinli bo'lsin. U holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k+\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=k+0+0=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(kx+b+\alpha(x)-kx\right)=$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=b+0=b.$$

2) **Yetarliligi.** Aytaylik, (2) chekli limitlar mavjud bo'lsin. U holda (2) ifodalarning ikkinchisidan

$$f(x)-kx=b+\alpha(x)\quad \left(\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0\right)$$

yoki

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)\quad \left(\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0\right).$$

Bu esa ta'rifga ko'ra $Y=kx+b$ to'g'ri chiziqning $y=f(x)$ funksiya grafigi uchun $x\to+\infty$ da og'ma asimptota bo'lishini bildiradi.

Bu teorema $x\to-\infty$ da ham o'rinli bo'ladi.

1- misol. Ushbu

$$y=\frac{3x^2-x}{x-1}$$

funksiya grafigining asimptotalari topilsin.

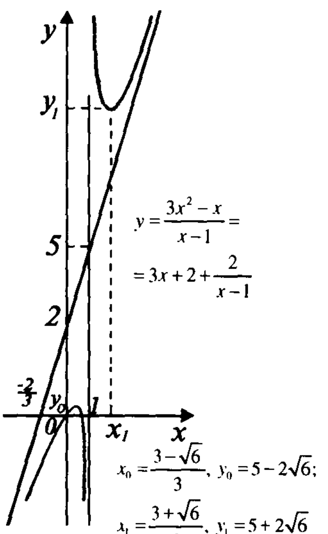
Yechish.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{3x^2-x}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{3x^2-x}{x-1}=+\infty.$$

bo'lgani sababli, ta'rifga ko'ra $x=1$ chiziq berilgan funksiyaning vertikal asimptotasi bo'ladi (boshqa vertikal asimptotasi yo'q);

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=3,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2-x}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}=2$$



80- rasm.

bo'lgani tufayli $Y=3x+2$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi (boshqa og'ma asimptota yo'q (80- rasm)).

14.2. Funksiyani to'la tekshirish va grafigini yasash. Buni quyidagi tartibda amalga oshirish maqsadga muvofiq:

1°. Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz.

2°. Funksiya grafigining Ox o'q bilan kesishish nuqtalarini va uning boshqa muhim xususiyatlari (masalan, juft-toqligi, davriyligi)ni aniqlaymiz.

3°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini va lokal ekstremumlarini topamiz.

4°. Funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishlarini aniqlaymiz va egilish nuqtalarini topamiz.

5°. Funksiya grafigining asimptotalarini topamiz.

6°. 1°—5° bandlarda topilgan ma'lumotlarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.

Funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasashga doir bitta misol qaraymiz.

2- misol. Ushbu $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ funksiyani to‘la tekshiring va grafigini yasang.

Y e c h i s h. **1°**. Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz: kasr-ratsional funksiya argumentning kasr maxrajini nulga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida aniqlangani uchun

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) = \boldsymbol{R} \backslash \{1\}.$$

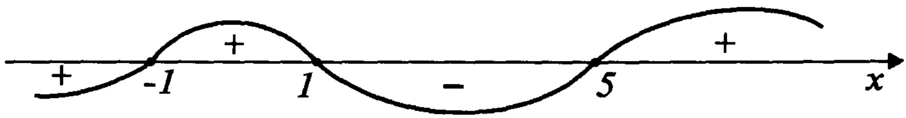
2°. Funksiya grafigining Ox o‘q bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = -1; y(-1) = 0.$$

3°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini va lokal ekstremumlarini topamiz:

$$y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$

hosila ishora o‘zgartirmaydigan oraliqlarni oraliqlar usuli yordamida aniqlaymiz (81- rasm):



81- rasm.

Demak, berilgan funksiya $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ va $(5; +\infty)$ oraliqlarda o‘sadi; $(1; 5)$ oraliqda esa kamayadi. $x = 5$ nuqtaning chap atrofida y' hosilaning ishorasi manfiy, o‘ng atrofida esa musbat bo‘lgani uchun

$$y_{\min} = y(5) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}.$$

4°. Funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishlarini aniqlaymiz va egilish nuqtalarini topamiz:

$$y''=(y')'=((x+1)^2(x-5)(x-1)^{-3})'=$$
$$=2(x+1)(x-5)(x-1)^{-3}+(x+1)^2((x-1)^{-3}-3(x-5)(x-1)^{-4})=$$
$$=(x+1)(x-1)^{-3}(3x-9-\frac{3(x^2-4x-5)}{x-1})=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

y'' funksiya ishora o'zgartirmaydigan oraliqlarni yana oraliqlar usuli yordamida aniqlaymiz (82- rasm):

82- rasm.

Demak, berilgan funksiyaning grafigi $(-\infty;-1)$ oraliqda qavariqligi bilan yuqoriga, $(-1;1)$ va $(1;+\infty)$ oraliqlarda esa qavariqligi bilan pastga yo'nalgan. Egri chiziq $A(-1;0)$ nuqtadan o'tayotganda qavariqlik yo'nalishini o'zgartirgani sababli, egilish nuqtasining ta'rifiga ko'ra, $A(-1;0)$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

5°. Funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty.$$

Demak, $x=1$ chiziq berilgan funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi. Endi og'ma asimptotalarni izlaymiz:

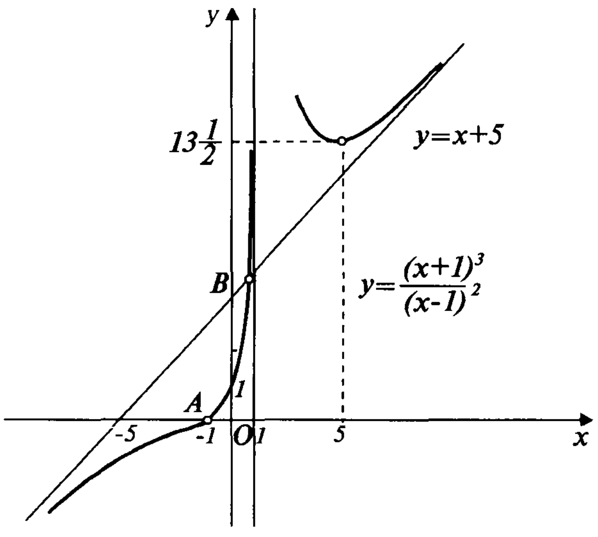
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=5.$$

Demak, $Y=x+5$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining bitta tarmog‘i bilan $B\left(\frac{1}{3};\ 5\frac{1}{3}\right)$ nuqtada kesishadi:

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=x+5\Leftrightarrow(x+1)^3=$$
$$=(x-1)^2(x+5)(x\neq1)\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=$$
$$=(x^2-2x+1)(x+5)(x\neq1)\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=$$
$$=x^3+5x^2-2x^2-10x+x+5)(x\neq1)\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3};\ Y(\tfrac{1}{3})=5\frac{1}{3}\ \ y\left(\frac{1}{3}\right)=5\frac{1}{3}.$$

6°. 1°—5° bandlarda topilgan ma'lumotlarga asosan funksiya grafigini yasaymiz (83- rasm):



83- rasm.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya grafigining egilish nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki marta differensiallanuvchi funksiya grafigining qavariqlik yo'nalishi qanday teoremalar asosida aniqlanadi? Bu teoremalarning shartlari yetarli shartlar bo'ladimi yoki zaruriy shartlarmi?
4. Funksiya grafigining egilish nuqtasi qanday topiladi?
5. Funksiya grafigining vertikal asimptotasi deb nimaga aytiladi?
6. Funksiya grafigining og'ma asimptotasi deb nimaga aytiladi? Bunday asimptota mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nima?
7. Funksiya grafigining gorizontal asimptotasi deb nimaga aytiladi?
8. Funksiyani to'la tekshirish va grafigini yasash sxemasi nimadan iborat? Misol keltiring.

III BOB
INTEGRAL HISOB

1- §. ANIQMAS INTEGRAL

1.1. Boshlang'ich funksiya. Biz shu vaqtga qadar matematik analizning differensial hisob bo'limini o'rgandik. Bu bo'limning asosiy masalasi berilgan funksiyaning hosilasini topishdan iborat edi. Fan va texnikada shunday masalalar uchraydiki, ularda hosilasiga ko'ra funksiyaning o'zini topish talab qilinadi. Masalan, harakatdagi moddiy nuqtaning berilgan $a=a(t)$ tezlanishiga ko'ra $v=v(t)$ tezligini topish; berilgan $v=v(t)$ tezligiga ko'ra uning bosib o'tgan $s=s(t)$ yo'lini hisoblash; bir jinsli bo'lmagan sterjenning $\rho=\rho(x)$ zichligiga ko'ra uning massasini aniqlash va shu kabi bir qator masalalar shular jumlasiga kiradi. Bunday masalalarni matematika nuqtai nazaridan quyidagi bitta umumiy masala shaklida ifodalash mumkin: *X to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan. $\forall x\in X$ nuqtada $F'(x)=f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan $F(x)$ funksiya topilsin.* Bu yerdagi $F(x)$ funksiyaga *$f(x)$ funksiyaning X* to'plamdagi *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi. Masalan, $X=(0;+\infty)$ ochiq yarim to'g'ri chiziqda aniqlangan $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyaning X ochiq yarim to'g'ri chiziqdagi *boshlangich funksiyasi* $F(x)=2\sqrt{x}$ bo'ladi, chunki $\forall x\in(0;+\infty)$ nuqtada

$$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x).$$

«Boshlang'ich funksiya» atamasi ruscha «pervoobraznaya funksiya» degan atamaning o'zbekchalashtirilgani bo'lib, u $f(x)$ funksiyaning $F(x)$ funksiyadan differensiallash orqali hosil bo'lishini bildiradi.

Tabiiy ravishda quyidagi savol tug'iladi: ***agar $f(x)$ funksiya X to'plamda $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, uning shu to'plamda $F(x)$ funksiyadan boshqa boshlang'ich funksiyalari bormi yoki yo'qmi?*** Bu savolga javob berishdan avval quyidagi teoremani isbot qilamiz.

Teorema. *Agar $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning biror X to'plamdagi ixtiyoriy ikkita boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $\forall x \in X$ qiymatda $G(x) = F(x) + C$ bo'ladi (C — ixtiyoriy o'zgarmas son), ya'ni ular X to'plamda bir-biridan o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi.*

Isboti. Aytaylik, $\forall x \in X$ nuqtada $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$ bo'lsin. $G(x) - F(x) = \Phi(x)$ deb belgilaymiz. $\Phi(x)$ funksiya, ikkita differensiallanuvchi funksiyaning ayirmasi sifatida X to'plamda differensiallanuvchi va shu bilan birga, teorema shartiga ko'ra $\forall x \in X$ nuqtada

$$\Phi'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Demak, funksiyaning o'zgarmaslik shartiga asosan $\forall x \in X$ nuqtada $\Phi(x) = C$ (C — ixtiyoriy o'zgarmas son) bo'ladi. Shunday qilib, $\forall x \in X$ uchun $G(x) - F(x) = C$ yoki $G(x) = F(x) + C$ bo'lar ekan.

Teorema isbot qilindi.

Yuqorida qo'yilgan savolga (isbot qilingan teoremadan kelib chiqadigan) quyidagi natija javob beradi:

Natija. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda bu funksiyaning X to'plamda boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'lib, ularning har biri $F(x) + C$ ko'rinishda bo'ladi (C — ixtiyoriy o'zgarmas son).

1.2. Aniqmas integral va uning asosiy xossalari.

1- ta'rif. Berilgan $f(x)$ funksiyaning biror X to'plamdagi barcha boshlang'ich funksiyalari to'plami shu funksiyaning X to'plamdagi *aniqmas integrali* deb ataladi va

$$\int f(x)dx$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi $\int$ belgi lotincha S harfining «buzib yozilgan» shakli bo'lib, unga *integral belgisi* deyiladi; $f(x)$ funksiya *integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ ifoda esa *integral ostidagi ifoda* deb aytiladi.

Agar $F(x)$ funksiya berilgan $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsa, u holda yuqoridagi natijaga binoan

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (1)$$

deb yozishimiz mumkin. Bu yerda C — ixtiyoriy o'zgarmas son.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning aniqmas integralini topish amali $f(x)$ funksiyani *integrallash* deyiladi. Funksiyani integrallash masalasi integral hisobning asosiy masalasi bo'lib, u differensial hisobning asosiy masalasiga teskari masaladir.

1- misol. Ushbu

$$\int x^2 dx$$

aniqmas integral topilsin.

Yechish. $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ nuqtada

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

bo'lgani sababli, (1) formulaga binoan

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Bu yerda va bundan keyin har doim, agar boshqa so'z aytilmagan bo'lsa, C ni ixtiyoriy o'zgarmas son deb tushunamiz.

Aniqmas integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1- xossa. Ushbu

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

tenglik o'rinli.

Isboti. (1) formulaga asosan

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx + 0 \cdot dx = f(x)dx.$$

2- xossa. Ushbu

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

tenglik o'rinli.

I s b o t i. $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ ekanini e'tiborga olib, (1) formulaga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

3- xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini aniqmas integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad (A = Const).$$

I s b o t i. Aytaylik, $A = \text{Const}$ bo‘lib, $\forall x \in X$ nuqtada $F'(x) = f(x)$ bo‘lsin:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{1}$$

Bu holda, ravshanki, $\forall x \in X$ nuqtada $(AF(x))' = =(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, ya'ni

$$\int Af(x)dx = AF(x) + C_1. \tag{2}$$

Bu yerda C_1 — ixtiyoriy o‘zgarmas son. Endi (1) tenglikning har ikkala tomonini A songa ko‘paytiramiz:

$$A\int f(x)dx = AF(x) + A \cdot C.$$

Bundan

$$AF(x) = A\int f(x)dx - A \cdot C. \tag{3}$$

(3) ni (2) ga qo‘ysak,

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C_1 - A \cdot C$$

bo‘ladi. Bu esa o‘zgarmas $C_1 - AC$ qo‘shiluvchigacha aniqlikda

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

tenglikning to‘g‘riligini bildiradi.

4- xossa. O‘zgarmas qo‘shiluvchigacha aniqlikda

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

formulalar o‘rinli.

I s b o t i. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar biror X oraliqda aniqlangan bo‘lib, $\forall x \in X$ nuqtada $F'(x) = f(x)$ va $\Phi'(x) = g(x)$ tengliklar o‘rinli bo‘lsin. U holda, ma'lumki

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = \Phi(x) + C_2. \tag{4}$$

Ikkinchi tomondan, $\forall x \in X$ nuqtada

$$(F(x) \pm \Phi(x))' = F'(x) \pm \Phi'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Bu esa

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm \Phi(x) + C_3 \tag{5}$$

ekanini bildiradi. Bu yerda C_1, C_2, C_3 — ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. (4) formulalardan

$$F(x) = \int f(x)dx - C_1, \qquad \Phi(x) = \int g(x)dx - C_2. \tag{6}$$

(6) ifodalarni (5) formulaga qo‘ysak,

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C_3 - C_1 \mp C_2$$

bo‘ladi. Bu esa o‘zgarmas $C_3 - C_1 \pm C_2$ qo‘shiluvchigacha aniqlikda

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini bildiradi.

1.3. Asosiy aniqmas integrallar jadvali. Endi amaliy qulaylik maqsadida, hosilalar jadvalidan foydalanib, **asosiy aniqmas integrallar jadvali**ni yozamiz:

1) $\int 0 \cdot dx = C;$

2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi, n \in \boldsymbol{Z});$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \boldsymbol{Z}\right);$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C & (-1 < x < 1), \\ -\arccos x + C & (-1 < x < 1); \end{cases}$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C, \\ -\operatorname{arc\,ctg} x + C; \end{cases}$

11) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C;$

12) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$

13) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C (x \neq 0).$

1)–14) formulalarning isboti bevosita aniqmas integralning ta'rifidan va hosilalar jadvalidan kelib chiqadi. Misol sifatida ularning bittasini, masalan,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

formulani isbot qilaylik. Aytaylik, $x > 0$ bo‘lsin. U holda, $\forall x \in (0; +\infty)$ nuqtada $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ bo‘lgani uchun

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

bo‘ladi. Endi aytaylik, $x < 0$ bo‘lsin. Bu holda ham, ravshanki, $\forall x \in (-\infty; 0)$ nuqtada

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

tenglik o‘rinli. Demak, $(-\infty; 0)$ oraliqda

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

2- §. INTEGRALLASHNING ASOSIY METODLARI

Aniqmas integrallarni hisoblashning ikkita asosiy metodi mavjud bo‘lib, ularning biriga *bo‘laklab integrallash metodi,* ikkinchisiga esa *o‘zgaruvchini almashtirish metodi* deyiladi.

2.1. Bo‘laklab integrallash metodi. Bu metod quyidagi teoremaga asoslanadi:

1- teorema. *Agar* $u = u(x)$ *va* $v = v(x)$ *funksiyalar biror* X *to‘plamda differensiallanuvchi bo‘lib,* $u'(x)v(x)$ *funksiyaning shu to‘plamda boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lsa, u holda* X *to‘plamda* $u(x)v'(x)$ *funksiyaning ham boshlang‘ich funksiyasi mavjud, shu bilan birga*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \qquad (*)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar X to‘plamda differensiallanuvchi bo‘lgani uchun ularning $u(x)v(x)$ ko‘paytmasi ham shu to‘plamda differensiallanuvchi, shu bilan birga

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

formula o‘rinli bo‘lishi ma'lum. Bu yerdan

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Demak, aniqmas integralning 4- xossasiga ko‘ra

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx$$

bo‘ladi. Bu yerda

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int d(u(x)v(x)) = u(x)v(x) + C$$

ekanligini, hamda shartga ko‘ra $\int v(x)u'(x)dx$ aniqmas integralning mavjudligini e'tiborga olsak,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

bo‘ladi. Bundan tenglikning chap tomonidagi aniqmas integralning mavjudligi ham kelib chiqadi. Teorema isbot qilindi.

Endi $u(x) = u$, $v(x) = v$, $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$ ekanini e'tiborga olib, (*) formulani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

Bu formula aniqmas integralda *bo‘laklab integrallash formulasi* deb ataladi va amaliyotda keng qo‘llaniladi.

1- misol. Ushbu

$$\int x \ln x \, dx$$

aniqmas integral topilsin.

Yechish. Aniqmas integral belgisi ostidagi ifodada $u = \ln x$, $dv = xdx$ deb olamiz. Bu yerdan

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Demak, bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Eslatma. Shuni aytish lozimki, bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llashda integral belgisi ostidagi ifodaning qaysi birini u, qaysi birini dv deb belgilash juda muhim ahamiyatga ega. Bunda har doim quyidagi qoidaga amal qilish lozim: integral ostidagi ifodada shunday ko‘paytuvchi funksiyani $u = u(x)$ deb olish kerakki,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

formuladagi $\int vdu$ integralni hisoblash $\int udv$ integralni hisoblashga nisbatan oson bo‘lsin. Masalan, yuqorida qaralgan $\int x \ln x \, dx$

integral ostidagi $x\ln x dx$ ifodada $u = x$ deb olsak, $du = dx$, $v = \int \ln x dx$ bo‘lib, v ni topish uchun bo‘laklab integrallash metodini qo‘llash zarur bo‘ladi, ikkinchidan, $\int x\ln x dx$ integralga nisbatan hisoblanishi qiyin bo‘lgan $\int x^2 \ln x dx$ integral hosil bo‘ladi. Shuning uchun yuqorida $u = \ln x$ deb olgan edik.

2- misol. Ushbu

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx$$

(a, b — o‘zgarmas sonlar) integral hisoblansin.

Y e c h i s h. Integral ostidagi ifodada $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\, dx$ deymiz. U holda $du = ae^{ax}dx$, $v = -\frac{1}{b}\cos bx$ bo‘ladi. Demak, bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Oxirgi integralda yana $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ deb olamiz. Bu yerdan $du = ae^{ax}dx$, $v = -\frac{1}{b}\sin bx$. U holda

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx\right\} =$$

$$= \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Biz bo‘laklab integrallash metodini ikki marta qo‘llab, yana berilgan integralni hisoblash masalasiga qaytdik (bunday misollar amalda juda ko‘plab uchraydi). Xuddi ana shu yerda integrallash jarayonini to‘xtatib, berilgan integral ishtirok qilayotgan hadni tenglikning chap tomoniga o‘tkazamiz:

$$\frac{b^2+a^2}{b^2}\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{b^2}.$$

Bundan

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

3- misol. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n} \quad (n \text{ — natural son})$$

integralni hisoblash uchun rekurrent formula keltirib chiqarilsin.

Y e c h i s h. Berilgan integralni

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

deb belgilaymiz. Aytaylik, $n = 1$ bo'lsin. U holda

$$J_1 = \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Faraz qilaylik, $n \geq 2$ bo'lsin. Bu holda

$$J_{n-1} = \int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}$$

integralni bo'laklab integrallaymiz: $u = (a^2 + x^2)^{1-n}$ va $d\upsilon = dx$ desak,

$$du = -\frac{2(n-1)x dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}, \quad \upsilon = x.$$

Demak, bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra

$$J_{n-1} = \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2 dx}{\left(a^2+x^2\right)^n} =$$

$$= \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{\left(a^2+x^2\right)-a^2}{\left(a^2+x^2\right)^n} dx =$$

$$= \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + 2(n-1)J_{n-1} - 2(n-1)a^2 J_n.$$

Bu yerdan

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} J_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

2.2. O'zgaruvchini almashtirish metodi. Bu metod quyidagi teoremaga asoslanadi.

2- teorema. *Agar* $\forall t \in T$ *nuqtada* $F'(t) = f(t)$ bo'lib, $t = g(x)$ *funksiya biror* X *oraliqda aniqlangan, differensiallanuvchi va* $\{t: t = g(x);\ x \in X\} \subset T$ *bo'lsa, u holda* $F(g(x))$ *funksiya* X *oraliqda* $f(g(x))g'(x)$ *funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi va shu bilan birga*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula aniqmas integralda *o'zgaruvchini almashtirish formulasi* deb ataladi.

Isboti. Aytaylik, $\forall t \in T$ nuqtada $F'(t) = f(t)$ bo'lsin. U holda murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan, $\forall x \in X$ nuqtada

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

bo'ladi. Bu esa $F(g(x))$ funksiyaning X to'plamda $f(g(x))g'(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishini bildiradi. Demak, aniqmas integralning ta'rifiga ko'ra

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Bu teoremada $g(x) = t$, $g'(x)dx = dt$, $F'(t) = f(t)$ ekanini e'tiborga olib,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

deyish mumkin. Amaliyotda o'zgaruvchini almashtirish formulasi xuddi ana shu ko'rinishda qo'llaniladi.

4- misol. Ushbu

$$\int (10x+3)^{1000}dx$$

aniqmas integral topilsin.

Y e c h i s h. x o'zgaruvchini $10x+3=t$ ko'rinishda almashtiramiz. Bu yerdan $dx=\frac{1}{10}dt$. Demak,

$$\int(10x+3)^{1000}dx=\int t^{1000}\frac{1}{10}dt=\frac{1}{10}\int t^{1000}dt=$$
$$=\frac{1}{10}\frac{t^{1001}}{1001}+C=\frac{1}{10010}(10x+3)^{1001}+C.$$

5- misol. Ushbu

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

aniqmas integral topilsin.

Y e c h i s h . $\sqrt{x}=t$ deylik. U holda $dx=2tdt$. Demak,

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$$
$$=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t}\right)=2t-2\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C.$$

2.3. Elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan ba'zi bir aniqmas integrallar. Ma'lumki, har qanday elementar funksiyaning hosila funksiyasi yana elementar funksiya bo'lar edi. Lekin elementar funksiyaning aniqmas integrali har doim ham elementar funksiya bo'lavermaydi. Masalan, *Puasson integrali* (yoki *xatolar integrali*) deb ataladigan

$$\int e^{-x^2}dx$$

integral, *Frenel integrallari* deb ataladigan va fizikaning optika bo'limida keng qo'llaniladigan

$$\int \sin x^2dx, \quad \int \cos x^2dx$$

integrallar, *integral logarifm* deb ataladigan

$$\int \frac{dx}{\ln x} \quad (0 < x \neq 1)$$

integral hamda mos ravishda *integral sinus, integral kosinus* deb ataladigan

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx$$

integrallar elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydigan aniqmas integrallardir.

Bu yerda keltirilgan aniqmas integrallar nafaqat real holda mavjud bo'libgina qolmasdan, ular fizika va matematikaning turli masalalarini yechishda muhim o'rin tutadilar. Shu sababli, bu noelementar funksiyalar, elementar funksiyalar qay darajada o'rganilgan bo'lsa, shu darajada o'rganilgan. Ular uchun jadvallar tuzilgan va grafiklar chizilgan. Bu ma'lumotlarni zarur hollarda maxsus adabiyotlardan topish mumkin.

Biz endi ratsional funksiyalarni integrallash masalasini qaraymiz. Bu masalani yechish uchun avvalo biz kompleks sonlar, algebraik ko'phadlar va ratsional kasrlar (kasr-ratsional funksiyalar) haqida zaruriy ma'lumotlarga ega bo'lishimiz kerak. Biz bu ma'lumotlarni kelgusi ikkita paragrafda bayon qilamiz.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
2. Funksiyaning biror to'plamdagi (sohadagi) aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning qanday hossalariga uning asosiy hossalari deb aytiladi?
4. Asosiy aniqmas integrallar jadvalini yozing
5. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish metodi qanday teoremaga asoslanadi? Teoremani isbotlang.
6. $J_n = \int (a^2+x^2)^{-n}\, dx$ integralni hisoblash uchun rekurrent formula keltirib chiqaring.
7. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash metodi qanday teoremaga asoslanadi? Teoremani isbotlang.
8. Aniqmas integrali elementar funksiya bo'lmagan funksiyalar bormi? Bor bo'lsa, misollar keltiring.

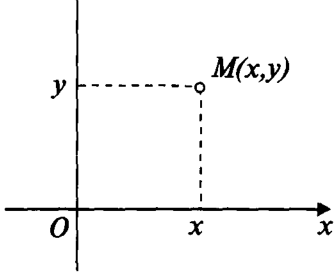
3- §. KOMPLEKS SONLAR

3.1. Kompleks sonning ta'rifi. $z = x + iy$ $(i^2 = -1)$ *ko'rinishdagi ifoda kompleks son deb ataladi.* Bu yerdagi x va y lar haqiqiy sonlar bo'lib, ular mos ravishda z kompleks sonning *haqiqiy va mavhum qismlari* deyiladi; i simvol *mavhum birlik* deb ataladi.

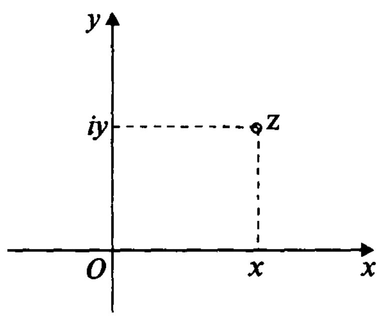
Haqiqiy va mavhum qismlari nulga teng bo'lgan kompleks son *nul kompleks son* deyiladi va odatdagi 0 bilan belgilanadi. z kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda Rez va Imz simvollar bilan belgilanadi: $x = Rez$, $y = Imz$. Bu yerdagi Re va Im belgilar mos ravishda «Reel — haqiqiy» va «Imaginaire — mavhum» degan fransuzcha so'zlarning birinchi ikkita harfidan tashkil topgan.

3.2. Kompleks sonning geometrik tasviri. Kompleks sonning ta'rifidan ko'rinib turibdiki, har bir $z = x + iy$ kompleks songa haqiqiy sonlarning bitta tartiblangan (ya'ni qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi ekani ko'rsatilgan) $(x; y)$ jufti va, aksincha, haqiqiy sonlarning har bir tartiblangan $(x; y)$ juftiga bitta $z = x + iy$ kompleks son mos keladi. Shu sababli, agar tekislikda to'g'ri burchakli xOy dekart koordinatalari tizimini (sistemasini) o'rnatsak, tekislikdagi har bir $M(x; y)$ nuqtaga bitta $z = x + iy$ kompleks son va aksincha, har bir $z = x + iy$ kompleks songa bitta $M(x; y)$ nuqta mos keladi (84- rasm).

Bunda M nuqtaga mos kelgan $z = x + iy$ kompleks songa $M(x; y)$ nuqtaning *affiksi*, $x0y$ tekislikka esa *kompleks tekislik* deyiladi. Odatda affiksi $z = x + iy$ bo'lgan $M(x; y)$ nuqta z harf bilan, kompleks tekislik esa (z) bilan belgilanadi (85- rasm). Bu yerdagi Ox o'qqa *haqiqiy o'q*, Oy o'qqa esa *mavhum o'q* deb aytiladi. Affiks so'zi «biror narsaga biriktirilgan» degan ma'noni anglatuvchi lotincha affixus so'zidan olingan.

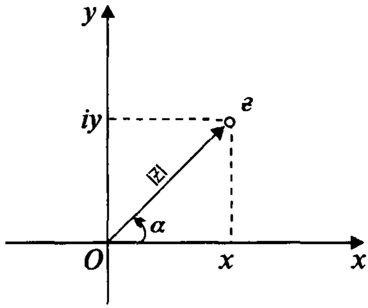


84- rasm.



85- rasm.

3.3. Kompleks sonning moduli va argumenti. Tekislikdagi har bir M nuqta to‘g‘ri burchakli xOy dekart koordinatalari tizimida (sistemasida) o‘zining $\overline{OM}$ radius-vektori bilan bir qiymatli aniqlanganligi sababli, geometrik nuqtai nazardan, har bir $z = x + iy$ kompleks sonni koordinatalari x va y bo‘lgan radius-vektor deb tavsiflash mumkin (86-rasm). z radius-vektorning uzunligiga $z = x + iy$ *kompleks sonning moduli* deb aytiladi va $|z|$ simvol bilan belgilanadi. 86- rasmdan ko‘rinib turibdiki (Pifagor teoremasiga asosan), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ bo‘ladi. Demak, kompleks sonning moduli manfiymas haqiqiy son bo‘lar ekan. Ravshanki, faqatgina 0 kompleks sonning moduli nulga teng.



86- rasm.

Endi kompleks sonning argumentini ta'riflaymiz: z radius-vektorning Ox o‘q musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan φ burchagi $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ *kompleks sonning argumenti* deyiladi va $Arg\ z$ simvol bilan belgilanadi: $\varphi = Arg\ z$. Ko‘rinib turibdiki, $z(z \neq 0)$ kompleks sonning argumenti, bir-biridan 2π songa karrali bo‘lgan qo‘shiluvchiga farq qiluvchi cheksiz ko‘p qiymatlarga ega. Uning $-\pi < \alpha \leq \pi$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi α qiymati $\arg z$ $(z \neq 0)$ simvol bilan belgilanadi va y z $(z \neq 0)$ kompleks son bilan bir qiymatli aniqlanadi (86- rasm):

$$\alpha = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & (x > 0), \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \operatorname{sign} y & (x < 0), \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} y & (x = 0). \end{cases}$$

Bu yerda

$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} 1 \ (y > 0), \\ 0 \ (y = 0), \\ -1 (y < 0). \end{cases}$$

Shunday qilib,

$$Arg\ z = \arg z + 2n\pi \quad (n \in Z,\ z \neq 0).$$

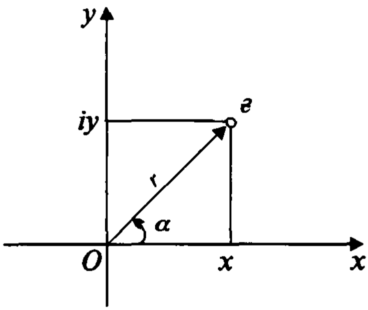
$z = 0$ – argumenti aniqlanmagan yagona kompleks son.

3.4. Kompleks sonning shakllari. Amalda kompleks sonning turli ko'rinishlaridan foydalaniladi. $z = x + iy$ *kompleks sonning algebraik shakli* deyiladi.

Aytaylik, $|z| = r$ va $\arg z = \alpha$ bo'lsin (87- rasm). U holda $x = r\cos\alpha$ va $y = r\sin\alpha$ bo'lgani uchun $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ bo'ladi. Kompleks sonning $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ko'rinishi *kompleks sonning trigonometrik shakli* deb ataladi.

Ushbu

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$



87- rasm.

formula *Eyler formulasi* deb ataladi (L. Eyler (1707–1783) — shveytsariyalik buyuk matematik; Peterburg Fanlar akademiyasining a'zosi; hayotining asosiy qismini Rossiyada o'tkazgan). Kompleks sonning trigonometrik shaklidan, Eyler formulasiga binoan, $z = re^{i\alpha}$ ifodani hosil qilamiz. Bu ifoda *kompleks sonning ko'rsatkichli shakli* deyiladi.

3.5. Kompleks sonlar ustida amallar. Endi kompleks sonlar ustida bajariladigan arifmetik va algebraik amallar bilan tanishamiz. Dastavval, kompleks sonlarning tengligi tushunchasini aniqlaymiz. Haqiqiy qismi haqiqiy qismiga, mavhum *qismi mavhum qismiga teng bo'lgan ikkita* z_1 va z_2 kompleks son *o'zaro teng kompleks sonlar* deyiladi va $z_1 = z_2$ ko'rinishda yoziladi.

Qo'shish va ayirish. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ *kompleks sonning yig'indisi* deb,

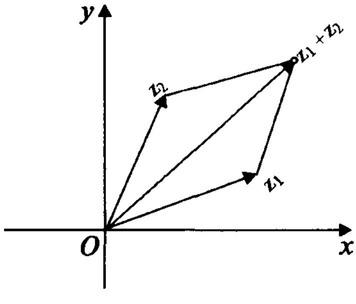
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1}$$

kompleks songa aytiladi. Berilgan kompleks sonlarga ko'ra ularning yig'indisini topish amali *kompleks sonlarni qo'shish* deb ataladi.

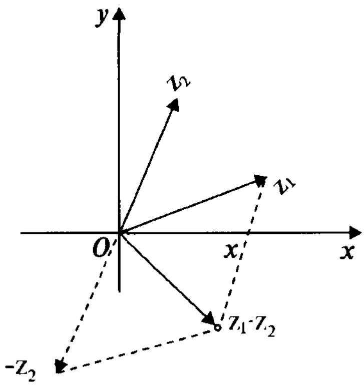
Ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. $z_2 + z = z_1$ shartni qanoatlantiradigan z kompleks songa z_1 va z_2 kompleks sonlarning *ayirmasi* deyiladi va $z = z_1 - z_2$ ko'rinishda yoziladi. Agar $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ desak, $z_2 + z = (x_2 + x) + i(y_2 + y) = x_1 + iy_1$ yoki kompleks sonlar tengligining ta'rifiga ko'ra $x_2 + x = x_1$, $y_2 + y = y_1$ yoki $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Ayirmani topish amali *ayirish* deb ataladi. Geometrik nuqtai nazardan, (1) formula $z_1 = \{x_1;\ y_1\}$ va $z_2 = \{x_2;\ y_2\}$ radius-vektorlarning yig'indisini bildiradi (88- rasm); $z_1 - z_2$ ayirma esa $z_1 - z_2 = \{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$ vektorni bildiradi (89- rasm).



88- rasm.



89- rasm.

Shunday qilib, kompleks sonlarni qo'shish va ayirish amallari xuddi tekislikdagi vektorlarni qo'shish va ayirish singari aniqlanar ekan.

Ko'paytirish. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonning *ko'paytmasi* deb,

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (2)$$

kompleks songa aytiladi. Ko'paytmani topish amali *ko'paytirish* deyiladi.

Endi $z_1 z_2$ ko'paytmaning trigonometrik shaklini topamiz. Aytaylik, $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ bo'lsin. U holda (2) formulaga asosan,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) +$$

$$+ i(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2)] = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

bo'ladi. Shunday qilib,

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg z_1 + Arg z_2 \tag{3}$$

bo'lar ekan. Oxirgi tenglik to'plamlarning tengligi ma'nosida tushuniladi. (3) formulalar yordamida $z^n (z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ marta}})$ darajaning moduli va argumenti uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$|z^n| = |z|^n, \qquad Arg(z^n) = n\, Arg z.$$

Xususan, $|z| = 1$, ya'ni $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ bo'lsa,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \tag{4}$$

bo'ladi. Bu formulaga *Muavr formulasi* deyiladi (A. de Muavr (1667–1754) – ingliz matematigi (millati fransuz)).

Bo'lish. z_1 kompleks sonni z_2 ($z_2 \neq 0$) kompleks songa bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi: $z_2 z = z_1$ shartni qanoatlantiradigan z kompleks songa z_1 kompleks sonning z_2 kompleks songa *bo'linmasi* deyiladi va $z = \frac{z_1}{z_2}$ ko'rinishda yoziladi.

Demak, $|z_1| = |z_2|\,|z|$ va $Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + Arg z$ bo'lgani sababli,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg z_1 - Arg z_2 \tag{5}$$

bo'ladi.

Eslatma. Kompleks sonlar to'plamida kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallari haqiqiy sonlar to'plamida kiritilgan xuddi shu nomdagi amallar bo'ysingan barcha qonunlarga bo'ysinadi. Buni alohida sanab o'tirmaymiz.

Kompleks sondan ildiz chiqarish. $w^n = z$ tenglikni qanoatlantiradigan w son z *kompleks sonning n-darajali ildizi* deb ataladi va $w = \sqrt[n]{z}$ ko'rinishda yoziladi. Agar

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

desak, $w^n = z$ dan

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan $\rho^n = r$, $\rho = \sqrt[n]{r}$; $\psi = \frac{\alpha + 2m\pi}{n}$ $(m \in \boldsymbol{Z})$ tengliklar hosil bo'ladi. Bu yerda $\rho \geq 0$ bo'lgani sababli, $\rho = \sqrt[n]{r}$ ildiz arifmetik ildizdir.

Shunday qilib,

$$w_m = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} =$$

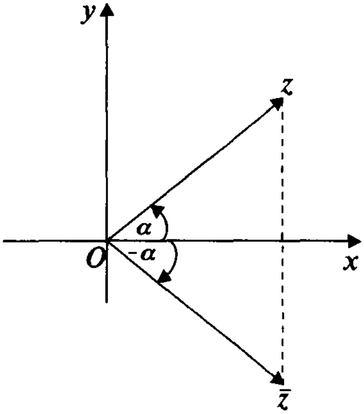
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2m\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2m\pi}{n}\right) \quad (m \in \boldsymbol{Z}).$$

$z \neq 0$ bo'lganda $\sqrt[n]{z}$ ildiz aniq n ta har xil w_0, w_1, ..., w_{n-1} qiymatlarga ega ekanligini ko'rsatish mumkin:

$$\begin{aligned} w_m &= \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2m\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2m\pi}{n}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{6}$$

(6) formulaga *kompleks sondan ildiz chiqarish formulasi* deb aytiladi. Geometrik nuqtai nazardan, w_0, w_1, ..., w_{n-1} kompleks sonlar radiusi $\rho = \sqrt[n]{r}$ bo'lgan, markazi koordinatalar boshida joylashgan doiraga ichki chizilgan muntazam n- burchakning uchlarida joylashgan bo'ladi.

3.6. Qo'shma kompleks sonlar va ularning asosiy xossalari. $x - iy$ kompleks son $z = x + iy$ kompleks songa *qo'shma bo'lgan kompleks son* deb ataladi va $\bar{z}$ bilan belgilanadi: $\bar{z} = x - iy$. $\bar{z}$ kompleks songa qo'shma bo'lgan kompleks son $\bar{\bar{z}}$ bilan belgilanadi. Ravshanki, $\bar{\bar{z}} = z$.



90- rasm.

Geometrik nuqtai nazardan, $\bar{z}$ kompleks son Ox o‘qqa nisbatan z vektorga simmetrik bo‘lgan vektor orqali tasvirlanadi (90- rasm).

Qo‘shma kompleks sonlar quyidagi asosiy xossalarga ega:

1- xossa.

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

I s b o t i. 90- rasmdan ko‘rinib turibdiki, z va $\bar{z}$ vektorlarning uzunliklari bir-biriga teng: $|\bar{z}| = |z|$. Yana 90- rasmdan ayonki, z va $\bar{z}$ vektorlar Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan mos ravishda α va $-\alpha$ burchak tashkil etadi: $\arg \bar{z} = -\arg z$.

2- xossa. $z\bar{z} = |z|^2$.

I s b o t i.

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) =$$
$$= (x^2 + y^2) + i \cdot 0 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

3- xossa. $\bar{\bar{z}} = z$.

I s b o t i. $\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

4- xossa. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

I s b o t i. Aytaylik, $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ bo‘lsin. U holda

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) =$$
$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Bu xossaning isbotini geometrik jihatdan 91- rasm ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

5- xossa. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

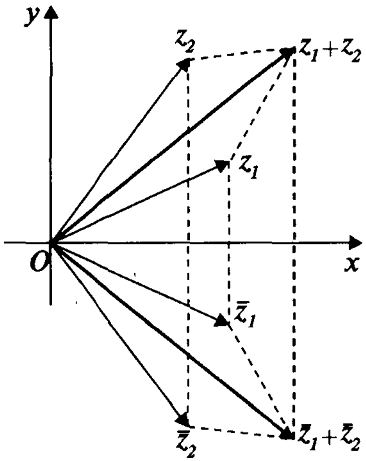
I s b o t i. 1- xossaga asosan $|\overline{z_1 z_2}| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = |\bar{z}_1||\bar{z}_2| = \quad = |\bar{z}_1 \bar{z}_2|$;

$$Arg\,\overline{z_1 z_2} = -Arg z_1 z_2 =$$
$$= -(Arg z_1 + Arg z_2) =$$
$$= -Arg z_1 - Arg z_2 =$$
$$= Arg\,\overline{z_1} + Arg\,\overline{z_2} = Arg\,(\bar{z}_1 \bar{z}_2).$$

Demak, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

6- xossa. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (z_2 \neq 0).$

Isboti. 1- xossaga asosan



91- rasm.

$$\left|\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|\bar{z}_1|}{|\bar{z}_2|} = \left|\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right|;$$

$$Arg\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -Arg\frac{z_1}{z_2} = -(Arg z_1 - Arg z_2) =$$

$$= -Arg z_1 - (-Arg z_2) = Arg\,\overline{z_1} - Arg\,\overline{z_2} = Arg\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Demak, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad (z_2 \neq 0).$

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks soning geometrik tasviri, tekislikdagi nuqtaning affiksi deb nimaga aytiladi?
3. Kompleks sonning moduli va argumenti tushunchalarini ta'riflang.
4. Kompleks sonning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli shakllarini bilasizmi? Misollar keltiring.
5. Kompleks sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari qanday aniqlanadi? Ayirish va bo'lish amallari-chi?
6. Qanday kompleks sonlar o'zaro teng kompleks sonlar deb ataladi?
7. Qanday kompleks son nul kompleks son deyiladi?
8. Qanday kompleks sonlar o'zaro qo'shma kompleks sonlar deb ataladi?
9. Kompleks sonlarni bir-biridan katta yoki kichik deb aytish mumkin-mi?
10. Kompleks sondan ildiz chiqarish formulasini keltirib chiqaring. Misollar keltiring.
11. Qo'shma kompleks sonlarning asosiy xossalarini isbotlang.

4- §. TO'G'RI RATSIONAL KASRNI ELEMENTAR KASRLAR YIG'INDISIGA YOYISH

4.1. Algebraik ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish. Ushbu

$$P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$$

ko'rinishdagi ifoda n- *darajali algebraik ko'phad* deyiladi. Bu yerda $z = x + iy$ — kompleks o'zgaruvchi; $c_0 \neq 0$, c_1, $c_2, \ldots, c_n$ lar o'zgarmas kompleks sonlar bo'lib, ular *ko'phadning koeffitsiyentlari* (c_0 — *bosh hadning koeffitsiyenti*) deb ataladi.

Agar $\alpha = a + ib$ kompleks son uchun $P_n(\alpha) = 0$ bo'lsa, bu holda α kompleks son $P_n(z)$ *ko'phadning ildizi* deyiladi.

Ko'phadlar algebrasining asosiy teoremasi. Har qanday $P_n(z)$ ($n \geq 1$) *algebraik ko'phad kamida bitta kompleks ildizga ega.*

Bu teoremaning sof «algebra tili»dagi isboti mavjud emas, u «kompleks analiz tili»da va boshqa usullarda isbotlangan.

Bezu teoremasi. α *kompleks son* $P_n(z)$ *algebraik ko'phadning ildizi bo'lishi uchun*

$$P_n(z) = (z - \alpha) Q_{n-1}(z)$$

bo'lishi zarur va yetarli. Bu yerda $Q_{n-1}(z)$ bilan $(n-1)$ — darajali algebraik ko'phad belgilangan.

Ko'phadlar algebrasining asosiy teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Har qanday $P_n(z)(n \geq 1)$ algebraik ko'phad aniq n ta ildizga ega.

Bu natija ko'phadlar algebrasining asosiy teoremasini va Bezu teoremasini ketma-ket qo'llash yordamida isbot qilinadi.

Agar $P_n(z) = (z-\alpha)^k Q_{n-k}(z)$ bo'lib (bu yerda $1 \leq k \leq n$; $Q_{n-k}(z)$ bilan $(n-k)$- darajali algebraik ko'phad belgilangan), $Q_{n-k}(\alpha) \neq 0$ bo'lsa, α son $P_n(z)$ *ko'phadning k karrali ildizi* deb ataladi. Quyidagi teoremalar o'rinli:

1°. *Agar* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ *sonlar* $P_n(z)$ *ko'phadning mos ravishda* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *karrali ildizlari bo'lsa, u holda*

$$P_n(z) = c_0(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}...(z-\alpha_m)^{k_m} \qquad (1)$$

$(k_1 + k_2 + ... + k_m = n)$ bo'ladi.

2°. *Agar $P_n(z)$ algebraik ko'phadning koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda $\forall z$ kompleks son uchun*

$$\overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z}) \qquad (2)$$

bo'ladi.

Isboti.

$$\overline{P_n(z)} = \overline{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + ... + c_{n-1}z + c_n} = \overline{c_0 z^n} - \overline{c_1 z^{n-1}} + ... + \overline{c_{n-1} z} +$$

$$+\overline{c_n} = \overline{c_0}\,\overline{z^n} + \overline{c_1}\,\overline{z^{n-1}} + ... + \overline{c_{n-1}}\,\overline{z} + \overline{c_n} = c_0 \overline{z}^n + c_1 \overline{z}^{n-1} + ... +$$

$$+c_{n-1}\bar{z} + c_n = P_n(\bar{z}).$$

3°. *Agar α kompleks son koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $P_n(z)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $\bar{\alpha}$ komleks son ham $P_n(z)$ ko'phadning ildizi bo'ladi.*

Isboti. $P_n(\bar{\alpha}) = \overline{P_n(\alpha)} = \bar{0} = 0.$

4°. *Agar $\alpha = u + iv$ $(v \neq 0)$ kompleks son koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $P_n(z)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'lsa, u holda $\bar{\alpha} = u - iv$ kompleks son ham $P_n(z)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.*

Isboti. $P_n(\alpha) = 0$ bo'lgani uchun Bezu teoremasiga asosan $P_n(z) = (z-\alpha)Q_{n-1}(z)$ bo'ladi. 3°- teoremaga ko'ra $Q_{n-1}(z) = (z-\bar{\alpha})L_{n-2}(z)$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$P_n(z) = (z-\alpha)(z-\bar{\alpha})L_{n-2}(z) = (z-u-iv)(z-u+iv)L_{n-2}(z) =$$

$$= (z^2 - 2uz + u^2 + v^2)L_{n-2}(z) = (z^2 + pz + q)L_{n-2}(z),$$

ya'ni

$$P_n(z) = (z^2 + pz + q)L_{n-2}(z), \qquad (3)$$

bo'ladi. Bu yerda $p = -2u$, $q = u^2 + v^2$ lar haqiqiy sonlar; $L_{n-2}(z)$ bilan koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan

$(n-2)$ — darajali ko'phad belgilangan. (3) ifodadan ko'rinib turibdiki, agar α son $P_n(z)$ ko'phadning $k(k \geq 2)$ karrali ildizi bo'lsa, u holda bu son $L_{n-2}(z)$ ko'phadning $k-1$ karrali ildizi bo'ladi. Yuqorida isbot qilinganiga ko'ra $\bar{\alpha}$ kompleks son ham $L_{n-2}(z)$ ko'phadning ildizi bo'ladi. Bu mulohazalarni $k-1$ marta takrorlab, α va $\bar{\alpha}$ ildizlarning karraliligi bir xil va

$$P_n(z) = (z^2 + pz + q)^k R_{n-2k}(z),$$

ekaniga qanoat hosil qilamiz. Bu yerda $R_{n-2k}(z)$ bilan koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $(n-2k)$ — darajali algebraik ko'phad belgilangan. Teorema isbot qilindi.

Faraz qilaylik, $P_n(z)$ ko'phad koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan n- darajali algebraik ko'phad bo'lib, a_1, a_2, ..., a_r lar mos ravishda uning m_1, m_2, ..., m_r karrali haqiqiy ildizlari, α_1, α_2, ...α_s lar esa uning mos ravishda k_1, k_2, ..., k_s karrali kompleks ildizlari bo'lsin. U holda

$$P_n(z) = c_0(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}...(z-a_r)^{m_r} \times$$

$$\times (z^2+p_1z+q_1)^{k_1}(z^2+p_2z+q_2)^{k_2}...(z^2+p_sz+q_s)^{k_s}$$

bo'ladi. Bu yerda

$$p_j = -2u_j,\ q_j = u_j^2 + \upsilon_j^2,\ \alpha_j = u_j + i\upsilon_j,$$

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0\ \ (j = 1,2,...,s);\ \sum_{\theta=1}^{r} m_\theta + 2\sum_{j=1}^{s} k_j = n.$$

4.2. To'g'ri ratsional kasrni elementlar kasrlar yig'indisiga yoyish. Endi to'g'ri ratsional kasrlarni elementar kasrlar yig'indisiga yoyish masalasini qaraymiz. Ushbu

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \tag{4}$$

ko'rinishdagi funksiya *bir argumentli ratsional funksiya* yoki *ratsional kasr* deyiladi. Bu yerda: x - haqiqiy o'zgaruvchi, $P_m(x)$ va $Q_n(x)$ lar koeffitsiyentlari haqiqiy bo'lgan m va n-darajali algebraik ko'phad.

Agar $m < n$ bo'lsa, (4) ratsional kasrga *to'g'ri ratsional kasr*, $m \geq n$ bo'lganda esa *noto'g'ri ratsional kasr* deb aytiladi. Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \quad (k=1,2,...)$$

ko'rinishdagi ratsional kasrlar *elementar kasrlar* (yoki *elementar ratsional kasrlar*) deyiladi. Bu yerda a, A, B, C lar o'zgarmas haqiqiy sonlar; p va q lar esa $q-\frac{p^2}{4}>0$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarmas haqiqiy sonlardir.

To'g'ri ratsional kasrlarni elementar kasrlarning yig'indisi shaklida ifodalash masalasi quyidagi teorema asosida yechiladi.

Asosiy teorema. *Agar berilgan* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *to'g'ri ratsional kasrning maxraji*

$$Q_n(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}...(x-a_r)^{m_r}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}...(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}, \qquad (*)$$

ko'rinishda tasvirlansa (bu yerda a_1, a_2, $...a_r$ *— har xil o'zgarmas haqiqiy sonlar;* p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_s, q_s *lar* $q_j-\frac{p_j^2}{4}>0$ $(j=1,2,...s)$ *shartlarni qanoatlantiruvchi har xil* $(p_j;\ q_j)$ *juftlarni tashkil qiluvchi o'zgarmas haqiqiy sonlar;* m_1, m_2, ..., m_r, k_1, k_2, ..., k_s lar esa $m_1+m_2+...+m_r+2(k_1+k_2+...+k_s)=n$ *shartni qanoatlantiruvchi tayin natural sonlar), u holda shunday yagona* $A_k^{(j_k)}$, $B_j^{(\mu_j)}$, $C_j^{(\mu_j)}$ *o'zgarmas haqiqiy sonlar topiladiki,*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\sum_{j_1=1}^{m_1}\frac{A_1^{(j_1)}}{(x-a_1)^{j_1}}+\sum_{j_2=1}^{m_2}\frac{A_2^{(j_2)}}{(x-a_2)^{j_2}}+...+\sum_{j_r=1}^{m_r}\frac{A_r^{(j_r)}}{(x-a_r)^{j_r}}+$$

$$+\sum_{\mu_1=1}^{k_1}\frac{B_1^{(\mu_1)}x+C_1^{(\mu_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\sum_{\mu_2=1}^{k_2}\frac{B_2^{(\mu_2)}x+C_2^{(\mu_2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\mu_2}}+...+\sum_{\mu_s=1}^{k_s}\frac{B_s^{(\mu_s)}x+C_s^{(\mu_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}} \qquad (A)$$

yoyilma o'rinli bo'ladi.

Bu teoremani isbot qilish uchun dastavval quyidagi ikkita lemmani isbot qilamiz:

1- lemma. Agar a haqiqiy son $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasr maxrajining k $(k \geq 1)$ karrali ildizi bo'lsa, u holda shunday yagona A haqiqiy son va koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $F(x)$ ko'phad topiladiki,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x)}{(x-a)^{k-1} L_{n-k}(x)} \tag{5}$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. Bu yerda $L_{n-k}(x)$ $-(n-k)$ — darajali algebraik ko'phad, $L_{n-k}(a) \neq 0$.

Isboti. Aytaylik, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasr berilgan bo'lib,

$$Q_n(x) = (x-a)^k L_{n-k}(x) \qquad (L_{n-k}(a) \neq 0)$$

bo'lsin. U holda har qanday A o'zgarmas haqiqiy son uchun

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^k L_{n-k}(x)} + \frac{A}{(x-a)^k} - \frac{A}{(x-a)^k} =$$
$$= \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_m(x) - AL_{n-k}(x)}{(x-a)^k L_{n-k}(x)} \tag{6}$$

deyish mumkin. Bu yerdagi $q(x) = P_m(x) - AL_{n-k}(x)$ ko'phadning darajasi n sondan kichik bo'lishi ayon.

Endi hozircha noma'lum bo'lgan A sonni shunday aniqlaymizki,

$$q(x) = P_m(x) - AL_{n-k}(x) = (x-a)F(x), \qquad F(a) \neq 0$$

bo'lsin. Bundan $P_m(a) - AL_{n-k}(a) = 0$ yoki $A = \frac{P_m(a)}{L_{n-k}(a)}$ bo'ladi. Agar (6)dagi $P_m(x) - AL_{n-k}(x)$ ko'phad o'rniga $(x-a)F(x)$ ifodani qo'ysak, (5) yoyilma kelib chiqadi. 1- lemma isbot qilindi.

2- lemma. Agar $\alpha = a + ib$ (a va b — haqiqiy sonlar; $b \neq 0$) komleks son $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasr maxrajining k $(k \geq 1)$

karrali ildizi bo‘lsa, u holda shunday yagona B, C o‘zgarmas haqiqiy sonlar va koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan $G(x)$ ko‘phad topiladiki,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} + \frac{G(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q(x)} \tag{7}$$

yoyilma o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ bo‘lib, $Q_n(x) = (x^2 + px + q)^k Q(x)$, $Q(\alpha) \neq 0$; (7) yoyilmadagi ikkinchi qo‘shiluvchi to‘g‘ri ratsional kasrdan iborat.

I s b o t i. Aytaylik, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasr berilgan bo‘lib, uning maxraji

$$Q_n(x) = ((x-\alpha)(x-\bar{\alpha}))^k Q(x) \quad (Q(\alpha) \neq 0)$$

ko‘rinishda bo‘lsin. $\alpha = a + ib$ $(b \neq 0)$ desak,

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 + px + q \quad (p = -2a,\ q = a^2 + b^2)$$

bo‘lgani sababli,

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^k Q(x) \quad \left(Q(\alpha) \neq 0,\ q - \frac{p^2}{4} > 0 \right)$$

deyish mumkin. U holda har qanday o‘zgarmas B va C haqiqiy sonlar uchun

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k Q(x)} - \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} + \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

deb yozish mumkin. Bundan

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P_m(x)-(Bx+C)Q(x)}{(x^2+px+q)^k Q(x)} \tag{8}$$

ifoda hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchi to‘g‘ri ratsional kasrdan iborat.

Endi B va C o‘zgarmaslarni shunday tanlaymizki, $P_m(x) - (Bx + C)Q(x)$ ko‘phad $x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ kvadrat uchhadga bo‘linsin. Buning uchun B va C larni

$$P_m(\alpha) - (B\alpha + C)Q(\alpha) = 0$$

shart bajariladigan qilib tanlash kifoya. Bu shartdan

$$B\alpha + C = \frac{P_m(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad (Q(\alpha) \neq 0).$$

Bu yerda, $\alpha = a + ib$ $(b \neq 0)$ ekanini e'tiborga olsak,

$$Ba + C + iBb = \frac{P_m(\alpha)}{Q(\alpha)} = M + iN$$

bo'ladi (M va N — o'zgarmas haqiqiy sonlar). Ikkita kompleks sonning o'zaro tengligi ta'rifidan

$$Ba + C = M, \quad Bb = N$$

tengliklar hosil bo'ladi. Bu tengliklardan

$$B = \frac{N}{b}, \; C = M - \frac{a}{b}N$$

qiymatlarga ega bo'lamiz. Xuddi ana shu qiymatlarda $P_m(x) - (Bx + C)Q(x)$ ko'phad kvadrat uchhadga bo'linadi. Demak,

$$P_m(x) - (Bx + C)Q(x) = (x^2 + px + q)G(x) \quad (G(\alpha) \neq 0)$$

ekanini e'tiborga olib, (8) tenglikdan (7) tenglikni hosil qilamiz.

2- lemma ham isbotlandi.

Asosiy teoremaning isboti. Aytaylik, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ to'g'ri ratsional kasrning maxraji (*) ko'rinishda tasvirlangan bo'lsin. Agar

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{m_1} L_{n-m_1}(x),$$

$$L_{n-m_1}(x) = (x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_r)^{m_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{k_s} \; (L_{n-m_1}(a_1) \neq 0)$$

desak, isbot qilingan 1- lemmaga binoan,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(m_1)}}{(x-a_1)^{m_1}}+\frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1-1}Q(x)}$$

bo'ladi.

Agar $m_1 \geq 2$ bo'lsa,

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1-1}Q(x)}$$

to'g'ri ratsional kasrga yana 1- lemmani qo'llasak,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(m_1)}}{(x-a_1)^{m_1}}+\frac{A_1^{(m_1-1)}}{(x-a_1)^{m_1-1}}+\frac{F(x)}{(x-a_1)^{m_1-2}L(x)}$$

bo'ladi. Bu yerda $F(x)$ va $L(x)$ — ko'phadlar.

Bu jarayonni $x-a_1$ ning daraja ko'rsatkichi nul bo'lguncha davom ettirib, undan keyin $(x-a_2)^{m_2}$, ..., $(x-a_r)^{m_r}$ ko'paytuvchilar bilan ham xuddi shunday ishlarni bajarib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\sum_{j_1=1}^{m_1}\frac{A_1^{(j_1)}}{(x-a_1)^{j_1}}+\ldots+\sum_{j_r=1}^{m_r}\frac{A^{(j_r)}}{(x-a_r)^{j_r}}+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}. \tag{9}$$

Bu yerdagi $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ ratsional kasr to'g'ri ratsional kasr bo'lib, uning maxraji haqiqiy ildizga ega emas.

$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ to'g'ri ratsional kasrga ketma-ket 2- lemmani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}=\sum_{\mu_1=1}^{k_1}\frac{B_1^{(\mu_1)}+C_1^{(\mu_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}}+\ldots+\sum_{\mu_s=1}^{k_s}\frac{B_s^{(\mu_s)}x+C_s^{(\mu_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}}. \tag{10}$$

Shunday qilib, (9) va (10) ifodalardan (A) yoyilma kelib chiqadi. Asosiy teorema isbot qilindi.

1- eslatma. Berilgan ko'phadga ko'ra asosiy teoremadagi (*) ifodani topish masalasi o'ziga xos izlanishlarni talab qiluvchi ancha murakkab masaladir. Odatda o'quv adabiyotlarida ko'pincha ko'phadning (*) ko'rinishdagi ifodasi uchraydi.

2- eslatma. Asosiy teoremadagi (A) yoyilmaning koeffitsiyentlarini aniqlash masalasi ham anchagina hisoblashlarni talab qiladigan masaladir. Odatda biron bir to'g'ri ratsional kasrni elementar kasrlar yig'indisiga yoyish uchun dastlab uni (*) ifodaga ko'ra (A) ko'rinishda yozib olinadi. So'ngra umumiy maxrajga keltirib, chap tomonida $P_m(x)$ ko'phad, o'ng tomonida esa koeffitsiyentlari noma'lum bo'lgan ko'phad turgan ayniyat hosil qilinadi. Undan keyin ikkita ko'phadning tengligi ta'rifiga asosan izlanayotgan koeffitsiyentlarga nisbatan bir jinslimas chiziqli algebraik tenglamalar tizimi (sistemasi) tuziladi. Nihoyat, hosil qilingan tizim (sistema) echilib, noma'lum koeffitsiyentlar topiladi. Bu usulga *noma'lum koeffitsiyentlar usuli* deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}$$

to'g'ri ratsional kasr elementar kasrlar yig'indisiga yoyilsin.

Y e c h i s h. Asosiy teoremaga binoan

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

deb yozamiz. Bundan

$$x^2-1=Ax(x^2+1)^2+$$

$$+B(x^2+1)^2+(Cx+D)x^2(x^2+1)+(Ex+F)x^2$$

yoki

$$x^2-1=A(x^5+2x^3+x)+B(x^4+2x^2+1)+$$

$$+Cx^5+Cx^3+Dx^4+Dx^2+Ex^3+Fx^2$$

yoxud

$$x^2-1=(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+$$

$$+(2B+D+F)x^2+Ax+B.$$

Ikkita ko'phadning o'zaro tengligi ta'rifiga ko'ra

$$\left.\begin{aligned}&A+C=0,\\&B+D=0,\\&2A+C+E=0,\\&2B+D+F=1,\\&A=0,\\&B=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&A=0,\\&B=-1,\\&C=0,\\&D=1,\\&E=0,\\&F=2.\end{aligned}\right\}$$

Shunday qilib,

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}.$$

Shuni aytish lozimki, agar

$$x^2-1=-(x^2+1)^2+x^2(x^2+1)+2x^2$$

ekanini payqash imkoni bo'lsa, u holda (asosiy teoremadan foydalanmasdan) birdaniga

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{-(x^2+1)^2+x^2(x^2+1)+2x^2}{x^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{(x^2+1)^2}$$

deb yozish ham mumkin. Agar buning iloji bo'lmasa, albatta noma'lum koeffitsiyentlar usulidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Algebraik ko'phad deb nimaga aytiladi? Uning ildizi deganda nimani tushunasiz?

2. Ko'phadlar algebrasining asosiy teoremasini va Bezu teoremasini bilasizmi?

3. Algebraik ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish deganda nimani tushunasiz?

4. Bitta argumengli ratsional funksiya (yoki ratsional kasr) deb nimaga aytiladi?

5. To'g'ri va noto'g'ri ratsional kasrlar deb qanday ratsional kasrlarga aytiladi?

6. Elementar kasrlar deb qanday ratsional kasrlarga aytiladi?
7. To‘g‘ri ratsional kasrlarni elementar kasrlar yig‘inlisi shaklida tasvirlash haqidagi teoremani isbotlang.
8. $(x+3)/_{(x-1)^2(x^2+1)}$ kasrni elemengar kasrlar yig‘indisi shaklida tasvirlang.

5- §. RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH

5.1. Elementar kasrlarni integrallash. Barcha elementar kasrlar elementar funksiyalarda integrallanadi. Haqiqatan,

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\quad (k=2,3,...)$$

kasrlarni alohida-alohida integrallab quyidagilarga ega bo‘lamiz:

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C;$

2) $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{1-k}}{1-k}+C=$

$$=C-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}\quad (2\le k\in N);$$

3) $\int\frac{Bx+D}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{B}{2}(2x+p-p)+D}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}+$

$$+\left(D-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{q-\frac{p^2}{4}+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(D-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2b}+C.$$

Bu yerda $b=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ $\left(q-\frac{p^2}{4}>0\right)$, C — ixtiyoriy o‘zgarimas haqiqiy son.

4) Aytaylik, $2\le k\in N$ bo‘lsin. U holda

$$\int \frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p-p)+D}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \left(x^2+px+q\right)^{-k} d\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\left(D-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(q-\frac{p^2}{4}\right)+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\right)^k} = \frac{B}{2(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+$$

$$+\left(D-\frac{Bp}{2}\right)J_k.$$

Bu yerda

$$J_k = \int \left(b^2+t^2\right)^{-k} dt,\ t = x+\frac{p}{2},\ b = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\ \left(q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Oxirgi J_k integral avvaldan bizga ma'lum bo‘lgan

$$J_k = \frac{t}{2b^2(k-1)\left(b^2+t^2\right)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2b^2(k-1)}J_{k-1} \qquad (*)$$

rekurrent formula yordamida hisoblanadi. Agar $k=2$ bo‘lsa,

$$J_2 = \frac{t}{2b^2\left(b^2+t^2\right)}+\frac{1}{2b^2}J_1 = \frac{t}{2b^2\left(b^2+t^2\right)}+\frac{1}{2b^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{b}+C$$

bo‘ladi. Agarda $k=3$ bo‘lsa, (*) rekurrent formula yordamida J_3 ni ketma-ket J_2 va J_1 orqali ifodalash lozim va hokazo.

5.2. Ratsional kasrlarni integrallash. Endi ratsional kasrlarni (yoki ratsional funksiyalarni) integrallash masalasini qaraymiz.

Teorema. *Har qanday ratsional kasr elementar funksiyalarda integrallanadi.*

Isboti. Aytaylik, ixtiyoriy $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ratsional kasr berilgan bo‘lsin. Agar $m \geq n$ bo‘lsa, u holda shunday yagona $q(x)$ va $r(x)$ ko‘phadlar jufti topiladiki,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)}$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. $q(x)$ bu yerda $(m-n)$ – darajali ko'phad; $\frac{r(x)}{Q_n(x)}$ — to'g'ri ratsional kasr. Agarda $m < n$ bo'lsa, bu holda berilgan kasrning o'zi to'g'ri ratsional kasr bo'ladi. Asosiy teoremaga binoan to'g'ri ratsional kasrni elementar kasrlar yig'indisi shaklida ifodalaymiz. So'ngra $q(x)$ ko'phadni va hosil bo'lgan barcha elementar kasrlarni integrallab,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int \left(q(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)}\right) dx$$

aniqmas integralning elementar funksiya ekaniga qanoat hosil qilamiz. Teorema isbot qilindi.

Bu teorema bir vaqtning o'zida ratsional kasrlarni integrallashning amaliy usulini ham ifodalaydi.

Misol. Ushbu

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$$

integral hisoblansin.

Y e c h i s h. Asosiy teoremaga ko'ra

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Bu yerdan,

$$x+1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx + D)(x-1)^2,$$

$$x + 1 = A(x^3-x^2 + x-1) + B(x^2+ 1) + (Cx + D)(x^2-2x + 1)=$$

$$= A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2 + 1) + Cx^3 + Dx^2-2Cx^2-$$

$$-2Dx + Cx + D= (A + C)x^3 + (B - A + D - 2C)x^2 +$$

$$+ (A - 2D + C)x + (B - A + D),$$

$$x+1=(A+C)x^3+(B-A+D-2C)x^2+(A-2D+C)x+$$
$$+(B-A+D).$$

Ikkita ko'phadning tengligi ta'rifiga ko'ra:

$$\left.\begin{aligned} &A+C=0,\\ &-A+B+D-2C=0,\\ &A-2D+C=1,\\ &-A+B+D=1, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &A=-1/2,\\ &B=1,\\ &C=1/2,\\ &D=-1/2. \end{aligned}\right\}$$

Demak,

$$\int\frac{(x+1)dx}{(x-1)^2(x^2+1)}=\int\left(-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right)dx=$$

$$=C-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x.$$

5.3. Ikki argumentli ratsional funksiya. Endi ikki argumentli ratsional funksiya tushunchasi bilan tanishamiz. Ushbu

$$P_n(u,v)=\sum_{i,j}a_{ij}u^i v^j \quad (a_{ij}\in R) \quad (0\le i+j\le n)$$

ko'rinishdagi ifoda *ikki o'zgaruvchili n- darajali algebraik ko'phad* deb ataladi. Masalan,

$$P_2(u,\ v)=a_{20}u^2+\ a_{11}uv+\ a_{02}v^2+\ a_{10}u+\ a_{01}v+\ a_{00}$$

ikki o'zgaruvchili ikkinchi darajali algebraik ko'phaddir.

Ikkita $P_m(u,\ v)$ va $Q_n(u,\ v)$ ikki o'zgaruvchili algebraik ko'phadning nisbati shaklida ifodalanuvchi ikki argumentli funksiya *ikki argumentli ratsional funksiya* deyiladi va $R(u,\ v)$ bilan belgilanadi:

$$R(u,v)=\frac{P_m(u,v)}{Q_n(u,v)}.$$

Umuman aytganda, s ta argumentli $R(u_1,\ u_2,\ ..,\ u_s)$ ratsional funksiya haqida so'z yuritish mumkin:

$$R(u_1, u_2, \ldots, u_s) = \frac{P_m(u_1, u_2, \ldots, u_s)}{Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_s)}.$$

Bu yerda

$$P_m(u_1, u_2, \ldots, u_s) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_s} a_{k_1, k_2, \ldots, k_s} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \ldots u_s^{k_s} \quad (a_{k_1, k_2, \ldots, k_s} \in \boldsymbol{R}),$$

$$0 \le k_1 + k_2 + \ldots + k_s \le m$$

$$Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_s) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_s} b_{m_1, m_2, \ldots m_s} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_s^{m_s} \quad (b_{m_1, m_2, \ldots, m_s} \in \boldsymbol{R}).$$

$$0 \le m_1 + m_2 + \ldots + m_s \le n).$$

Masalan, $f(x) = \frac{x^2}{x + \sqrt{2-x}}$ funksiyani ikkita $u = x, v = \sqrt{2-x}$ argumentli ratsional funksiya deb qarash mumkin. Haqiqatan, $f(x) = R(x, \sqrt{2-x})$. Bu yerda $R(u,v) = \frac{u^2}{u+v}$.

Ushbu $g(x) = \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x}$ funksiyani $u = \sin x$, $v = \cos x$ argumentlarning ratsional funksiyasi deb qarash mumkin. Haqiqatan, $g(x) = R$ $(\sin x, \cos x)$. Bunda $R(u,v) = \frac{uv^3}{1+v^2}$.

Nihoyat, $R(u, v)$ ratsional funksiyaning ikkita xossasini keltiramiz (ularning birinchisini isbotsiz beramiz):

1- xossa. Agar $R(-u, v) = R(u, v)$ bo'lsa, $R(u, v)$ funksiyani $R(u, v) = R_1(u^2, v)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Agarda $R(u, -v) = R(u, v)$ bo'lsa, $R(u, v)$ funksiyani $R(u, v) = R_2(u, v^2)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $R_1(u^2, v)$ bilan u^2 va v argumentlarning ratsional funksiyasi, $R_2(u, v^2)$ bilan esa u va v^2 argumentlarning ratsional funksiyasi belgilangan.

2- xossa. Agar $R(-u, v) = -R(u, v)$ $(R(u, -v) = -R(u, v))$ bo'lsa, $R(u, v)$ funksiyani $R(u, v) = R_3(u^2, v)u$ $(R(u, v) = R_4(u, v^2)u)$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

I s b o t i. 1- xossaga binoan

$$R(u,v) = \frac{R(u,v)}{u} u = R_3(u^2, v)u \quad \left(R(u,v) = \frac{R(u,v)}{v} v = R_4(u, v^2)v\right).$$

6- §. RATSIONAL FUNKSIYANI INTEGRALLASHGA KELTIRILADIGAN BA'ZI INTEGRALLAR

Ba'zi bir irratsional va transsendent ifodalarning aniqmas integrallarini ma'lum almashtirishlar yordamida ratsional funksiyalarning aniqmas integrallariga keltirish mumkin.

6.1. Irratsional funksiyalarni integrallash. Aytaylik,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{1}$$

ko'rinishdagi integral berilgan bo'lsin. Bu yerda, $R(u, v)$ bilan

$$u = x, \quad v = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi belgilangan; a, b, c, d — o'zgarmas haqiqiy sonlar.

Agar $ad - bc = 0$ bo'lsa,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}$$

bo'lgani uchun

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R_1(x)dx$$

bo'ladi. Boshqacha aytganda, $ad - bc = 0$ bo'lganda (1) integral ostidagi funksiya ratsional funksiya bo'lar ekan. Bu hol ayni vaqtda bizni qiziqtirmaydi.

Agar $ad - bc \neq 0$ bo'lsa, (1) integral

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \tag{2}$$

almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi. Haqiqatan, (2) tenglikdan

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \Rightarrow x = \frac{t^n d-b}{a-ct^n} \Rightarrow dx = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}dt$$

bo'lishini e'tiborga olib, (1) integralni quyidagicha yoza olamiz:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R_1(t)dt.$$

Bunda

$$R_1(t) = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(a-ct^n)^2} R\left(\frac{t^n d-b}{a-ct^n}, t\right)$$

ifoda t o'zgaruvchining ratsional funksiyasidir. Oxirgi integral ratsional funksiyani integrallash usulidan foydalanib hisoblanadi. So'ngra t o'rniga uning (2) ifodasi qo'yiladi.

1- misol. Ushbu integral hisoblansin:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x}$$

Y e c h i s h. Ravshanki, $ad - bc = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \neq 0.$

$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$ almashtirishni bajaramiz. U vaqtda $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ va $dx = \frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$ bo'lishiga qanoat hosil qilamiz. Demak,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x} = 4\int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)(t^2+1)} = 2\int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \quad \left(t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{3}$$

ko'rinishdagi integrallar

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s \tag{4}$$

almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi (bu yerda s bilan 2 dan kichik bo'lmagan m, n, ..., p natural sonlarning eng kichik umumiy bo'linuvchisi belgilangan; a, b, c, d sonlar $ad - bc \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi o'zgarmas sonlar). Haqiqatan, (4) tenglikdan

$$x = \frac{t^s d - b}{a - ct^s}, \quad dx = \frac{st^{s-1}(ad-bc)}{(a-ct^s)^2}dt$$

ifodalarni aniqlab, ularni berilgan integralga qo'ysak,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R_1(t)dt$$

bo'ladi. Bu yerda $R_1(t)$ ratsional funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$R_1(t) = \frac{st^{s-1}(ad-bc)}{(a-ct^s)^2} R\left(\frac{t^s d - b}{a - ct^s}, t^{n_1}, t^{m_1}, \dots, t^{p_1}\right);$$

$n_1 = \frac{s}{n}, m_1 = \frac{s}{m}, \dots, p_1 = \frac{s}{p}$ — natural sonlar.

Nihoyat, oxirgi integral ratsional funksiyani integrallash usulida integrallanadi va t o'rniga $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ifoda qo'yiladi.

2- misol. Ushbu $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$ integral hisoblansin.

Yechish. Integral ostidagi $f(x) = \frac{1}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$ funksiyani $u_1 = x, u_2 = \sqrt{x}$ ва $u_3 = \sqrt[3]{x}$ argumentlarning ratsional funksiyasi deb qarash mumkin:

$$f(x) = \frac{1}{x\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(\sqrt{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)} = R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}\right).$$

Bunda,

$$R(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{u_1\left(u_2 + u_3^2\right)}.$$

Mazkur holda $m=2,\ n=3,\ a=1,\ b=c=0,\ d=1$ ekanini e'tiborga olsak, berilgan integral ostidagi ifoda $x=t^6$ almashtirish yordamida ratsionallashtiriladi. Haqiqatan, $x=t^6$ va $dx=6t^5dt$ ifodalarni berilgan integralga qo'ysak,

$$\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=6\int\frac{dt}{t\left(t^3+t^4\right)}=6\int\frac{dt}{t^4(1+t)} \qquad (*)$$

bo'ladi. Oxirgi integral quyidagicha hisoblanadi: asosiy teoremaga binoan

$$\frac{1}{t^4(1+t)}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t}+\frac{C'}{t^2}+\frac{D}{t^3}+\frac{E}{t^4}$$

deb yozib olamiz. Bundan

$$1=At^4+Bt^3(1+t)+Ct^2(1+t)+Dt(1+t)+E(1+t)=$$

$$=(A+B)t^4+(B+C)t^3+(C+D)t^2+(D+E)t+E.$$

Ikki algebraik ko'phadning o'zaro tengligi ta'rifidan:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0, \\ B+C=0, \\ C+D=0, \\ D+E=0, \\ E=1, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=1, \\ D=-1, \\ E=1. \end{array}\right\}$$

Demak,

$$\int\frac{dt}{t^4(1+t)}=\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)dt=$$

$$=\ln|1+t|-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3t^3}+C.$$

Shunday qilib, $t=\sqrt[6]{x}$ ekanini e'tiborga olsak, (*) tenglikdan

$$\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}=C-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+6\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)$$

kelib chiqadi.

6.2. Binomial differensiallarni integrallash. Endi *binomial differensial* deb ataladigan $x^m(a+bx^n)^p dx$ ko'rinishdagi ifodalarni integrallash masalasini qaraymiz. Bunda m, n, p — o'zgarmas ratsional sonlar; $a \neq 0$, $b \neq 0$ — o'zgarmas haqiqiy sonlar. Aytaylik,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \qquad (5)$$

integral berilgan bo'lsin. Bu integralning elementar funksiyalarda ifodalanishi yoki ifodalanmasligi m, n va p sonlarga bog'liq:

1) Faraz qilaylik, $p \in \boldsymbol{Z}$ bo'lsin (bunda $\boldsymbol{Z}$ bilan, har doimgidek, barcha butun sonlar to'plami belgilangan). U holda m va n kasr-ratsional sonlar maxrajlarining eng kichik umumiy bo'linuvchisini r deb belgilasak,

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int\left(\sqrt[r]{x}\right)^{m_1}\left(a+b\left(\sqrt[r]{x}\right)^{n_1}\right)^p dx=$$

$$=\int R\left(\sqrt[r]{x}\right)dx=\int R_1(t)dt$$

bo'ladi. Bu yerda $t=\sqrt[r]{x}, m_1 \in Z, n_1 \in Z$. Shunday qilib, $p \in \boldsymbol{Z}$ bo'lganda (5) integral ostidagi ifoda $\sqrt[r]{x}=t$ almashtirish yordamida ratsionallashtirilar ekan. So'ngra $R_1(t)$ ratsional funksiyani integrallab, t o'zgaruvchi o'rniga uning $\sqrt[r]{x}=t$ ifodasi qo'yiladi.

2) Aytaylik $p \notin \boldsymbol{Z}$ bo'lsin. Bu holda (5) integralda $x^n = z$ almashtirishni bajaramiz. U vaqtda $x=z^{1/n}$ va $dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1-n}{n}}dz$ bo'lishini e'tiborga olib, (5) integralni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx=$$

$$=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p dz=\begin{cases}\frac{1}{n}\int R\left(z,\sqrt[s]{a+bz}\right)dz & \left(\frac{m+1}{n}\in Z\right),\\ \frac{1}{n}\int R_1\left(z,\sqrt[s]{b+az^{-1}}\right)dz & \left(\frac{m+1}{n}+p\in Z\right).\end{cases}$$

Bu yerda s bilan p kasr-ratsional sonning maxraji belgilangan. Yuqorida ko'rganimizdek, oxirgi integrallar mos ravishda $\sqrt[s]{a+bz}=t$ va $\sqrt[s]{b+az^{-1}}=t$ almashtirishlar yordamida t argumentning ratsional funksiyasini integrallashga keltiriladi. So'ngra integralni hisoblab, t ning o‘rniga mos ravishda $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$ yoki $t = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$ qo‘yiladi.

Taniqli rus matematigi P.L. Chebishev (1821–1894) quyidagi muhim teoremani isbot qilgan: (5) *ko‘rinishdagi integrallar* $p \in Z, \frac{m+1}{n} \in Z$ va $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ *hollardan boshqa holatlarda elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi.*

7- §. TRIGONOMETRIK IFODALARNI INTEGRALLASH. EYLER ALMASHTIRISHLARI

7.1. Trigonometrik ifodalarni integrallash. Aytaylik,

$$\int R(\sin x, \ \cos x)dx \tag{1}$$

ko‘rinishdagi integral berilgan bo‘lsin. Bunda $R(\sin x, \cos x)$ bilan $u = \sin x$ va $v = \cos x$ o‘zgaruvchilarning ratsional funksiyasi belgilangan. Har doim (1) integral *universal almashtirish* deb ataladigan

$$tg\frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi) \tag{2}$$

almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi. Haqiqatan, (2) belgilashga ko‘ra $x = 2\,\mathrm{arctg}t$. Bundan

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{3}$$

Maktab kursidan ma'lum bo‘lgan

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

formulalarga asosan

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left(t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) \tag{4}$$

bo‘ladi. (3) va (4) ifodalarni (1) ga qo‘yib,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{2}{1+t^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)dt = \int R_1(t)dt$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda

$$R_1(t) = \frac{2}{1+t^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

Nihoyat, oxirgi integralni ratsional funksiyani integrallash usuli bilan hisoblab, t o'rniga uning (2) belgilashdagi ifodasini qo'yamiz va maqsadga erishamiz.

Shuni aytishimiz lozimki, ba'zi hollarda (1) ko'rinishdagi integrallar (2) universal almashtirishdan farqli o'laroq boshqa almashtirishlar yordamida osonroq hisoblanishi ham mumkin. Masalan:

1°. Agar $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda (1) integral $\cos x = t$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

I s b o t i. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lgani uchun $R(u, v)$ ning 2- xossasiga ko'ra

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \sin x\, dx =$$

$$= \int R_1(\sin x, \cos x)\sin x\, dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\, dx =$$

$$= -\int R_2\left(1-t^2, t\right)dt = \int R_3(t)dt \quad (t = \cos x).$$

2°. Agar $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda (1) integral $\sin x = t$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

I s b o t i. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lgani sababli, $R(u, v)$ funksiyaning 2- xossasiga ko'ra

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_4(\sin x, \cos^2 x)\cos x\, dx =$$

$$= \int R_4(t, 1-t^2)dt = \int R_5(t)dt \quad (t = \sin x).$$

3°. Agar $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda (1) integral $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

Isboti. Ravshanki,

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cos x, \cos x\right) = R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right).$$

Shart bo'yicha $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lgani uchun

$$R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}, -\cos x\right) = R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right)$$

bo'ladi. Shu sababli $R(u, v)$ ning 1- xossasiga ko'ra

$$R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right) = R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right) = R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) =$$
$$= R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) = R_3(t) \quad (t = \operatorname{tg} x)$$

deb yozish mumkin.

Demak,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right)dx =$$
$$= \int R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)dx = \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx =$$
$$= \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_4(t)dt \quad (t = \operatorname{tg} x).$$

7.2. Eyler almashtirishlari. Endi Eyler almashtirishlari deb ataladigan almashtirishlar yordamida yangi t o'zgaruvchining ratsional funksiyasini integrallashga keltiriladigan

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx \tag{5}$$

ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz. Bu yerda $a \neq 0$, b, c —haqiqiy sonlar. Aytaylik, $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadning diskriminanti D ($D = b^2 - 4ac$) bo'lsin. Quyidagi hollarni alohida-alohida qaraymiz:

a) $a > 0$ va $D = 0$ bo'lsin. U holda

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(x, \sqrt{a(x - x_0)^2}\right)dx = \int R_1(x)dx.$$

b) $a > 0$ va $D > 0$ bo'lsin. U holda

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(x, \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}\right)dx =$$

$$= \int R\left(x, (x - x_1)\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx = \int R_1\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right)dx =$$

$$= \int R_2(t)dt\left(t = \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right).$$

d) $a > 0$ va $D < 0$ bo'lsin. U holda

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a}x + \sqrt{a}x\right)dx =$$

$$= \int R\left(x, \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{a}x\right)\left(1 \pm \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{a}x}\right)\right)dx =$$

$$= \int R_1\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{a}x\right)dx =$$

$$= \int R_2(t)dt\ \left(t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{a}x\right).$$

Eslatma. $a < 0$, $D < 0$ holat ma'noga ega emas, chunki bu holda $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ifoda ma'nosiz bo'lib qoladi.

e) $c > 0$ va $D < 0$ bo'lsin. U holda

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c} + \sqrt{c}\right)dx =$$

$$= \int R\left(x, \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}x\left(1 \pm \frac{\sqrt{c}}{\frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}x}\right)\right)dx =$$

$$= \int R_1\left(x, \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}\right)dx = \int R_2^*(t)dt\left(t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} \mp \sqrt{c}}{x}\right).$$

Shunday qilib, (5) ko'rinishdagi integrallar yuqorida qaralgan a)—e) hollarda elementlar funksiyalarda ifodalanadi. Ravshanki a) holat bizni qiziqtirmaydi, chunki bu holda integral ostidagi funksiyaning o'zi ratsional funksiyadan iborat bo'ladi. b), d) va e) holatlarda (5) integral mos ravishda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t, \tag{6}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x, \tag{7}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}, \tag{8}$$

almashtirishlar yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi. Bu yerda x_1 bilan ax^2+bx+c kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlaridan biri belgilangan. (6), (7) va (8) almashtirishlar odatda *Eyler almashtirishlari* deb ataladi.

Shuni aytishimiz kerakki, Eyler almashtirishlari ko'pincha murakkab hisoblashlarni bajarishga olib keladi. Shuning uchun ulardan noiloj hollarda (ya'ni boshqa oson usul bilan yechish mumkin bo'lmagan holatda) foydalanish lozim.

7.3. Elliptik integrallar. Kezi kelganda shuni ham aytish lozimki, *elliptik integrallar* deb ataladigan

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+kx+l}\right)dx,$$

ko'rinishdagi integrallar, umuman aytganda, elementar funksiyalarda ifodalanmaydi. Ko'pincha

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\quad (0<k<1)$$

ko'rinishdagi integrallar uchrab turadi. Ular $x=\sin\alpha$ almashtirish yordamida

$$\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha\quad (0<k<1)$$

integrallarning kombinatsiyalariga keltiriladi. Oxirgi integrallar mos ravishda *Lejandr formasidagi birinchi va ikkinchi tur elliptik integrallar* deb ataladi (A. Lejandr (1752—1833) — fransuz matematigi).

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Elementar kasrlar qanday integrallanadi? Ularning aniqmas integrallari har doim elementar funksiya bo'ladimi?
2. Har qanday ratsional kasr elementar funksiyalarda integrallanadimi?
3. Ikkita argumentli ratsional funksiya deb nimaga aytiladi?
4. Irratsional funksiyalar qanday integrallanadi?
5. Binomial differensial deb nimaga aytiladi va u qanday integrallanadi?
6. Trigonometrik ifodalar qanday integrallanadi?
7. Eyler almashtirishlari deb nimaga aytiladi?
8. Qanday integrallar elliptik integrallar deb ataladi? Lejandr formasidagi birinchi va ikkinchi tur elliptik integrallar deb qanday integrallarga aytiladi?

8- §. ANIQ INTEGRAL

Fan va texnikaning mazmunlari turlicha bo'lgan bir qator masalalari *aniq integral* deb ataladigan matematik tushunchaning paydo bo'lishiga sabab bo'lgan. Hozir ulardan uchtasini qarab chiqamiz.

8.1. Yo'lni hisoblash masalasi. Faraz qilaylik, moddiy nuqta $v = v(t)$ tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsin. Shu moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan S yo'lini aniqlash talab etilsin. Ma'lumki, agar moddiy nuqta o'zgarmas v_0 tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsa, bu holda $S = (T-t_0)v_0$ bo'ladi. Agarda moddiy nuqta notekis harakatlanayotgan bo'lsa, bu holda S ni quyidagicha aniqlash mumkin: $[t_0, T]$ vaqt oralig'ini $\tau = \{t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ usulda n ta $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1,2,...,n)$ elementar vaqt oraliqlariga bo'lib chiqamiz. So'ngra har bir $[t_{i-1}, t_i]$ oraliqda ixtiyoriy ξ_i vaqt momentini tayinlaymiz va moddiy nuqtaning bu elementar vaqt oralig'ida bosib o'tgan ΔS_i yo'lini

$$\Delta S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

taqribiy tenglik orqali ifodalaymiz ($[t_{i-1}, t_i]$ oraliqni yetarli kichik qilish hisobiga shunday deb olishimiz mumkin). U holda, ravshanki,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi v ga, $\tau = \{t_0 < t_1 < ... < t_n = T\}$ ga va ξ_i larning tanlanishiga bog'liq. Agar

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

yig'indi $\max\limits_i \Delta t_i \to 0$ (yoki $n \to \infty$) da τ va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan chekli limitga ega bo'lsa, bu limitni moddiy nuqtaning $[t_0, T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan S yo'li deb qabul qilish mumkin:

$$S = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

Matematikada bu limit $v = v(t)$ funksiyadan $[t_0, T]$ segment bo'yicha olingan *aniq integral* deyiladi va

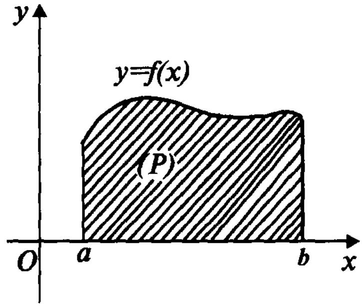
$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)dt$$

ko'rinishda yoziladi. Bu formula *yo'lni hisoblash formulasi* deb ataladi.

8.2. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash masalasi. Aytaylik, tekislikdagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalari tizimida yuqoridan $y = f(x) (y > 0)$ uzluksiz egri chiziq bilan, yonlaridan $x = a$, $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan va quyidan abssissalar o'qi ($y = 0$) bilan chegaralangan

$$(P) = \{(x;\ y) : 0 < y \le f(x),\ a \le x \le b\}$$

egri chiziqli trapetsiya berilgan bo'lsin (92- rasm). (P) egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash masalasini qaraymiz. (P) ning yuzini P deb belgilaylik. $[a, b]$ kesmani $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ usulda n ta $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ elementar kesmalarga bo'lib chiqamiz va $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ vertikal chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada (P) egri chiziqli trapetsiya n ta



92- rasm.

$$(P_i) = \{(x; y) : 0 < y \le f(x),\ x_{i-1} \le x \le x_i\} \quad (i = \overline{1, n})$$

elementar egri chiziqli trapetsiyalarga bo'linadi (93- rasm). Ravshanki,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i. \tag{*}$$

Bu yerda P_i bilan (P_i) ning yuzi belgilangan. Endi har bir $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakda ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz va P_i ni

$$P_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (x_i - x_{i-1} = \Delta x_i)$$

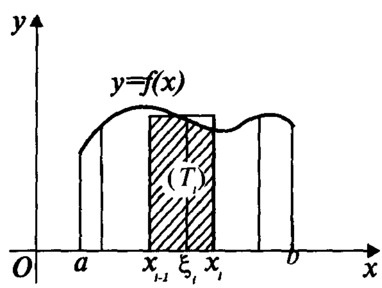
taqribiy tenglik orqali ifodalaymiz, ya'ni (P_i) elementar egri chiziqli trapetsiyani taqriban

$$(T_i) = \left\{(x; y) : 0 < y \le f\left(\xi_i\right),\ x_{i-1} \le x \le x_i\right\} \quad (i = \overline{1, n})$$

to'g'ri to'rtburchak bilan almashtiramiz. U holda (*) ifodaga ko'ra

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

bo'ladi. Taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi f funksiyaga, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots \quad < x_n = b\}$



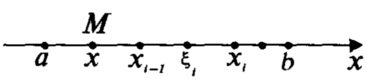
93- rasm.

bo'linishga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq. Agar bu yig'indi $\max_i \Delta x_i \to 0$ (yoki $n \to \infty$) da τ ga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan chekli limitga ega bo'lsa, bu limitni (P) egri chiziqli trapetsiyaning P yuzi deb olish mumkin:

$$P = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Sof matematik tilda bu limit f funksiyadan $[a, b]$ segment bo'yicha olingan *aniq integral* deyiladi va $P = \int_a^b f(x)dx$ ko'rinishda yoziladi. Bu formula *egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash formulasi* deb ataladi.

8.3. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqta o'zgaruvchan $\vec{F}(x)$ kuch ta'sirida x o'q bo'ylab harakat qilsin. Bu kuchning M moddiy nuqtani $x = a$ nuqtadan $x = b$ nuqtaga siljitishda bajargan A ishini topish talab qilingan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ usulda n ta $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ elementar kesmalarga bo'lib chiqamiz (94- rasm) va har bir elementar kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz. U holda F kuchning M moddiy nuqtani $x = x_{i-1}$ nuqtadan $x = x_i$ nuqtaga siljitishda bajargan A_i ishini



94- rasm.

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i \qquad (x_i - x_{i-1} = \Delta x_i)$$

deyish mumkin. Bu yerda $F(\xi_i)$ bilan $\vec{F}(\xi_i)$ kuchning kattaligi belgilangan. Ko'rinib turibdiki,

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Taqribiy tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi F funksiyaga, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linishga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq. Agar bu yig'indi $\max_i \Delta x_i \to 0$ da (yoki $n \to \infty$ da)

τ ga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan chekli limitga ega bo'lsa, bu limitni $\overline{F}(x)$ kuchning M moddiy nuqtani $x = a$ nuqtadan $x = b$ nuqtaga siljitishda bajargan A ishi deb qabul qilish mumkin:

$$A = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Sof matematik tilda bu limit F funksiyadan $[a, b]$ kesma bo'yicha olingan *aniq integral* deyiladi va

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

ko'rinishda yoziladi. Bu formula *o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini topish formulasi* deb ataladi.

Bu tipdagi masalalarni ko'plab keltirish mumkin. Ko'rinib turibdiki, yuqoridagi uchta masala mazmunlari bo'yicha turlicha bo'lgani bilan, ularning hammasi matematik analizning bitta masalasiga, aniqrog'i,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

limitni hisoblash masalasiga keltirilgan.

8.4. Aniq integral. Endi (1) ko'rinishdagi limitlarning matematik nazariyasini o'rganamiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan bo'lsin. Bu segmentni $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ sonlar yordamida n ta $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ elementar segmentlarga ajratamiz va $[a, b]$ segmentning mazkur bo'linishini $\tau = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ deb belgilaymiz. So'ngra har bir $[x_{i-1}, x_i]$ elementar segmentda bittadan ixtiyoriy ξ_i sonni tanlab,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_i - x_{i-1} = \Delta x_i)$$

yig'indini tuzamiz. Ko'rinib turibdiki, σ yig'indi f funksiyaga, τ bo'linishga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq. Bu yig'indi f funksiyaning ($[a, b]$ segmentning τ bo'linishiga va ξ_i nuqtalarning tanlanishiga mos) *integral yig'indisi* deyiladi va zarur hollarda $\sigma=\sigma_\tau(f;\ \xi_i)$ ko'rinishda yoziladi. Qulaylik maqsadida $\max\limits_i \Delta x_i = h_\tau$ deb belgilaymiz va unga $[a,\ b]$ kesmani τ bo'linishining *maksimal qadami* deb ataymiz.

1- ta'rif. Agar shunday I haqiqiy son mavjud bo'lib, $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $h_\tau<\delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall\tau$ bo'linish uchun ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda $|\sigma-I|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu holda I son σ *integral yig'indining* $h_\tau\to 0$ *dagi* (*yoki* $n\to\infty$ *dagi*) *limiti* deyiladi va

$$I=\lim_{h_\tau\to 0}\sigma=\lim_{h_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi I chekli limit f funksiyadan $[a,\ b]$ segment bo'yicha olingan *aniq integral* yoki *Riman aniq integrali* (B. Riman (1826—1866) — nemis matematigi) deb ataladi va

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{h_\tau\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerdagi a va b sonlar mos ravishda *aniq integralning quyi va yuqori chegaralari* deb aytiladi. Agar (1) chekli limit mavjud bo'lsa, bu holda $\int_a^b f(x)dx$ *aniq integral mavjud* yoki f funksiya $[a,\ b]$ segmentda (*Riman ma'nosida*) *integrallanuvchi* deyiladi.

Endi quyidagi teoremalarni isbot qilamiz:

1- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ segmentda chegaralanmagan bo'lsa, u holda bu funksiya shu segmentda integrallanuvchi bo'lmaydi.*

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ segmentda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ segmentning ixtiyoriy tayin $\tau=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ bo'linishidagi biror $[x_{k-1},\ x_k]$ segmentda chegaralanmagan bo'ladi. Shuning uchun $\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

integral yig'indidagi $f(\xi_k)\Delta x_k$ qo'shiluvchi absolut qiymati bo'yicha, ξ_i nuqtani tanlash hisobiga, istalgancha kattalashtirilishi mumkin. Bundan esa σ integral yig'indilarning chegaralanmaganligi va, demak, ularning chekli limitga ega emasligi kelib chiqadi. Bu esa ta'rifga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lmasligini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.*

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik:

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integral mavjud va $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linishida kamida bitta shunday $[x_{k-1}, x_k]$ elementar segment topiladiki, unda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan bo'ladi. Demak, hadlari $[x_{k-1}, x_k]$ elementar segmentga tegishli bo'lgan $\{\xi_k^{(m)}\}$ sonli ketma-ketlik mavjud bo'ladiki,

$$\lim_{m\to\infty} f\left(\xi_k^{(m)}\right) = \infty \qquad (**)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Endi qandaydir usul bilan $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{k-2}, x_{k-1}]$, $[x_k, x_{k+1}]$, ..., $[x_{n-1}, b]$ segmentlarning har birida mos ravishda bittadan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ nuqtalarni tanlaylik. U holda, ravshanki,

$$\sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

yig'indi aniq qiymatga ega bo'ladi. Shuning uchun (**) tenglikka ko'ra

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_\tau\left(f, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k^{(m)}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n\right) =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left(f\left(\xi_k^{(m)}\right)\Delta x_k + \sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i\right) = \infty$$

bo‘ladi. Demak, $\forall M>0$ son uchun har doim shunday m_0 natural sonni ko‘rsatish mumkinki, agar $\xi_k^{(m_0)} \in [x_{k-1}, x_k]$ bo‘lsa,

$$\left|\sigma_\tau\left(f,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{k-1},\xi_k^{(m)},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n\right)\right| > M$$

bo‘ladi. Bundan esa

$$\lim_{h_\tau \to 0} \sigma_\tau\,(f,\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

chekli limitning mavjud emasligi kelib chiqadi. Bu ziddiyat «$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralanmagan bo‘lsin», degan noo‘rin farazimizdan kelib chiqdi. Shunday qilib, $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi funksiya shu segmentda chegaralangan bo‘lar ekan. Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Umuman aytganda, $[a, b]$ segmentda chegaralangan funksiya shu segmentda integrallanuvchi bo‘lmasligi ham mumkin. Misol sifatida *Dirixle funksiyasi* deb ataladigan

$$D(x)=\begin{cases}1\,(x-\text{ratsional son}),\\ 0\,(x-\text{irratsional son})\end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Ko‘rinib turibdiki, $D(x)$ funksiya har qanday $[a, b]$ segmentda chegaralangan. Lekin u hech bir $[a, b]$ segmentda (Riman ma'nosida) integrallanuvchi emas. Haqiqatan,

$$\sigma_\tau\,(D;\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} D\,(\xi_i\,)\Delta x_i=\begin{cases}b-a\,(\xi_i-\text{ratsional son}),\\ 0 \qquad (\xi_i-\text{irratsional son})\end{cases}$$

bo‘lgani sababli,

$$\lim_{h_\tau \to 0} \sigma_\tau\,(D,\xi_i) = \int_a^b D(x)dx$$

chekli limit mavjud emas, ya'ni $D(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo‘lmaydi.

Bu eslatmadan va 2- teoremadan ko‘rinib turibdiki, funksiyaning $[a, b]$ segmentda chegaralanganligi bu funksiyaning shu segmentda integrallanuvchi bo'lishi uchun zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmas ekan, ya'ni [a, b] segmentda (Riman ma'nosida) integrallanuvchi bo'lgan barcha funksiyalar to'plami shu segmentda chegaralangan barcha funksiyalar to'plamining xos qism to'plami bo'lar ekan.

9- §. DARBU YIG'INDILARI VA ULARNING ASOSIY XOSSALARI

Ushbu paragrafda aniq integralning mavjudlik shartini ifodalashda muhim rol o'ynaydigan *Darbu* (Gaston Darbu (1842—1917) — fransuz matematigi) *yig'indilari* deb ataladigan yig'indilarni va ularning asosiy xossalarini o'rganamiz.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya [a, b] segmentda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. [a, b] segmentning ixtiyoriy bo'linishini $\tau=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ deb, ushbu $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\quad (i=1,2,\ldots n)$$

belgilashlarni kiritamiz.

1- ta'rif. *Ushbu*

$$s_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\quad S_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

yig'indilar mos ravishda Darbuning quyi va yuqori yig'indilari deb ataladi.

1- xossa. [a, b] kesmaning $\forall\tau$ bo'linishi va $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1,2,\ldots$ n) nuqtalarning ixtiyoriy tanlanishi uchun $s_\tau(f)\le$ $\le\sigma_\tau(f;\ \xi_i)\le S_\tau(f)$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda har doimgidek,

$$\sigma_\tau(f;\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

deb belgilangan.

I s b o t i. $\forall\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\ldots n)$ uchun $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$ ekanini e'tiborga olsak, $\Delta x_i>0$ $(i=1,2,\ldots n)$ bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

yoki yuqoridagi belgilashlarga ko‘ra $s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f;\ \xi_i) \le S_\tau(f)$ bo‘ladi. 1- xossa isbot qilindi.

2- xossa. $\inf\limits_{\xi_i} \sigma_\tau(f;\xi_i) = s_\tau(f), \quad \sup\limits_{\xi_i} \sigma_\tau(f;\xi_i) = S_\tau(f).$

I s b o t i. Avval $\sup\limits_{\xi_i} \sigma_\tau(f;\xi_i) = S_\tau(f)$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. ε son ixtiyoriy musbat son bo‘lsin. Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga asosan shunday $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i] (i = 1,2,\dots,\ n)$ nuqtalar topiladiki,

$$M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i) \le M_i \quad (i = 1,2,\dots n)$$

bo‘ladi. Bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i$$

yoki

$$S_\tau(f) - \varepsilon < \sigma_\tau(f;\xi_i) \le S_\tau(f)$$

tengsizliklar hosil bo‘ladi. Bunda ε son ixtiyoriy musbat son bo‘lganligi sababli, aniq yuqori chegaraning ta'rifiga binoan $\sup\limits_{\xi_i} \sigma_\tau(f;\xi_i) = S_\tau(f)$ bo‘ladi.

Endi $\inf\limits_{\xi_i} \sigma_\tau(f;\xi_i) = s_\tau(f)$ ekanligini ko‘rsatamiz. Yana ε son ixtiyoriy musbat son bo‘lsin deylik. Aniq quyi chegaraning ta'rifiga ko‘ra shunday $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$ $(i = 1,2,\dots n)$ nuqtalar mavjud bo‘ladiki,

$$m_i \le f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (i = 1,2,\dots,\ n)$$

bo‘ladi. Bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i$$

yoki

$$s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f;\ \ \xi_i) < s_\tau(f) + \varepsilon$$

tengsizliklar hosil bo‘ladi. Bu esa ε son ixtiyoriy musbat son bo‘lganligi sababli, aniq quyi chegaraning ta'rifiga binoan

$$\inf_{\xi_i} \sigma_\tau (f;\xi_i) = s_\tau(f)$$

ekanligini bildiradi. 2- xossa isbot qilindi.

Bundan keyin har doim, agar $[a, b]$ kesmaning τ bo‘linishining barcha nuqtalari $[a, b]$ kesmaning τ' bo‘linishining ham nuqtalari bo‘lsa, $\tau \prec \tau'$ ko‘rinishda yozamiz.

3- xossa. Agar $\tau \prec \tau'$ bo‘lsa, u holda

$$S_\tau(f) \geq S_{\tau'}(f) \text{ va } s_\tau(f) \leq s_{\tau'}(f)$$

bo‘ladi. Boshqacha aytganda, $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy tayin $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b]$ bo‘linishiga yangi bo‘linish nuqtalari kiritilsa, u holda Darbuning yuqori yig‘indisi o‘smaydi, quyi yig‘indisi esa kamaymaydi.

I s b o t i. Aytaylik, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ va $\tau' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x' < x_k < \ldots < x_n = b\}$ bo‘lsin. Ravshanki, τ' bo‘linish τ bo‘linishga bitta x' nuqtani kiritishdan hosil bo‘lgan. Bu holda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$S_{\tau'}(f) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} M_i \Delta x_i +$$

$$+(x' - x_{k-1}) \sup_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x) + (x_k - x') \sup_{x\in[x', x_k]} f(x),$$

$$s_{\tau'}(f) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \Delta x_i +$$

$$+(x' - x_{k-1}) \inf_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x) + (x_k - x') \inf_{x\in[x', x_k]} f(x).$$

Bu yerda, har doimgidek,

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Endi,

$$s_\tau(f) - s_{\tau'}(f), \quad S_\tau(f) - S_{\tau'}(f)$$

ayirmalarning ishoralarini tekshiramiz:

$$S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) = (x_k - x_{k-1}) M_k -$$
$$-(x' - x_{k-1}) \sup_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x) - (x_k - x') \sup_{x\in[x', x_k]} f(x) =$$
$$= \{(x_k - x') + (x' - x_{k-1})\} M_k - (x_k - x') \sup_{x\in[x', x_k]} f(x) -$$
$$-(x' - x_{k-1}) \sup_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x) =$$
$$= (x_k - x')\left\{M_k - \sup_{x\in[x', x_k]} f(x)\right\} + (x' - x_{k-1})\left\{M_k - \sup_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x)\right\}.$$

Bu yerda, $x_k > x' > x_{k-1}$, $M_k \geq \sup_{x\in[x', x_k]} f(x)$ va $M_k \geq \sup_{x\in[x_{k-1}, x']} f(x)$ bo'lgani sababli, $S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) \geq 0$ yoki $S_{\tau'}(f) \leq S_\tau(f)$.

Xuddi shunga o'xshash $s_\tau(f) - s_{\tau'}(f) \leq 0$ yoki $s_{\tau'}(f) \geq s_\tau(f)$ ekanini ko'rsatish mumkin (buni o'quvchining o'ziga havola qilamiz). 3- xossa isbot qilindi.

Eslatma. 3- xossani isbot qilishda qulaylik maqsadida $[a, b]$ kesmaning τ bo'linish nuqtalariga faqat bitta x' bo'linish nuqtasini kiritib, τ' bo'linishini hosil qildik. Bu xossani τ bo'linishning nuqtalariga istalganicha p chekli sondagi bo'linish nuqtalarini kiritgan holda ham isbot qilish mumkin. Shu bilan birga

$$S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) \leq (M - m) p h_\tau, \quad s_{\tau'}(f) - s_\tau(f) \leq (M - m) p h_\tau,$$
$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

ekanini ko'rsatish mumkin.

4- xossa. $[a, b]$ segmentning har qanday ikkita τ_1 va τ_2 bo'linishlari uchun $s_{\tau_1}(f) \leq S_{\tau_2}(f)$ ва $s_{\tau_2}(f) \leq S_{\tau_1}(f)$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Boshqacha aytganda, Darbuning har qanday quyi yig'indisi uning ixtiyoriy yuqori yig'indisidan oshmaydi.

I s b o t i. Aytaylik, τ_1 va τ_2 lar $[a, b]$ segmentning ixtiyoriy ikkita bo‘linishi bo‘lsin. Bu bo‘linishlarning birlashmasidan tuzilgan uchinchi $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$ bo‘linishni qaraymiz. $\tau_1 \prec \tau_3$ ва $\tau_2 \prec \tau_3$ bo‘lgani sababli, 3- xossaga asosan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\text{(a) } s_{\tau_1}(f) \le s_{\tau_3}(f), \quad \text{(b) } S_{\tau_1}(f) \ge S_{\tau_3}(f),$$

$$\text{(c) } s_{\tau_2}(f) \le s_{\tau_3}(f), \quad \text{(d) } S_{\tau_2}(f) \ge S_{\tau_3}(f).$$

Bundan tashqari, ma'lumki,

$$s_{\tau_3}(f) \le \sigma_{\tau_3}(f, \xi_i) \le S_{\tau_3}(f) \qquad (*)$$

Ravshanki, (a), (*) va (d) tengsizliklardan $s_{\tau_1}(f) \le S_{\tau_2}(f)$ bo‘lishi; (c), (*) va (b) tengsizliklardan esa $s_{\tau_2}(f) \le S_{\tau_1}(f)$ ekani kelib chiqadi. 4- xossa isbot qilindi.

5- xossa. $\{S_\tau(f)\}_\tau$ to‘plam quyidan, $\{s_\tau(f)\}_\tau$ to‘plam esa yuqoridan chegaralangan.

I s b o t i. 4- xossaga ko‘ra har qanday $S_\tau(f)$ yuqori yig‘indi ixtiyoriy quyi yig‘indidan kichik bo‘la olmaydi, demak, $\{S_\tau(f)\}_\tau$ to‘plam quyidan chegaralangan. Yana 4- xossaga ko‘ra har qanday $s_\tau(f)$ quyi yig‘indi ixtiyoriy yuqori yig‘indidan katta bo‘la olmaydi. Demak, $\{s_\tau(f)\}_\tau$ to‘plam yuqoridan chegaralangan. 5- xossa isbot qilindi.

Ma'lumki, bo‘sh bo‘lmagan har qanday yuqoridan (quyidan) chegaralangan sonli to‘plam aniq yuqori (aniq quyi) chegaraga ega bo‘ladi. Demak, 5- xossaga binoan

$$I^* = \inf_\tau \{S_\tau(f)\}_\tau \text{ ва } I_* = \sup_\tau \{s_\tau(f)\}_\tau$$

aniq chegaralar mavjud. Ular mos ravishda $f(x)$ funksiyadan $[a, b]$ segment bo‘yicha olingan *yuqori va quyi Darbu integrallari* deb ataladi va

$$I^* = \overline{\int_a^b} f(x)dx, \quad I_* = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

ko‘rinishda yoziladi.

Darbu lemmasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va chegaralangan bo'lsa, u holda $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ segmentning $h_\tau = \max_i \Delta x_i < \delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall\tau$ bo'linishi uchun

$$I_* - \varepsilon < s_\tau(f) \leq S_\tau(f) < I^* + \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Boshqacha aytganda,

$$\lim_{h_\tau \to 0} S_\tau(f) = I^*, \quad \lim_{h_\tau \to 0} s_\tau(f) = I_*$$

bo'ladi.

I s b o t i. Shart bo'yicha $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda chegaralanganligi sababli, aniq chegara prinsipiga binoan

$$m = \inf_{x\in[a,b]} b\, f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

aniq yuqori va aniq quyi chegaralar mavjud. Faraz qilaylik, $M = m$, ya'ni $f(x) = c = const$ bo'lsin. U holda ravshanki, $[a, b]$ kesmaning $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linishi uchun

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a),$$

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c(b-a)$$

bo'lib,

$$I^* = \inf_\tau \{S_\tau(f)\}_\tau = \inf_\tau \{c(b-a)\}_\tau = c(b-a)$$

va

$$I_* = \sup_\tau \{s_\tau(f)\}_\tau = \sup_\tau \{c(b-a)\}_\tau = c(b-a)$$

bo'ladi. Demak, bu holda $\forall\varepsilon > 0$ son uchun

$$I^* - \varepsilon < s_\tau(f) = S_\tau(f) < I^* + \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Boshqacha aytganda,

$$\lim_{h_\tau \to 0} s_\tau(f) = \lim_{h_\tau \to 0} S_\tau(f) = I^* = I_* = c(b-a).$$

Aytaylik, $M > m$ bo'lsin. $I^* = \inf_\tau \{S_\tau(f)\}_\tau$ bo'lganligi sababli, aniq quyi chegaraning ikkinchi ta'rifiga ko'ra, berilgan $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ kesmaning shunday τ^* bo'linishini ko'rsatish mumkinki,

$$S_{\tau^*}(f) - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi τ^* bo'linishning $[a, b]$ kesma ichida yotuvchi nuqtalari sonini p deb, $[a, b]$ kesmaning

$$h_\tau = \max_i \Delta x_i < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$$

shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy τ bo'linishini qaraymiz. τ bo'linishning nuqtalari ichiga τ^* bo'linishning nuqtalarini kiritib, yangi τ' bo'linishini hosil qilamiz. U holda 3- xossaga asosan $S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) \geq 0$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan, 3- xossaning eslatmasiga binoan

$$S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) \leq (M - m)ph_\tau.$$

Bu yerda, $h_\tau = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Shunday qilib,

$$0 \leq S_\tau(f) - S_{\tau'}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, τ' bo'linishni τ^* bo'linishning nuqtalari ichiga τ bo'linishning ichki nuqtalarini kiritishdan hosil bo'lgan bo'linish deb qarash mumkin. Shuning uchun yana Darbu yig'indilarining 3- xossasiga binoan

$$I^* \leq S_{\tau'}(f) \leq S_{\tau^*}(f).$$

Bundan

$$0 \le S_{\tau'}(f) - I^* \le S_{\tau^*}(f) - I^*$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, (1) tengsizlikka ko‘ra

$$0 \le S_{\tau'}(f) - I^* < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

bo‘ladi. (2) va (3) tengsizliklarni bir-biriga «qo‘shsak»,

$$0 \le S_\tau(f) - I^* < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad 0 \le S_\tau(f) < I^* + \varepsilon$$

bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash,

$$0 \le I_* - s_\tau(f) < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad I^* - \varepsilon < s_\tau(f)$$

ekanini ko‘rsatish mumkin (buni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz).

Shunday qilib, $s_\tau(f) \le S_\tau(f)$ ekanini e'tiborga olsak, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘ladiki, $[a, b]$ kesmaning $h_\tau = \max\limits_i \Delta x_i < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi $\forall \tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishi uchun

$$I_* - \varepsilon < s_\tau(f) \le S_\tau(f) < I^* + \varepsilon$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Darbu lemmasi isbot qilindi.

10- §. ANIQ INTEGRAL MAVJUDLIGINING ZARURIY VA YETARLI SHARTI

Biz avvalgi paragraflarda kesmada chegaralanmagan funksiyaning shu kesmada integrallanuvchi bo‘lmasligini hamda shu kesmada integrallanuvchi bo‘lgan funksiyaning shu kesmada chegaralangan bo‘lishini va kesmada chegaralangan funksiyaning shu kesmada har doim ham integrallanuvchi bo‘lavermasligini aytib o‘tgan edik. Endi kesmada chegaralangan funksiyaning shu kesmada integrallanuvchi bo‘lishi uchun qanday shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi haqida to‘xtalamiz.

10.1. Aniq integral mavjudligining zaruriy va yetarli sharti.

Teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. U holda:

$$\exists\int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow (A):\left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon > 0\, son\ uchun\ [a,b]\ kesmaning\ shunday \\ T = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}\, bo'linishi \\ topiladiki, \\ S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon\ bo'ladi.\end{array}\right\}$$

Isboti. 1) **Zarurligi.** Aytaylik, $I = \int_a^b f(x)dx$ mavjud bo'lsin. U holda aniq integralning ta'rifiga ko'ra, berilgan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $h_\tau = \max\limits_i \Delta x_i < \delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall\ \tau = \{a = = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b\}$ bo'linish uchun, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \ldots, n)$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan ravishda, ushbu $|\sigma_\tau(f;\xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik bajariladi. Agar bu bo'linishlarning birini T deb belgilasak,

$$|\sigma_T(f;\xi_i) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ yoki } I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_T(f;\xi_i) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'ladi. Darbu yig'indilarining birinchi xossasiga asosan

$$\inf_{\xi_i}\{\sigma_T(f;\xi_i)\} = s_T(f),\ \sup_{\xi_i}\{\sigma_T(f;\xi_i)\} = S_T(f).$$

Bundan tashqari, ma'lumki, $[a, b]$ kesmaning $\forall\tau$ bo'linishi va $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \ldots, n)$ nuqtalarning ixtiyoriy tanlanishi uchun $s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f;\ \xi_i) \le S_\tau(f)$. Xususan, $s_T(f) \le \sigma_T(f;\ \xi_i) \le S_T(f)$.

Demak,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < s_T(f) \le S_T(f) < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Bundan

$$S_T(f) - s_T(f) < I + \frac{\varepsilon}{3} - \left(I - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Bu esa (A) shartning o'rinli bo'lishini bildiradi.

2) **Yetarliligi.** Endi (A) shartdan $\exists\int_a^b f(x)dx$ ekanini keltirib chiqaramiz. Ma'lumki, $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy tayin T bo'linishi uchun

$$s_T(f) \le I_* = \sup_\tau \{s_\tau(f)\}_\tau \le I^* = \inf_\tau \{S_\tau(f)_\tau\} \le S_T(f).$$

Shu sababli, $0 \le I^* - I_* \le S_T(f) - s_T(f)$.

Demak, (A) shartga ko'ra $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ ekanini e'tiborga olsak, $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$. Bu yerda ε son ixtiyoriy musbat son deb qaralayotganligi sababli, $0 < I^* - I_* < \varepsilon$ bo'lishi mumkin emas. Demak, faqat $0 = I^* - I_* < \varepsilon$ bo'ladi. Shunday qilib, $I_* = I^*$. Ularning umumiy qiymatini I deb belgilaylik: $I^* = I_* = I$.

Qaralayotgan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan bo'lganligi sababli, Darbu lemmasiga binoan $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sonni ko'rsatish mumkinki, $h_\tau = \max_i \Delta x_i < \delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linish uchun

$$I_* - \varepsilon < s_\tau(f) \le S_\tau(f) < I^* + \varepsilon$$

bo'ladi. Bizning holimizda $I_* = I^* = I$ ekanini e'tiborga olsak,

$$I - \varepsilon < s_\tau(f) \le S_\tau(f) < I + \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan tashqari, ma'lumki, $[a, b]$ kesmaning $\forall\tau$ bo'linishi uchun $s_\tau(f) \le \sigma_\tau(f; \xi_i) \le S_\tau(f)$ bo'ladi. Demak,

$$I - \varepsilon < \sigma_\tau(f; \xi_i) < I + \varepsilon \text{ yoki } |\sigma_\tau(f; \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Bu esa aniq integralning ta'rifiga ko'ra

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

integralning mavjudligini bildiradi.

Teorema isbot qilindi.

Eslatma. Yuqoridagi teoremaning (A) jumlasidagi $S_T(f) - s_T(f) < \varepsilon$ tengsizlikni

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\omega_i(f)=M_i-m_i$ ($\omega_i(f)$ son $f(x)$ funksiyaning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi *tebranishi* deb ataladi),

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

Haqiqatan, (A) jumlaga va Darbu yig‘indilarining ta'riflariga ko‘ra

$$\varepsilon>S_T(f)-s_T(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i.$$

Shunday qilib, yuqorida isbot qilingan teoremani quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$\exists\int_a^b f(x)dx\Leftrightarrow(A'):\left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\,\textit{son uchun }[a,b]\textit{ kesmaning shunday}\\ T=\{a=x_0<\ldots<x_n=b\}\textit{bo' linishi}\\ \textit{topiladiki,}\\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon\textit{ bo' ladi}\end{array}\right\}$$

Amaliyotda ko‘pincha ana shu (A') shartdan foydalaniladi.

10.2. Integrallanuvchi funksiyalarning sinflari. Endi kesmada integrallanuvchi bo‘lgan funksiyalarning ba'zi bir sinflarini qaraymiz. Aniqrog‘i, kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar, kesmada monoton bo‘lgan funksiyalar va kesmada bo‘lakli-uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning shu kesmada integrallanuvchi ekanini isbot qilamiz.

1- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.*

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. U holda, birinchidan, Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko‘ra bu funksiya shu kesmada chegaralangan bo‘ladi.

Ikkinchidan, Kantor teoremasiga binoan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi, ya'ni $\forall\varepsilon > 0$ son berilganda ham faqat ε ga bog'liq bo'lgan shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $|x'' - x'| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan $\forall x', x'' \in [a, b]$ nuqtalar uchun

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (*)$$

tengsizlik bajariladi.

Faraz qilaylik, $\tau = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ bo'linish $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy bo'linishi bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun bu funksiya $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy $[x_{i-1}, x_i]$ qismida uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga binoan shunday u_i, $v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtalar topiladiki,

$$f(u_i) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad f(v_i) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

bo'ladi. Ravshanki, agar $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i < \delta$ desak, albatta $v_i - u_i < \delta$ bo'ladi. Demak, $(*)$ tengsizlikka ko'ra

$$\omega_i(f) = f(v_i) - f(u_i) = |f(v_i) - f(u_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi. Bu yerda $\omega_i(f)$ son $f(x)$ funksiyaning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi tebranishini ifodalaydi.

Shunday qilib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ kesmaning shunday $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linishini ko'rsatish mumkinki,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa (A') shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va monoton bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.*

Isboti. Aniqlik uchun, «$f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan bo'lsin» deylik, ya'ni $x_{i-1} < x_i$ bo'lganda har doim

$f(x_{i-1}) \le f(x_i)$ tengsizlik bajarilsin. U holda, birinchidan, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo‘ladi. Haqiqatan, $\forall x \in [a, b]$ nuqtada $f(a) \le f(x) \le f(b)$ tengsizliklar bajariladi. Ikkinchidan, ravshanki, $[a, b]$ kesmaning $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishi uchun

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1}),\ M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_i)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, bu holda $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham $[a, b]$ kesmaning $h_1 = \max_i \Delta x_i < \delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishini ko‘rsatish mumkinki,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le$$

$$\le \max_i \Delta x_i \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

bo‘ladi. Bu esa (A′) shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

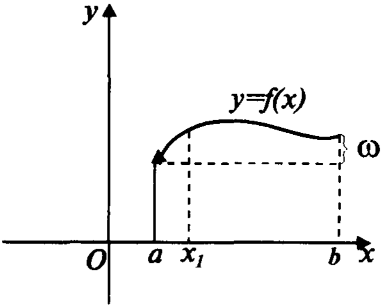
3- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada bo‘lakli-uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.*

Isboti. Ma'lumki, agar $[a, b]$ kesmaning shunday $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishi mavjud bo‘lib, $f(x)$ funksiya har bir (x_{i-1}, x_i) oraliqda uzluksiz va ushbu

$$f(x_{i-1} + 0) = \lim_{x\to x_{i-1}+0} f(x),\ f(x_i - 0) = \lim_{x\to x_i - 0} f(x)\ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bir tomonli chekli limitlar mavjud bo‘lsa, bu holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada bo‘lakli-uzluksiz deb aytilar edi. Ko‘rinib turibdiki, bunday funksiyalar $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo‘lib, unda faqat yo‘qotiladigan va birinchi turdagi uzilish nuqtalarigagina ega bo‘lishlari mumkin.

Qulaylik uchun, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada bitta yo‘qotiladigan yoki birinchi turdagi $x_0 = a$ uzilish nuqtasiga ega bo‘lsin deylik (95-



95- rasm.

rasm). Endi $x_1 \in (a, b)$ nuqtani shunday tanlab olamizki, oldindan berilgan $\forall\varepsilon > 0$ son uchun ushbu $x_1 - a < \frac{\varepsilon}{2\omega}$ tengsizlik bajarilsin. Bu yerda ω bilan $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi tebranishi belgilangan. Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[x_1, b]$ kesmada uzluksiz. Shuning uchun $f(x)$ funksiya, yuqorida isbot qilingan 1- teoremaga binoan, $[x_1, b]$ kesmada integrallanuvchi. Boshqacha aytganda, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $[x_1, b]$ kesmaning shunday $T = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ bo'linishi topiladiki, $\sum_{i=2}^{n} \omega_i' \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Shunday qilib, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ kesmaning shunday $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ bo'linishini ko'rsatish mumkinki,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i' \Delta x_i = \omega_1 (x_1 - a) + \sum_{i=2}^{n} \omega_i' \Delta x_i < \omega \frac{\varepsilon}{2\omega} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa (A′) shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi. Teorema isbot qilindi.

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Aniq nitegral tushunchasiga olib keluvchi ba'zi masalalarni aytib bering.
2. Integral yig'indi yordamida aniq integral tushunchasini ta'riflang.
3. Segmentda chegaralanmagan funksiya shu segmentda integrallanuvchi bo'ladimi? Isbotlang.
4. Segmentda integrallanuvchi funksiya shu segmengda chegaralangan bo'ladimi?
5. Segmentda chegaralangan funksiya shu segmentda integrallanuvchi bo'ladimi?
6. Qanday yig'indilar Darbu yig'indilari deb ataladi? Ular qanday asosiy xossalarga ega?
7. Darbu integrallari deb nimaga aytiladi?
8. Darbu lemmasini isbotlang.

9. Aniq integral mavjudligining zaruriy va yetarli sharti nima?
10. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi-mi?
11. Kesmada monoton bo'lgan funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladimi?
12. Kesmada bo'lakli-uzuluksiz bo'lgan funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladimi?

11- §. ANIQ INTEGRALNING ASOSIY XOSSALARI

Ushbu paragrafda aniq integralning ham nazariy, ham amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega bo'lgan xossalari bilan tanishib chiqamiz.

1- xossa. $\int_a^b dx = b - a.$

I s b o t i. Ko'rinib turibdiki, bu yerda integral ostidagi funksiya aynan 1 ga teng. Shuning uchun aniq integralning ta'rifiga binoan

$$\int_a^b dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim_{h_\tau \to 0} (b-a) = b - a.$$

2- xossa. Berilgan $f(x)$ funksiyadan uzunligi 0 ga teng bo'lgan «kesma» bo'yicha olingan integralni 0 ga teng deb qabul qilamiz:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Ta'rif sifatida qabul qilingan bu xossani quyidagicha asoslaymiz. $\{a, a]$ «kesma» bo'linishining barcha qism «kesma»lari nuqtalardan iborat bo'lib, ularning Δx_i uzunliklari 0 ga teng bo'ladi. Shuning uchun bu holda barcha $\sigma_\tau(f; \xi_i)$ «integral yig'indilar» ham 0 ga teng bo'ladi va, demak, «integral» ham 0 ga teng bo'ladi.

3- xossa. Agar $\int_a^b f(x)dx$ $(a < b)$ integral mavjud bo'lsa, u holda $\int_b^a f(x)dx$ integral mavjud, shu bilan birga

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

I s b o t i. Bu xossani ham ta'rif sifatida qabul qilamiz. Uni quyidagicha asoslaymiz:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i) =$$

$$= -\lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerda $[a, b]$ kesmaning $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishining $[x_{i-1}, x_i]$ kesmalarini uzunliklari Ox o‘qning «manfiy yo‘nalishi bo‘yicha o‘lchanadi» va shuning uchun ularning «uzunlik»lari manfiy bo‘ladi. Bundan $\int_b^a f(x)dx$ integralning barcha «integral yig‘indi» lari $\int_a^b f(x)dx$ integralning mos integral yig‘indilaridan faqat ishorasi bilan farq qilishi kelib chiqadi.

4- xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $Cf(x)(C = \text{const})$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ funksiyalar shu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Shu bilan birga

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

I s b o t i. Dastavval $Cf(x)$ $(C = \text{const})$ funksiyaning integrallanuvchi ekanini ko‘rsatamiz:

$$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} C f(\xi_i)\Delta x_i = C \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b Cf(x)dx,$$

ya'ni $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$

Shart bo'yicha bu tenglikning o'ng tomonidagi integral mavjud va C o'zgarmas son bo'lgani uchun uning chap tomonidagi integral ham mavjud.

Yana ta'rif bo'yicha va shartga ko'ra

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i =$$

$$= \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

ya'ni

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Shart bo'yicha bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallar mavjud bo'lgani uchun uning chap tomonidagi integral ham mavjud.

Nihoyat, $f(x)g(x)$ ko'paytmaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini isbot qilamiz. Shart bo'yicha $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgani sababli, ular shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday $C_1 > 0$ va $C_2 > 0$ o'zgarmas sonlar topiladiki, $\forall x \in [a, b]$ uchun $|f(x)| < C_1$ va $|g(x)| < C_2$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo'linish $[a, b]$ kesmaning biror bo'linishi bo'lsin. Ushbu $f(x'')g(x'') - f(x')g(x')$ ayirmani $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi tebranishlari orqali yuqoridan baholaymiz:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = f(x'')g(x'') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') -$$

$$-f(x')g(x') = (f(x'') - f(x'))g(x'') +$$

$$+ (g(x'')- g(x'))f(x') \le C_2\omega_i(f) + C_1\omega_i(g).$$

Bunda x', $x''\in[x_{i-1}, x_i]$ bo'lib, $\omega_i(f)$, $\omega_i(g)$ lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $[x_{i-1}, x_i]$ kesmadagi tebranishlarini bildiradi. Demak, $\omega_i(fg) \le C_2\omega_i(f) + C_1\omega_i(g)$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)\Delta x_i \le C_2\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i + C_1\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i <$$
$$< C_2\frac{\varepsilon}{2C_2} + C_1\frac{\varepsilon}{2C_1} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)g(x)$ ko'paytma uchun $[a, b]$ kesmada (A') shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)g(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi. 4- xossa isbot qilindi.

5- xossa. Agar $a < c < b$ bo'lib, $f(x)$ funksiya $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarda integrallanuvi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. Shu bilan birga

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarning shunday τ_1 va τ_2 bo'linishlari topiladiki, $S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ va $S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\tau_1\cup\tau_2 = \tau$ desak, $[a, b]$ kesmaning τ bo'linishi hosil bo'ladi. Ravshanki, u vaqtda

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{\tau=\tau_1\cup\tau_2}\omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{\tau_1}\omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{\tau_2}\omega_i(f)\Delta x_i =$$
$$= \left(S_{\tau_1} - s_{\tau_1}\right) + \left(S_{\tau_2} - s_{\tau_2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada (A) shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi.

Xossaning ikkinchi qismi quyidagicha isbot qilinadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{\tau=\tau_1 \cup \tau_2} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{h_\tau \to 0}\left(\sum_{\tau_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{\tau_2} f(\xi_i)\Delta x_i \right) =$$

$$= \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{\tau_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{h_2 \to 0} \sum_{\tau_2} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5- xossa to‘la isbot qilindi.

6- xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya $\forall [c,d] \subset [a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi.

I s b o t i. Shart bo‘yicha $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ kesmaning shunday $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishi topiladiki, $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Aytaylik, $[c, d]$ kesma $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy qismi bo‘lsin. U vaqtda τ bo‘linishning nuqtalari orasiga yangi c va d nuqtalarni kiritib, $[a, b]$ kesmaning yangi

$$\tau' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < c < x_{k+1} < \ldots$$
$$\ldots < x_m < d < x_{m+1} < \ldots < x_n = b\}$$

bo‘linishni hosil qilamiz. Agar τ' bo‘linishning $[c, d]$ kesmaga tegishli bo‘lgan nuqtalaridan tashkil topgan qismini $[c, d]$ kesmaning $\tau_1 = \{c < x_{k+1} < x_{k+2} < \ldots < x_m < d\}$ bo‘linishi deb qarasak: $S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) \le S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f)$ bo‘ladi. Haqiqatan,

$$S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) = \sum_{\tau_1} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{\tau'} \omega'_i \Delta x_i = S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f).$$

$\tau \prec \tau'$ bo‘lganligi sababli, Darbu yig‘indilarining 3- xossasiga binoan $s_\tau(f) \le s_{\tau'}(f)$ va $S_\tau(f) \ge S_{\tau'}(f)$ bo‘ladi. Demak, $S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) \le S_\tau(f) - s_\tau(f)$. Ma'lumki, $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $[c, d]$ kesmaning shunday τ_1 bo‘linishi mavjudki, $S_{\tau_1}(f) - s_{\tau_1}(f) < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu esa $[c, d]$ kesmada $f(x)$ uchun (A) shartning bajarilishini, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $[c, d]$ kesmada integrallanishini bildiradi. 6- xossa isbot qilindi.

Quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz:

7- xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lib, $[a, b]$ kesmada aniqlangan $g(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyadan faqat $[a, b]$ kesmaning chekli sondagi nuqtalaridagi qiymatlari bilangina farq qilsa, u holda $g(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Shu bilan birga

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

8- xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lib, $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo‘ladi.

I s b o t i. Shart bo‘yicha

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

chekli limit mavjud. $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) \geq 0$ bo‘lgani sababli, $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ nuqtada $f(\xi_i) \geq 0$ bo‘ladi. $\Delta x_i > 0$ ekanini e'tiborga olsak, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$ bo‘ladi. Demak, tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga binoan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h_\tau \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. 8- xossa isbot qilindi.

Bu xossadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lib, $\forall x \in [a, b]$ nuqtada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

I s b o t i. $h(x) = g(x) - f(x)$ deb belgilasak, shartga ko'ra $\forall x \in [a, b]$ nuqtada $h(x) \geq 0$ bo'ladi.

Ma'lumki, ikkita integrallanuvchi funksiyaning $h(x) = g(x) - f(x)$ ayirmasi ham integrallanuvchi bo'ladi. Demak, 8- xossaga asosan

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx.$$

Bundan $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ tengsizlik kelib chiqadi.

Natija isbot qilindi.

9- xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. Shu bilan birga

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

I s b o t i. Avval $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishidan $|f(x)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishini keltirib chiqaramiz. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgani uchun bu funksiya shu kesmada chegaralangan bo'ladi. Ya'ni shunday m va M haqiqiy sonlar topiladiki, $\forall x \in [a, b]$ nuqtada $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklar bajariladi. Agar $A = \max(|m|, |M|)$ desak, ravshanki, $\forall x \in [a, b]$ nuqtada $0 \leq |f(x)| \leq A$ bo'ladi. Bu esa $|f(x)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada chegaralanganligini bildiradi. Bundan tashqari, $\forall u, v \in [a, b]$ nuqtalarda $|f(u) - f(v)| \geq ||f(u)| - |f(v)||$ tengsizlik bajariladi. Haqiqatan, $f(u) = f(u) + f(v) - f(v)$ desak, $|f(u)| \leq |f(u) - f(v)| + |f(v)|$ yoki $|f(u) - f(v)| \geq |f(u)| - |f(v)|$ bo'ladi. Shunga o'xshash, $f(v) = f(v) - f(u) + f(u)$ desak, $|f(v)| \leq |f(v) - f(u)| + |f(u)|$ yoki $|f(v) - f(u)| \geq |f(v)| - |f(u)|$ bo'ladi.

Agar $|f(v) - f(u)| = |f(u) - f(v)|$ ekanini e'tiborga olsak, $|f(u) - f(v)| \geq -(|f(u)| - |f(v)|)$ bo‘ladi. Shunday qilib, $|f(u) - f(v)| \geq ||f(u)| - |f(v)||$ bo‘lar ekan. Demak, $[a, b]$ kesmaning $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ bo‘linishi uchun $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$ bo‘lib,

$$0 \leq S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(|f|)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i =$$
$$= S_\tau(f) - s_\tau(f)$$

bo‘ladi. Shart bo‘yicha $\lim\limits_{h_\tau \to 0}(S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0$ bo‘lgani uchun, tengsizliklarda limitga o‘tish qoidasiga ko‘ra,

$$\lim_{h_\tau \to 0}(S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|)) = 0$$

bo‘ladi. Bu esa $|f(x)|$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada (A) shartning bajarilishini, ya'ni $|f(x)|$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi ekanini bildiradi.

Endi 9- xossaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Aytaylik, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ bo‘lsin. U holda

$$|\sigma_\tau(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma_\tau(|f|)$$

bo‘ladi. Bu yerda $h_\tau = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{h_\tau \to 0}|\sigma_\tau(f)| \leq \lim_{h_\tau \to 0}\sigma_\tau(|f|)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{h_\tau \to 0}|\sigma_\tau(f)| = \left|\lim_{h_\tau \to 0}\sigma_\tau(f)\right| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|, \quad \lim_{h_\tau \to 0}\sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ekanini nazarda tutsak,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

tengsizlik hosil bo'ladi. 9- xossa isbot qilindi.

12- §. ANIQ INTEGRAL UCHUN O'RTA QIYMAT HAQIDAGI TEOREMALAR

1- teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a,\ b]$ *segmentda integrallanuvchi bo'lib,* $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ва $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *bo'lsa, u holda shunday* $\mu\in[m,\ M]$ *son topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Xususan, agar $f(x)$ *funksiya* $[a,\ b]$ *segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda shunday* $\xi\in[a,\ b]$ *nuqta topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *o'rta qiymatning birinchi formulasi* deb ataladi.

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lsin. U holda, ma'lumki, bu funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi. Demak, aniq chegara prinsipiga ko'ra $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ва $M = \sup\limits_{x\subset[a,b]} f(x)$ aniq chegaralar mavjud bo'lib, $\forall x\in\ [a,\ b]$ nuqtada $m \le f(x) \le M$ tengsizliklar bajariladi. Aniq integralning 8- xossasidan kelib chiqqan natijaga binoan

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$

yoki

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

bo‘ladi. Bunda $b - a \neq 0$ ekanini e'tiborga olsak,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

tengsizliklar hosil bo‘ladi. Nihoyat, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ deb belgilasak, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ bo‘ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. U holda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra bu funksiya $[a, b]$ segmentda o‘zining aniq quyi va aniq yuqori chegaralariga erishadi. Ya'ni shunday u, $v\in[a, b]$ nuqtalar topiladiki, $f(u) = \text{m}$ va $f(v) = M$ bo‘ladi. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ cegmentda uzluksiz hamda

$$f(u) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(v)$$

bo‘lganligi sababli, Koshining oraliq qiymat haqidagi teoremasiga binoan shunday $\xi\in [a, b]$ nuqta topiladiki,

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

bo‘ladi. Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

formula hosil bo‘ladi. Teorema isbot qilindi.

2- teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lib,* $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ ва $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ *bo'lsa, hamda $g(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda $g(x) \geq 0$ (yoki $g(x) \leq 0$) shartni qanoatlantirsa, u holda shunday $\mu \in [m, M]$ son topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi. Xususan, agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *o'rta qiymat birinchi formulasining umumlashgan shakli* deyiladi. Agar bu yerda $g(x) = 1$ $(a \leq x \leq b)$ desak, o'rta qiymatning birinchi formulasi hosil bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi va $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, shu bilan birga $g(x) \geq 0$ $(a \leq x \leq b)$ bo'lsin. U holda $m \leq f(x) \leq M$ tengsizliklarni $g(x)$ ga ko'paytirsak, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ bo'ladi. Bu yerdan

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx \tag{1}$$

tengsizliklar hosil bo'ladi.

Aytaylik, $\int_a^b g(x)dx > 0$ bo'lsin. U holda (1) tengsizliklardan

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Bu yerda

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$$

belgilashni kiritsak, ushbu

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad (m \le \mu \le M)$$

formula hosil bo‘ladi.

Aytaylik, $\int_a^b g(x)dx = 0$ bo‘lsin. U holda (1) tengsizliklardan

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

degan xulosaga kelamiz. Ko‘rinib turibdiki, mazkur holda μ son sifatida ixtiyoriy haqiqiy sonni olishimiz mumkin:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Shunday qilib, biz $g(x) \ge 0$ $(a \le x \le b)$ bo‘lgan holatda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad (m \le \mu \le M)$$

formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatdik. Bu formulaning $g(x) \le 0$ $(a \le x \le b)$ bo‘lgan holda ham to‘g‘riligini xuddi yuqoridagi kabi isbot qilish mumkin.

Xususan, agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsa, u holda $\mu \in [m, M]$ son har qanday bo‘lganda ham shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladiki, $f(\xi) = \mu$ bo‘ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad (a \le \xi \le b)$$

formula o'rinli bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Shuni aytishimiz lozimki, umuman aytganda, agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lmasa, bu holda o'rta qiymat birinchi formulasining umumlashgan shakli o'rinli bo'lmaydi. Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1), \\ 2 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

va

$$g(x) = \begin{cases} 2 & (0 \le x \le 1), \\ 1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$$

funksiyalar berilgan bo'lsin.

Bu holda

$$\mu = \frac{\int_0^2 f(x)g(x)dx}{\int_0^2 g(x)dx} = \frac{\int_0^1 2dx + \int_1^2 2dx}{\int_0^1 2dx + \int_1^2 dx} = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

bo'lib, $[0;2]$ segmentda $f(\xi) = \frac{4}{3}$ shartni qanoatlantiradigan ξ nuqtani topish mumkin emas (mavjud emas!).

Nihoyat, *o'rta qiymatning ikkinchi formulasi* yoki fransuz matematigi Bonne (1819—1892) nomi bilan *Bonne formulasi* deb ataladigan formulani isbotsiz keltiramiz.

3- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi, $g(x)$ funksiya esa shu segmentda monoton bo'lsa, u holda shunday $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *o'rta qiymatning ikkinchi formulasi* deyiladi.

Bu teoremaning isbotini [5] ning 353–354- betlaridan qarash mumkin.

13- §. NYUTON-LEYBNITS FORMULASI. INTEGRALLASHNING ASOSIY METODLARI

13.1. Nyuton-Leybnits formulasi. Biz endi aniq integralni hisoblashda keng qo'llaniladigan (fanda *integral hisobning asosiy formulasi* deb yuritiladigan) *Nyuton-Leybnits formulasi* bilan tanishamiz.

Dastavval «yuqori chegarasi o'zgaradigan integral» tushunchasini keltiramiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $\forall\, [x', x''] \subset \subset (a, b)$ segmentda integrallanuvchi bo'lib, $c \in (a, b)$ nuqta ixtiyoriy tayin nuqta bo'lsin. Bu holda ravshanki, $\forall x \in (a,b)$ qiymatda ushbu $\int_c^x f(t)dt$ aniq integral mavjud bo'ladi. Bu integral *yuqori chegarasi o'zgaradian* (x — o'zgaruvchi) *integral* deyiladi. Bunday integral o'z yuqori chegarasining funksiyasidan iborat:

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad (a < c < x < b).$$

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, $F(x)$ funksiya uning $[a, b]$ kesmadagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *integral hisobning asosiy formulasi yoki Nyuton-Leybnits formulasi* deb ataladi.

I s b o t i. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Ma'lumki, bu holda $\int_a^b f(x)dx$ integral mavjud bo'ladi. Endi ushbu $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ funksiyaning $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada boshlang'ich funksiya ekanini ko'rsatamiz:

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$f(t)$ funksiya $[x, x+\Delta x]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi sababli, o'rta qiymatning birinchi formulasiga ko'ra

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(x+\theta\,\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

bo'ladi, Demak,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\,\Delta x).$$

Yana $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada uzluksizligini e'tiborga olsak, $\forall x\in[a, b]$ uchun

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\,\Delta x)=f\left(\lim_{\Delta x\to 0}(x+\theta\,\Delta x)\right)=f(x)$$

bo'ladi. Bu esa $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ funksiyaning $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada boshlang'ich funksiya ekanini bildiradi.

Ma'lumki, agar $f(x)$ funksiya biror $[a, b]$ kesmada boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lib, ular bir-biridan o'zgarmas qo'shiluvchigagina farq qiladi. Shuning uchun $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi ixtiyoriy $F(x)$ boshlang'ich funksiyasini

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Bundan

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C, \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C = C.$$

Demak,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Bu yerda aniq integralning qiymati integrallash o'zgaruvchisining qaysi harf bilan belgilanishiga bog'liq emasligini e'tiborga olsak,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula hosil bo'ladi. Teorema isbot qilindi.

Amaliyotda Nyuton-Leybnits formulasi quyidagi shaklda qo'llaniladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1- misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integral hisoblansin.

Y e c h i s h. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ funksiya [0; 1] kesmada uzluksiz bo'lib, uning [0; 1] kesmadagi boshlang'ich funksiyalaridan biri $F(x) = \operatorname{arctg} x$ bo'lgani sababli, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

bo'ladi.

2- misol. Ushbu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ integral hisoblansin.

Y e c h i s h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

13.2. Integrallashning asosiy metodlari va formulalari. Aniq integrallarni hisoblashda asosan ikkita metod qo'llaniladi. Ulardan biriga o'zgaruvchini almashtirish metodi, ikkinchisiga esa *bo'laklab integrallash metodi* deyiladi.

O'zgaruvchini almashtirish metodi. Bu metod quyidagi teoremaga asoslanadi:

2- teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $[a, b]$ segment biror $[\alpha, \beta]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi $x = g(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami, shu bilan birga $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi* deyiladi.

I s b o t i. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. U holda, ma'lumki, ushbu $\int_a^b f(x)dx$ integral mavjud. Bundan tashqari, yuqorida isbot qilganimizga ko'ra $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ segmentda $F(x)$ boshlang'ich funksiya mavjud va

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

formula o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan, boshlang'ich funksiyaning ta'rifiga asosan $F(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda differensiallanuvchi bo'lib, $\forall x \in [a,\ b]$ uchun $F'(x) = f(x)$ tenglik bajariladi. Shartga ko'ra $x = g(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentda aniqlangan va unda uzluksiz differensiallanuvchi, shu bilan birga $[a,\ b] = \{x : x = g(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]\}$. Demak, murakkab funksiyani differensiallash haqidagi teoremaga ko'ra $F(g(t))$ murakkab funksiya $[\alpha, \beta\,]$ segmentda differensiallanuvchi bo'lib, ushbu

$$\frac{d}{dt}(F(g(t)) = F'(g(t))g'(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\forall t \in [\alpha, \beta]$ uchun $F'(g(t)) = f(g(t))$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\frac{d}{dt}(F(g(t)) = f(g(t))g'(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

bo'ladi. Bu tenglik $F(g(t))$ funksiyaning $[\alpha,\beta]$ segmentda $f(g(t))g'(t)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishini bildiradi. Demak, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ bo'lgani sababli, bu yerdan quyidagini hosil qilamiz:

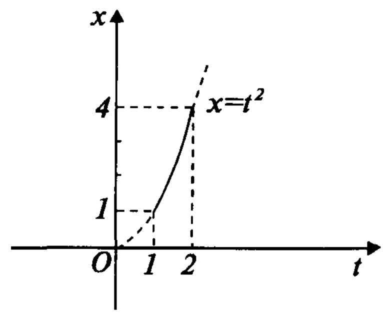
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Nihoyat, (1) va (2) tengliklarning o'ng tomonlari bir-biriga aynan teng bo'lgani uchun ularning chap tomonlari ham bir-biriga teng bo'ladi:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt.$$

Teorema isbot qilindi.

3- misol. Ushbu integral hisoblansin: $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$



96- rasm.

Y e c h i s h. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ funksiya [1; 4] kesmada uzluksiz bo'lib, [1; 4] segment [1; 2] kesmada aniqlangan va unda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgan $x=t^2$ funksiyaning qiymatlari to'plami, shu bilan birga $1^2=1$ va $2^2=4$ bo'lgani sababli (96- rasm), 2-teoremaga asosan

$$\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\limits_1^2 \frac{t}{1+t^2}2tdt=2\int\limits_1^2 \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\int\limits_1^2 \frac{t^2}{1+t^2}dt=\int\limits_1^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=t\Big|_1^2-\operatorname{arctg}t\Big|_1^2=$$

$$=2-1+\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}2=1+\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}2.$$

Demak,

$$\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=2+\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}2.$$

Bo'laklab integrallash metodi. Bu metod quyidagi teoremaga asoslanadi:

3- teorema. *Agar $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $u(x)v'(x)$ va $v(x)u'(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda integrallanuvchi bo'ladi, shu bilan birga*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formula *aniq integralda bo'laklab integrallash formulasi* deb ataladi va odatda (esda saqlash qulay bo'lsin uchun)

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

ko'rinishda yoziladi.

Isboti. Shart bo'yicha $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda differensiallanuvchi bo'lgani sababli, $u(x)v(x)$ ko'paytma funksiya ham shu segmentda differensiallanuvchi, shu bilan birga $\forall x \in [a, b]$ uchun

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + \mathrm{u}(x)v'(x).$$

Demak, shartga ko'ra u va v lar [a, b] da uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgani sababli, bundan

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

yoki

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Bu yerda

$$u(x) = u,\ v(x) = v,\ v'(x)dx = dv,\ u'(x)dx = \mathrm{d}u$$

ekanini nazarda tutsak,

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

formula hosil bo‘ladi. Oxirgi formulani esda saqlash qulay bo‘lib, unda integrallash o‘zgaruvchisi u va v funksiyalarning argumentidan iborat. Teorema isbot qilindi.

4- misol. Ushbu integral hisoblansin: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Y e c h i s h. $u = x, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ deb olamiz. U holda $du = dx$, $v = \text{tg}x$ bo‘lgani sababli, bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} = x\,\text{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\,x\,dx = \frac{\pi}{4}\text{tg}\frac{\pi}{4} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0 = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

bo‘ladi.

5- misol. Ushbu $\int_0^1 \arcsin x dx$ integral hisoblansin.

Y e c h i s h. $u = \arcsin x$, $dv = dx$ deb olamiz. U holda $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$ bo‘ladi. Demak, bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin 1 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

O'ZINI-O'ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Aniq integralning tenglik belgisi bilan bog'liq xossalarini isbotlang.
2. Aniq integralning tengsizlik belgisi bilan bog'liq xossalarini isbotlang.
3. O'rta qiymatning birinchi formulasi nima? U qanday hosil qilinadi?
4. O'rta qiymat birinchi formulasining umumlashgan shaklini keltirib chiqaring.
5. O'rta qiymatning ikkinchi formulasi nima?
6. Nyuton-Leybnits formulasi (yoki integral hisobning asosiy formulasi) deb nimaga aytiladi? Bu formulani keltirib chiqaring.
7. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish metodi qanday teoremaga asoslanadi? Bu teoremani isbotlang.
8. Aniq integralda bo'laklab integrallash metodi qanday teoremaga asoslanadi? Bu teoremani isbotlang.

14- §. XOSMAS INTEGRALLAR

Biz bu paragrafda Riman aniq Integralining cheksiz oraliqlar va chegaralanmagan funksiyalar uchun umumlashmalarini o'rganamiz. Bu umumlashmalar **xosmas integrallar** deb ataladi.Ular matematik analiz va uning turli tatbiqlarida keng qo'llaniladi.

14.1. Birinchi tip xosmas integrallar. Agar $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$oraliqda aniqlangan va har qanday $[a,b]$ $(b > a)$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

ifoda $f(x)$ funksiyadan $[a;+\infty)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral yoki *birinchi tip xosmas integral* deyiladi.

Agar (1) chekli limit mavjud bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral **yaqinlashuvchi,** $f(x)$ esa $[a;+\infty)$ oraliqda xosmas ma'noda **integrallanuvchi** deyiladi. Agar (1) chekli limit mavjud bo'lmasa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Xuddi shunga oxshash, Riman aniq integralini $(-\infty, b]$ va $(-\infty, +\infty)$ cheksiz oraliqlar uchun ham umumlashtirish mumkin:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{3}$$

Bu integrallar ham **birinchi tip xosmas integrallar** deb ataladi.

1-teorema. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty)$ oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) \tag{4}$$

bo‘ladi. Bu yerda $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Isboti. (1) formula va teorema shartiga ko‘ra

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) =$$

$$= F(+\infty) - F(a).$$

Xuddi shu kabi

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty),\ F(-\infty) = \lim_{a\to-\infty} F(a). \tag{5}$$

1- misol. $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ $(a > 0)$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Echish. Bu integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi s ga bog‘liq. Aytaylik, $s \neq 1$ bo‘lsin. U holda, (4) formulaga binoan

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_a^{+\infty}=\frac{1}{1-s}\left(\lim_{b\to+\infty}b^{1-s}-a^{1-s}\right)=\begin{cases}+\infty\,(s<1),\\ \dfrac{1}{(s-1)a^{s-1}}(s>1).\end{cases}$$

Endi s=1 deylik. U holda, yana (4) formulaga ko'ra

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_a^{+\infty}=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\ln a=+\infty\ (a>0).$$

Demak, $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ $(a > 0)$ xosmas integral s>1 bo'lganda yaqinlashadi, $s\leq 1$ bo'lganda esa uzoqlashadi.

2- misol. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblang.

Y e c h i s h. (3),(4) va (5) formulalarga ko'ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{-\infty}^{0}+arctgx\Big|_0^{+\infty}=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Koshi kriteriaysi. $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarli: $\forall\varepsilon$ musbat son uchun shunday $b=b(\varepsilon)(b\geq a)$ son topiladiki, b dan katta bo'lgan $\forall$ A va B sonlar uchun $\left|\int_A^B f(x)dx\right|<\varepsilon$ bo'ladi.

Buning isboti bevosita (1) ifoda va funksiya limiti mavjudligining Koshi kriteriyasidan (81- betga qarang) kelib chiqadi.

Xosmas integralni aniq hisoblash har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Mumkin bo'lgani bilan, uning qiymati ahamiyatsiz bo'lgan hollar ko'plab uchraydi. Shuning uchun, bunday hollarda faqat xosmas integralning yaqilashishi yoki uzoqlashishini aniqlash kifoya. Bu esa taqqoslash alomatlari orqali amalga oshiriladi.

1- taqqoslash alomati. Agar $[a;+\infty)$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar shu oraliqda $0 \leq f(x) \leq g(x)$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx - yaqinlashuvchi \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx - yaqinlashuvchi, \qquad (6)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx - uzoqlashuvchi \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx - uzoqlashuvchi \qquad (7)$$

bo'ladi. Bundan tashqari, (6) holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$ bo'ladi.

Bu teoremaning isboti Koshi kriteriyasi va teorema shartlaridan bevosita kelib chiqadi.

3- misol. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Y e c h i s h. Birinchidan, $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2} (x \geq 1)$;

I k k i n c h i d a n, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$. Demak, 1- taqqoslash alomatining (6) xulosasiga ko'ra, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, shu bilan birga uning qiymati 1 dan kichik .

4- misol. $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Y e c h i s h . Birinchidan, $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{1}{\sqrt{x}} (x \geq 1)$;

ikkinchidan, $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ xosmas integral (1-misolga qarang) uzoqlashadi. Demak, 1-taqqoslash alomatinig (7) xulosasiga asosan, berilgan xosmas integral uzoqlashadi.

Absolut va shartli yaqinlashish. Agar $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashsa, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral **absolut yaqinlashuvchi** deyiladi. Agar $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ xosmas integral uzoqlashsa, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral **shartli yaqinlashuvchi** deyiladi.

Quyidagini isbotlash mumkin:

2- teorema. Agar $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ xosmas integral absolut yaqinlashsa, u holda bu xosmas integral yaqinlashadi.

14.2. Ikkinchi tip xosmas integrallar. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b)$ oraliqda aniqlangan, harqanday $[a,A]$ $(a<A<b)$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi va $x=b$ nuqtaning chap atrofida chegaralanmagan bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{A\to b-0}\int_a^A f(x)dx \tag{8}$$

ifoda **ikkinchi tip xosmas integral** deyiladi.Bu yerdagi $x=b$ nuqtani (8) xosmas integralning **maxsus nuqtasi** deb aytamiz.

Agar (8) chekli limit mavjud bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral **yaqinlashuvchi,** aks holda esa, **uzoqlashuvchi** deyiladi. (8) ifodani

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

kabi yozish ham mumkin.Ish jarayonida ularning qaysi biri qulay bo'lsa, o'shanisidan foydalaniladi. Bu yerda ham quyidagini isbotlash mumkin:

3- teorema. Agar $f(x)$ funksiya [a,b) oraliqda $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uchun

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b\text{-}0) - F(a) \tag{9}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $F(b\text{-}0)= \lim_{A\to b-0} F(A)$.

5- misol. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}$ (s>0) xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Aytaylik, $s \neq 1$ bo'lsin. U holda, (9) formulaga binoan

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s} = \frac{(b-x)^{1-s}}{s-1}\Big|_a^{b-0} = \begin{cases} +\infty\left(s \in (1,+\infty)\right), \\ \frac{(b-a)^{1-s}}{1-s}\left(s \in (0,1)\right). \end{cases}$$

s=1 bo'lsin. Bu holda yana shu formulaga ko'ra

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x)\Big|_a^{b-0} = \ln(b-a) - \lim_{A\to b-0} \ln(b-A) = +\infty.$$

Demak, ta'rifga asosan,

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^s} \quad (s>0)$$

xosmas integral $s \in (0,1)$ bo'lganda yaqinlashadi, $s \geq 1$ bo'lganda esa uzoqlashadi.

Xyddi shunga o'xshash, quyi chegarasi yoki bir vaqtning o'zida ham quyi chegarasi, ham yuqori chegarasi maxsus nuqta bo'lgan xosmas integrallar haqida yoki maxsus nuqtasi integrallash oralig'i ichida joylashgan xosmas integrallar to'grisida ham so'z yuritishimiz mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to a+0}\int_A^b f(x)dx, \int_a^b f(x)dx = \lim_{A\to a+0}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to b-0}\int_c^B f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \quad (d\text{- maxsus nuqta}).$$

Bu integrallar ham **ikkinchi tip xosmas integrallar** deb ataladi.

Xuddi birinchi tip xosmas integrallardagidek,ikkinchi tip xosmas integrallar uchun ham Koshi kriteriyasi, taqqoslash alomati,absolut yaqinlashish va shartli yaqinlashish tushunchalarini bayon qilish mumkin.Masalan:

2- taqqoslash alomati. Agar f(x) va g(x) funksiyalar $[a,b)$ oraliqda aniqlangan, $x=b$ nuqtaning chap atrofida chegaralanmagan va shu oraliqda $0\le f(x)\le g(x)$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_a^b g(x)dx - yaqinlashuvchi \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - yaqinlashuvchi,$$

$$\int_a^b f(x)dx - uzoqlashuvchi \Rightarrow \int_a^b g(x)dx - uzoqlashuvchi$$

bo‘ladi.

Bu alomatning isboti mos Koshi kriteriyasi va alomat shartlaridan kelib chiqadi.

6- misol. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A\to+0}\int_A^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{A\to+0}\sqrt{x}\Big|_A^1 = 2\lim_{A\to+0}\left(1-\sqrt{A}\right) = 2.$

7- misol.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-0} - \frac{1}{x}\Big|_{+0}^1 = -1 - \lim_{B\to-0}\frac{1}{B} - 1 + \lim_{A\to+0}\frac{1}{A} = +\infty.$$

8- misol. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ xosmas integralni yaqinlashishga tekshiring.

Y e c h i s h . Ravshanki, $x=1$- maxsus nuqta, $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \le \frac{1}{(1-x)^{1/4}} (x \in [0,1))$ va $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ yaqinlashuvchi (5-misolga qarang).Demak, 2- taqqoslash alomatiga ko‘ra, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi .

O‘ZINI-O‘ZI TEKSHIRISHGA DOIR SAVOLLAR

1. Birinchi tip xosmas integral deganda nimani tushunasiz? Uning qanday ko‘rinishlarini bilasiz?
2. Birinchi tip xosmas integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi tushunchalari qanday ta’riflanadi? Misollar keltiring.
3. Birinchi tip xosmas integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi taqqoslash alomati yordamida qanday tekshiriladi? Misollar keltiring.
4. Birinchi tip xosmas integralning absolut yaqinlashihi yoki shartli yaqinlashishi deganda nimani tushunasiz? Absolut yaqinlashuvchi birinchi tip xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladimi?
5. Ikkinchi tip xosmas integral deganda nimani tushunasiz? Uning qanday ko‘rinishlarini bilasiz?
6. Ikkinchi tip xosmas integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi tushunchalari qanday ta’riflanadi? Misollar keltiring.
7. Ikkinchi tip xosmas integralning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi taqqoslash alomati yordamida qanday tekshiriladi? Misollar keltiring.
8. Ikkinchi tip xosmas integralning absolut yaqinlashihi yoki shartli yaqinlashishi deganda nimani tushunasiz? Absolut yaqinlashuvchi ikkinchi tip xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladimi?

ILOVALAR

MATEMATIK BELGILAR KO‘RSATKICHI

Ushbu ko‘rsatkichda kitobdagi matematik belgilarning qisqacha ma'nolari ko‘rsatilgan.

$f(x_0)$ — f funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati; *67*
$|x|$ — x sonning moduli (yoki absolut qiymati); *13*, *19*
$\neq$ — teng emas; *18*
$supX$ — X to'plamning aniq yuqori chegarasi; *21*
$infX$ — X to'plamning aniq quyi chegarasi; *21*
$[x]$ — x ning butun qismi; *22*
$\{x_n\}$ — umumiy hadi x_n bo'lgan sonli ketma-ketlik; *32*
$\max(p, q)$ — p va q sonlarning eng kattasi; *34*
$\min(p, q)$ — p va q sonlarning eng kichigi; *216*
lim — limitga o'tish amali belgisi; *39*
$x \to a$ — x o'zgaruvchi a songa yaqinlashadi (intiladi); *75*
$\equiv$ — aynan teng; *44*
$\sum$ — yig'indi belgisi $\left(\sum_{m=1}^{n} a_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)$; *55*
$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ — $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti; *61*
$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ — $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi limiti; *61*
$\operatorname{sign} x$ — signum iks (signum — funksiya); *69*
$\exists$ — mavjudlik kvantori; *291*
$\inf\limits_{x\in X} f(x)$ — f funksiyaning X to'plamdagi aniq quyi chegarasi; *98*
$\sup\limits_{x\in X} f(x)$ — f funksiyaning X to'plamdagi aniq yuqori chegarasi; *98*
o — Landau simvoli; *103*
$\sim$ — asimptotik teng, ekvivalent; *104*
$f(a+0)$ — f funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti; *89*
$f(a-0)$ — f funksiyaning a nuqtadagi chap limiti; *89*
$\omega(f; X)$ — f funksiyaning X to'plamdagi tebranishi; *127*
Δx — x o'zgaruvchining orttirmasi; *129*
$f'(x)$ — f funksiyaning x nuqtadagi hosilasi; *130*
$f'(x+0)$ — f funksiyaning x nuqtadagi o'ng hosilasi; *139*
$f'(x-0)$ — f funksiyaning x nuqtadagi chap hosilasi; *139*
dy — y funksiyaning differensiali; *152*
$\frac{dy}{dx}$ — y funksiyadan x bo'yicha hosila; *155*
$\Delta f(x_0)$ — f funksiyaning x_0 nuqtada qabul qilgan orttirmasi; *129*
$x \approx y$ — x taqriban y ka teng; *156*
y'_x — y funksiyadan x bo'yicha hosila; *158*
$f^{(n)}(x)$ — f funksiyaning x nuqtadagi n-tartibli hosilasi; *160*

y''_{xx} yoki y''_{x^2} — y funksiyaning x bo'yicha 2-tartibli hosilasi; *167*

d^2y — y funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali; *168*

$\frac{d^ny}{dx^n}$ — y funksiyaning x bo'yicha n-tartibli hosilasi; *170*

$y_{\min}$, $y_{\max}$ — funksiyaning lokal ekstremumlari; *211*, *213*

$\min\limits_{x\in Y} f(x), \max\limits_{x\in X} f(x)$ — f funksiyaning absolut ekstremumlari (eng kichik va eng katta qiymatlari); *215*

$D(f)$ — f funksiyaning aniqlanish sohasi; *67*

$E(f)$ — f funksiyaning qiymatlari to'plami (o'zgarish sohasi); *67*

$\int$ — aniqmas integral belgisi; *230*

$z = x + iy$ $(i^2 = -1)$ — kompleks son; *242*

$Argz$ — z kompleks sonning argumenti; *243*

$\bar{z}$ — z ga qo'shma bo'lgan kompleks son; *247*

$\bar{\bar{z}} - z$ ga qo'shma bo'lgan kompleks son; *247*

$P_n(z)$ — n-darajali algebraik ko'phad; *250*

$R(u, v)$ — u va v larning ratsional funksiyasi; *263*

$\int\limits_a^b$ — aniq integral belgisi; *280*

σ — integral yig'indi; *279*

$s_\tau(f)$, $S_\tau(f)$ — Darbu yig'indilari; *283*

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — f funksiyadan $[a, b]$ bo'yicha olingan integral; *280*.

$A \overset{n^0}{=} B - n^0$ ga binoan A = B; 26,27

$A \overset{n^0}{\Rightarrow} B - n^0$ ga binoan A⇒B; 14

$\not\equiv$ — aynan teng emas; 207

PREDMET KO‘RSATKICHI

Lotin va Yunon alfaviti

yozilishi	o‘qilishi	yozilishi	o‘qilishi
A a	a	Α α	alfa
B b	be	Β β	beta
C c	tse	Γ γ	gamma
D d	de	Δ δ	delta
E e	ye	Ε ε	epsilon
F f	ef	Ζ ζ	dzeta
G g	ge (je)	Η η	eta
H h	xa (ash)	Θ θ, ϑ	teta
I i	i	Ι i	yota
J j	yot (ji)	Κ ϰ	kappa
K k	ka	L λ	lambda
L l	el	Μ μ	myu (mi)
M m	em	Ν ν	nyu (ni)
N n	en	Ξ ξ	ksi
O o	o	Ο ο	omikron
P p	pe	Π π	pi
Q q	ku	Ρ ρ	ro
R r	er	Σ σ	sigma
S s	es	Τ τ	tau
T t	te	Φ φ	fi
U u	u	Χ χ	xi
V n	ve	Υ υ	i psilon(yupsilon)
W *w*	dubl-ve	Ψ ψ	psi
X x	iks	Ω ω	omega
Y y	igrek		
Z z	zet		

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *Azlarov T., Mansurov H.* «Matematik analiz», I- tom. —T. «O'zbekiston» — 1994.

2. *Azlarov T., Mansurov H.* «Matematik analiz asoslari», I- qism, Toshkent: O'zMU, — 2005.

3. *Xudoyberganov G., Vorisov A., Mansurov H.,* «Matematik analiz». (Ma'ruzalar). 1- qism. — Qarshi «Nasaf» nashriyoti, — 2003.

4. *Toshmetov O',* «Matematik analiz» (analizga kirish). —Toshkent: TDPU, — 2005.

5. *Илин В.А., Позняк Э.Г.* «Основы математического анализа». Часть I. — М.: «Наука», 1982.

6. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* «Математический анализ». — М.: «Наука», 1984.

7. *Кудрявцев Л.Д.* «Математический анализ». Т. I. — М.: «Высшая школа». 1981.

8. *Никольский С.М.* «Курс математического анализа». Т. I. —М.: Наука, 1990.

9. *Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В.,* «Лекции по математическому анализу». — М.: «Высшая школа». 1999.

10. *Sa'dullaev A. va boshqalar* «Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami». 1- qism. —T. «O'zbekiston» — 1993.

11. *Sharipova T. Yo'ldoshev E.* «Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami». 1- qism. —T. «O'zbekiston» — 1996.

12. *Turg'unboev P. M.* «Matematik analiz. Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi» — Toshkent: TDPU, 2006.

13. *Juraev T. va boshqalar* «Oliy matematika asoslari» 1- qism. —T. «O'zbekiston» — 1995.

14. *Fayziboev E. va boshqalar* «Oliy matematikadan misol va masalalar toplami». —Toshkent: «O'qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi — 2005.

15. *Пискунов Н.С.* «Дифференциальное и интегральное исчисления». Т.I.—М.: Интеграл-Пресс, 2002.

MUNDARIJA

III BOB. INTEGRAL HISOB

ILOVALAR

Mamalatif Xushvaqtov

MATEMATIK ANALIZ

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv qo'llanma

Toshkent — «Yangiyul poligraph service» — 2008

Maxsus muharrir *T.A. Azlarov*

Muharrir *A. Mirzo*
Rassom *T. Qanoatov*
Texnik muxarrir *J. Bekiyeva*
Musahhih *Z. Nurmatova*
Kompyuterda sahifalovchi *X. Safaraliyev*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 07.07.2008.
Bichimi $60\times90^{1}/_{16}$. Kegli 11 shponli. «TimesUz» garniturasi.
Ofset bosma usulda bosildi. Shartli b.t. 21,0. Nashr t. 19,7.
Nusxasi 500. Buyurtma № 35.

Bahosi shartnoma asosida.

«Yangiyul poligraph service» MCHJ bosmaxonasida bosildi.
Yangiyo'l sh., Samarqand ko'chasi, 44.

Matematik
analiz

ISBN 978-9943-309-60-9

POLIGRAPH
SERVICE