N. G'AYBULLAYEV, A. ORTIQBOYEV

GEOMETRIYA

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi umumta'lim maktablarining 8-sinfi uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan

6-nashri

TOSHKENT — «MEHNAT» — 2004

BBK 22.151ya72
G' 17

Taqrizchi: Toshkent to'qimachilik va yengil sanoat instituti dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi
X. K. ABDURAHMONOVA

Maxsus muharrir A.RAHIMQORIYEV

G' 17 **G'aybullayev N., Ortiqboyev A.**
Geometriya: 8-sinf uchun o'quv qo'llanma — 6-nashri // Maxsus muharrir A.Rahimqoriyev/. — T.: «Mehnat», 2004—176 b.

I. Muallifdosh

BBK 22.151ya 72

G $\frac{4306010502-34}{M359(04)-2004}$ buyurtma var.—2004

ISBN 5—8244—1483—1

1-§. GEOMETRIK SHAKLNING YUZI

1.1. Yuz haqida tushuncha

Hayotiy tajribada ko'p hollarda geometrik shakllarning sathlari kattaliklarini o'lchashga to'g'ri keladi. 5–6- sinflar matematikasidan Siz to'g'ri to'rtburchak, kvadrat, to'g'ri burchakli uchburchak kabi ayrim shakllarning yuzlarini topish formulalarini bilasiz. Umuman, yuz tushunchasi bilan Siz turmushda tez-tez duch kelasiz, chunonchi, Siz o'z hovlingizdagi va daladagi yer maydonlari, uyingizning poli, devorlari, deraza, stol yuzlarini o'lchashingizga to'g'ri keladi.

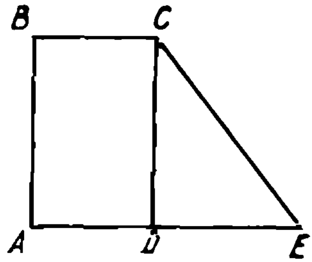
Endi *ko'pburchakning yuzini topish masalasi* bilan shug'ullanamiz.

Ko'pburchakning yuzi deganda tekislikning shu ko'pburchak bilan chegaralangan bo'lagining sathi, ya'ni yuzi tushuniladi.

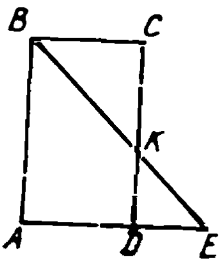
Agar ikki ko'pburchakning tekislikda chegaralagan bo'laklari umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmay, ular faqat umumiy uchlarga va umumiy tomonlargagina ega bo'lsa, bu ko'pburchaklar bir-birini qoplamaydi, deb ataladi.

Agar geometrik shaklni chekli sondagi uchburchaklarga bo'lish mumkin bo'lsa, u holda bu shakl *sodda shakl* deyiladi.

Masalan, 1- rasmdagi shakl to'g'ri to'rtburchak va to'g'ri burchakli uchburchakdan tuzilgan va tashkil qiluvchi shakllar bir-birini qoplamaydi. 2- rasmdagi shakl ham to'g'ri to'rtburchakdan va uchburchaklardan tuzilgan, ammo ular bir-birini qoplaydi.



1- rasm.



2- rasm.

Birinchi holda (1- rasm) $ABCE$ to'rtburchakning yuzi uni tashkil qiluvchi $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak va CDE to'g'ri burchakli uchburchak yuzlarining yig'indisiga teng. Ikkinchi holda (2- rasm) $ABCKE$ beshburchakning yuzi uni tashkil qiluvchi shakllar yuzlarining yig'indisiga teng bo'la olmaydi. Ammo, boshqa tomondan, 2- rasmdagi shaklni bir-birini qoplamaydigan ikki uchburchak: DBCK, DKDE va bir trapetsiyadan *(ABKD)* iborat deb hisoblash mumkin.

Yuz tushunchasi geometriyaning ta'rifsiz qabul qilinadigan boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib, uning ma'nosi quyidagi aksiomalarda ochiladi. Yuz aksiomalari ham geometrik miqdorni o'lchash aksiomalari bo'lgani uchun ularni biz birinchi guruh aksiomalariga kiritamiz va *yuz aksiomalari* deb ataymiz.

I_1. *Har qanday shaklning yuziga tomoni bir o'lchov birligiga teng bo'lgan kvadratning yuzi bilan o'lchanadigan musbat son mos keladi.*

I_2. *Teng shakllar teng yuzlarga ega.*

I_3. *Agar shakl bir-birini qoplamaydigan shakllardan tashkil topgan bo'lsa, uning yuzi tashkil qiluvchi shakllar yuzlarining yig'indisiga teng.*

Yuzlar lotincha bosh harf S bilan belgilanadi. Masalan,

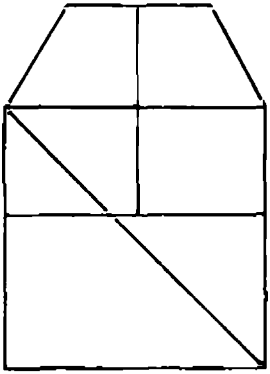
$$S = S(F) = S_{ABCDE} \qquad (1\text{- rasm}).$$

MASALALAR

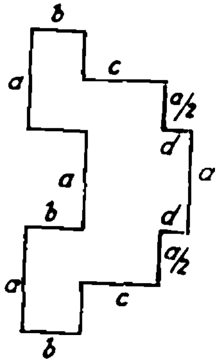
1. Nima uchun yuz aksiomalari birinchi guruh aksiomalariga kiritilgan?

2. 1- rasmda to'g'ri to'rtburchakning tomonlari $AB = 5$ sm va $AD = 3$ sm bo'lib, to'g'ri burchakli uchburchakning ikkinchi kateti $DE = 4$ sm bo'lsa, ulardan tashkil topgan to'rtburchakning yuzi qancha bo'ladi?

3. 2- rasmda to'g'ri to'rtburchak tomonining to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi bilan kesishgan nuqtasi K bo'lsa, uning yuzi qanday shakllar yuzlari yig'indisidan iborat?



3- rasm.



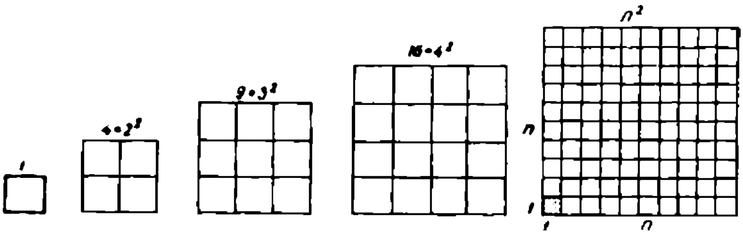
4- rasm.

4. 3- rasmdagi shakl bir-birini qoplamaydigan qanday shakllardan iborat? Bu shaklning yuzi $S(F)$ ni tashkil qiluvchi shakllarning yuzlari yig'indisi ko'rinishida yozing. (Kesishish nuqtalarini harflar bilan belgilang.)

5. 4- rasmdagi murakkab shaklning yuzini unda qo'shimcha kesmalar o'tkazish yo'li bilan sodda shakllarga keltirib hisoblang. Qanday hisoblaganingizni tushuntiring.

1.2. Yuzni o'lchash. Tengdosh shakllar

Yuz tekislik yoki fazodagi geometrik shakllarni tavsiflovchi asosiy matematik miqdorlardan biridir.



5- rasm.

Ixtiyoriy shaklning yuzini o'lchash bu yuzni birlik yuz bilan solishtirishdan iboratdir. Solishtirish natijasida yuzga mos keluvchi son qiymat aniqlanadi. Bu son qaralayotgan shaklning yuzi birlik yuzdan necha marta katta (yoki kichik) ekanini ko'rsatuvchi sondir.

I_4 aksiomaga asosan *birlik yuz sifatida tomoni bir o'lchov birligiga mos keluvchi kvadratning yuzi qabul qilingan.*

Sodda hollarda yuz tekis shaklni to'ldiruvchi birlik kvadratlar, ya'ni tomoni uzunlik birligiga teng bo'lgan kvadratlar soni bilan o'lchanadi.

Agar o'lchov birligi sifatida mm, sm, m yoki km olingan bo'lsa, u holda yuz birligi mos ravishda mm², sm², m² yoki km² shaklida yoziladi. Yuz hisoblanganda shaklning o'lchamlari bir xil o'lchov birligida bo'lishi lozim.

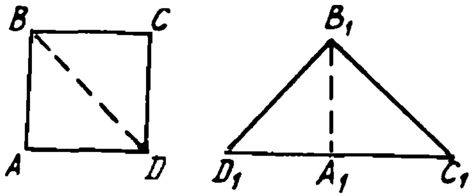
Yuz o'lchov birliklarining biridan ikkinchisiga o'tish mumkinligini bilasiz. Masalan, $1 m^2 = 1 m \cdot 1 m = 100$ sm x 100 sm= $= 10000$ sm².

Agar biror kvadratning tomonlari birlik kvadratning tomonidan n marta katta bo'lsa, u holda unga birlik kvadratdan n^2 tasi joylashadi. Demak, kvadratning yuzi birlik kvadratning yuzidan n^2 marta ortiq bo'lar ekan. Buni 5- rasmda ko'rish mumkin.

Bu xossadan foydalanib quyidagi aksiomani qabul qilamiz.

I_7. *Kvadratning yuzi uning tomoni uzunligining kvadratiga teng.*

Yuzlari teng bo'lgan shakllar tengdosh shakllar deb ataladi.



6- rasm.

Masalan, 6- rasmda tasvirlangan kvadrat va teng yonli uchburchak tengdosh shakllardir, chunki $B_1C_1D_1$ uchburchak kvadratni diagonali bo‘yicha qirqilgandan hosil bo‘lgan uchburchaklarni yonma-yon qo‘yish bilan hosil qilingan. Ammo ular teng shakllar emas, balki faqat teng yuzlarga ega, xolos.

MASALALAR

6. Yuzni qanday o‘lchov asboblari yordamida o‘lchash mumkin?

7. Paletkaning tuzilishi va uning yordamida qanday o‘lchash mumkinligini tushuntirib bering.

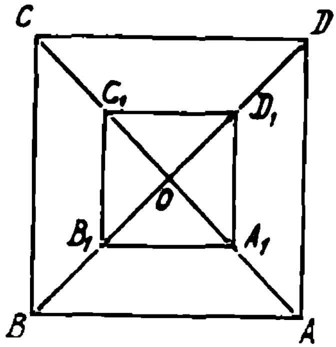
8. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari 2 sm va 3 dm bo‘lsa, yuz o‘lchov birligi sifatida tomoni qanday kvadratni olish ma’qulroq bo‘ladi?

9. Kvadratning tomoni $\frac{a}{3}$ ga teng bo‘lsa, uning yuzini hisoblang.

10. Agar kvadratning tomoni uch marta orttirilsa, hosil bo‘lgan kvadratning yuzi qanday o‘zgaradi?

11. Kvadratning yuzini 36 marta kamytirish uchun uning tomonini necha marta kichiklashtirish kerak?

12. $A_1BC_1D_1$ kvadratning yuzi 100 sm^2. $ABCD$ kvadratning yuzini hisoblang. Bunda $AA_1=A_1O$ va $A_1D_1 \parallel AD$ (7- rasm).



7- rasm.

1.3. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

Siz 5- sinf matematika darslarida to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini hisoblashni o‘rgangan edingiz.

T e o r e m a. *To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning qo‘shni tomonlarining ko‘paytmasiga teng.*

I s b o t. Tomonlarining uzunligi a (bo‘yi) va b (eni) bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraylik (8- rasm).

To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi S bo‘lsin. $S = ab$ ekanini isbotlaymiz. Shu maqsadda bu to‘rtburchakda tomonining uzunligi $a + b$ ga teng kvadrat yasaymiz (9- rasm). Bu kvadratning umumiy yuzi S_1 tomonlari a ga va b ga teng ikki kvadrat va bir xil S yuzli ikki to‘g‘ri to‘rtburchak yuzlari yig‘indisidan iborat, ya’ni $S_1 = a^2 + 2S + b^2$ (I_6 aksiomaga ko‘ra).

Ikkinchi tomondan esa yuz haqidagi I_7 aksiomaga ko‘ra uning yuzi $(a+b)^2$ ga teng.

I_5 aksiomaga ko‘ra $a^2+2S+b^2=(a+b)^2$ yoki $a^2+2S+b^2 = a^2+2ab+b^2$. Bundan $S=a \cdot b$ ga ega bo‘lamiz.

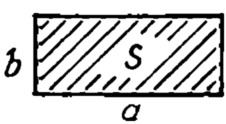
Demak, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi:

$$\boxed{S = a \cdot b.}$$

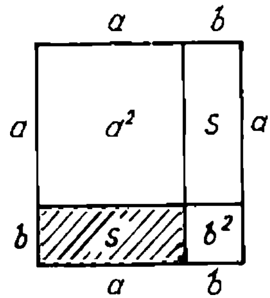
Teorema isbotlandi.

Bundan keyin to‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yini *asos*, enini esa *balandlik* deb ataymiz. Shunda to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\boxed{S = ah.}$$



8- rasm.



9- rasm.

MASALALAR

13. 1) To'g'ri to'rtburchakning perimetri 22 sm va asosi balandligidan 1 sm ortiq bo'lsa, yuzi qancha bo'ladi?

2) Agar to'g'ri to'rtburchakning bir tomoni 8 sm va u ikkinchi tomonidan ikki marta katta bo'lsa, uning yuzini toping.

14. Marmar plitkalar kvadrat shaklida bo'lib, tomoni 20 sm. Tomonlari 1 m va 3 m bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydonchaga plitka yotqizish uchun nechta marmar plitka kerak bo'ladi?

15. 1) Maktab yer maydonining yuzi 20 000 m^2. Uning 15% ini sport maydonchasi tashkil etadi. Maydonchaning yuzini toping.

2) Xonaning bo'yi 5,4 m, eni 4,2 m. Xonada eni 1,2 m va balandligi 1,6 m bo'lgan ikkita deraza bor. Agar derazalarning yuzi (yorug'lik tushadigan yuzi) butun pol yuzining 20% ini tashkil etsa, xonaning yoritilganligi normal hisolanadi. Xonaning yoritilganligi normalmi?

16. 1) Tomonlarining har biri butun sonlar bilan o'lchanadigan to'g'ri to'rtburchakning perimetri 20 sm ga teng. Bu to'g'ri to'rtburchakning yuzini hisoblang. Qanday holda to'g'ri to'rtburchakning yuzi eng katta va qanday holda to'g'ri to'rtburchakning yuzi eng kichik bo'ladi?

2) O'lchamlari 63 sm va 28 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakka tengdosh kvadratning perimetrini toping.

17. 1) To'g'ri to'rtburchak tomonlarining nisbati 5:7 ga teng bo'lib, uning yuzi 140 dm^2 bo'lsa, tomonlari nimaga teng?

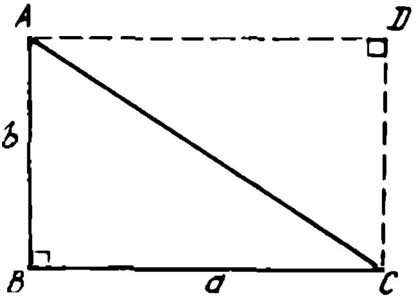
2) Agar dala maydoni o'lchamlari 2000 m va 1500 m bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklida bo'lsa, uning yuzini kvadrat kilometr hisobida toping.

3) Zavodning to'g'ri to'rtburchak shaklidagi hovlisining o'lchamlari 125 m va 72 m. Hovlining yuzini sm^2 hisobida toping.

1.4. Uchburchakning yuzi

Uchburchak yuzi formulasini keltirib chiqarishdan avval ushbu lemmani keltiramiz.

L e m m a. *To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi uning katetlari ko'paytmasining yarmiga teng.*



10- rasm.

I s b o t. Katetlarining uzunligi a va b bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak berilgan bo'lsin (10-rasm):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$$

ekanini isbotlaymiz.

Uchburchakning A va C uchlaridan katetlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakni hosil qilamiz. Bunda hosil bo'lgan ABC va CDA to'g'ri burchakli uchburchaklar o'zaro teng. (Isbot qiling.) Demak, ular teng S yuzga ega. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak ikkita teng to'g'ri burchakli uchburchakdan tashkil topganligidan, uning yuzi ABC uchburchak yuzining ikkilanganiga teng bo'ladi, ya'ni $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC}$. Demak, ABC uchburchakning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzining yarmiga teng ekan.

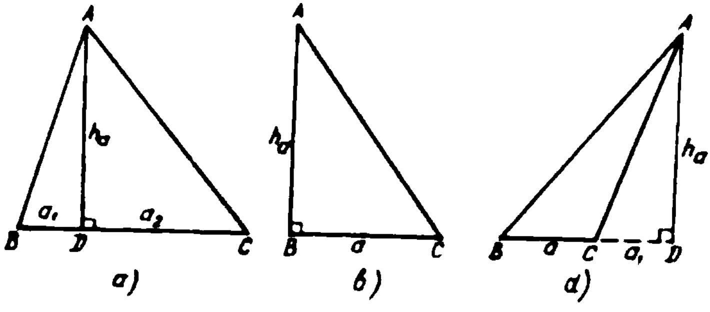
Shunday qilib, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$, lemma isbot bo'ldi.

Bu lemmadan foydalanib, ixtiyoriy uchburchakning yuzi formulasini hosil qilamiz.

T e o r e m a. *Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng.*

I s b o t. Uchburchakning asosini a va bu tomonga tushirilgan balandlikni h_a bilan belgilaylik, S — uchburchak yuzi. Bunda ushbu uch holni ko'rish kerak.

1. Balandlikning asosi uchburchakning tomonida yotadi (11- a rasm).



11- rasm.

2. Balandlikning asosi uchburchakning uchlaridan biri bilan ustma-ust tushadi (11-*b* rasm).

3. Balandlikning asosi uchburchak tomonining davomida yotadi (11-*d* rasm).

Birinchi holda balandlik berilgan uchburchakni ikkita to'g'ri burchakli uchburchakka ajratadi. Ularning asoslarini a_1 va a_2 bilan belgilasak, $a_1+a_2=a$ bo'ladi. Lemmaga ko'ra bu to'g'ri burchakli uchburchaklarning yuzi

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1h_a \text{ ва } S_2 = \frac{1}{2}a_2h_a.$$

I_4 aksiomaga ko'ra: $S_{ABC} = S_1 + S_2$.

Yuqoridagi natijalarni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a_1h_a + \frac{1}{2}a_2h_a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)h_a = \frac{1}{2}ah_a.$$

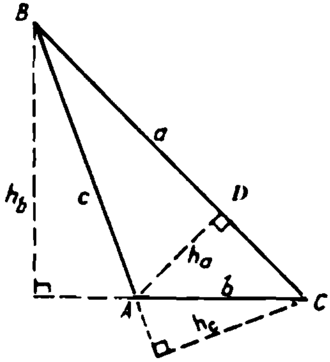
Demak,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Bu hol uchun teorema isbot bo'ldi.

Uchburchak to'g'ri burchakli bo'lgandagina balandlikning asosi to'g'ri burchak uchi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni ikkinchi hol ro'y beradi. Lemmaga asosan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a.$$



12- rasm.

Uchburchak o'tmas burchakli bo'lganda uning o'tkir burchaklari uchidan tushirilgan balandliklar uchburchak tomonlari davomiga tushadi, ya'ni balandlikning asosi uchburchak tomonining davomida yotadi (3-hol). Bu holda ikkita ABD va ACD to'g'ri burchakli uchburchak hosil bo'ladi. Ular uchun umumiy AD katet h_a balandlik vazifasini o'taydi va $BC = a$, $CD = a_1$, $BD = BC + CD = a + a_1$. Lemmaga asosan:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}(a_1 + a)h_a, \quad S_{ACD} = \frac{1}{2}a_1 h_a.$$

Izlanayotgan uchburchak yuzi:

$$S_{ABC} = S_{BCD} - S_{ACD}.$$

Yuqoridagi natijalarni e'tiborga olib, ega bo'lamiz:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a_1 + a)h_a - \frac{1}{2}a_1 h_a = \frac{1}{2}ah_a.$$

Shunday qilib,

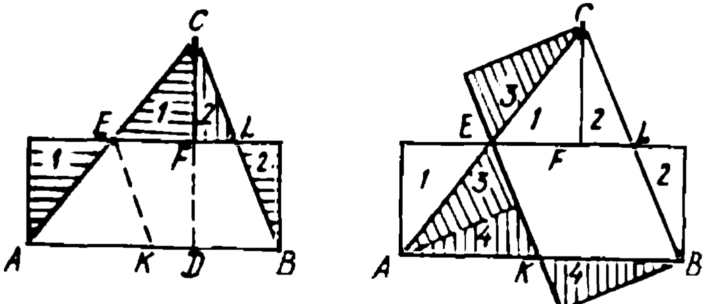
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a.$$

Teorema to'la isbot bo'ldi.

Ma'lumki, uchburchakning ixtiyoriy tomonini asos deb hisoblash mumkin. Uchburchak yuzining kattaligi esa uning qaysi tomonini asos deb olinishiga bog'liq emas (12- rasm).

Ushbu $\frac{1}{2}ah_a$, $\frac{1}{2}bh_b$, $\frac{1}{2}ch_c$ uchta ifoda bir-biriga teng, chunki ular ABC uchburchak yuzi kattaligini beradi:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$



13- rasm.

Bu fikrning to'g'ri ekanligiga 13- rasmdagi tengdosh shakllarni solishtirish yo'li bilan ishonch hosil qiling. Rasmdagi EL va EK kesmalar uchburchakning o'rta chizig'i. Hosil bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning balandligi mos uchburchak balandligining yarmiga teng. Bunda tengdosh shakllar bir xil raqam bilan belgilangan.

MASALALAR

18. 1) Agar to'g'ri burchakli uchburchakning katetlari: a) 6 sm va 13 sm; b) 2,2 dm va 5 dm bo'lsa, uning yuzini toping.

2) To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi 168 m^2 ga teng. Agar katetlar nisbati $\frac{7}{12}$ ga teng bo'lsa, ularni toping.

19. Uchburchakning asosi a, balandligi h_a, yuzi esa S bo'lsin:

1) agar a =9 sm va h_a =15 sm bo'lsa, S ni;

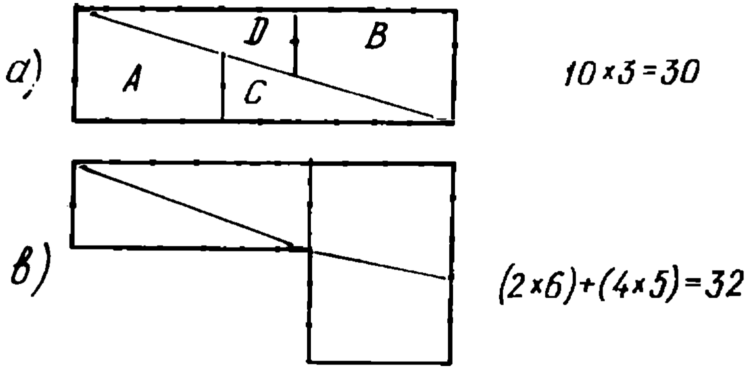
2) agar a =3,4 dm va h_a =5,1 dm bo'lsa, S ni;

3) agar S =75,6 sm^2 va a=28 sm bo'lsa, h_a ni;

4) agar S =24 sm^2 va h_a =12 dm bo'lsa, a ni toping.

20. 1) Uchburchakning ikki tomoni 18 sm va 24 sm. Birinchi tomonga o'tkazilgan balandlik 21 sm. Berilgan ikkinchi tomonga o'tkazilgan balandlikni toping.

2) Uchburchakning ikki tomoni 6,5 sm va 8,2 sm ga teng. Katta tomonga o'tkazilgan balandlik 2,4 sm ga teng. Berilgan tomonlardan kichigiga o'tkazilgan balandlikni toping.



14- rasm.

21. Teng tomonli uchburchakning yuzi 24 dm^2 va balandligi 6 dm ga teng bo'lsa, uchburchakning tomonini toping.

22. 1) Uchburchakning medianasi uni ikkita tengdosh uchburchakka ajratishini isbotlang.

2) Uchburchakning uchta medianasi o'tkazilgan. Hosil bo'lgan shakldagi uchburchaklar o'zaro tengdoshligini isbotlang.

3) ABC uchburchakning S uchi orqali AB tomoniga parallel m to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Uchi m to'g'ri chiziqda va AB asosli barcha uchburchaklarning yuzlari teng bo'lishini isbotlang.

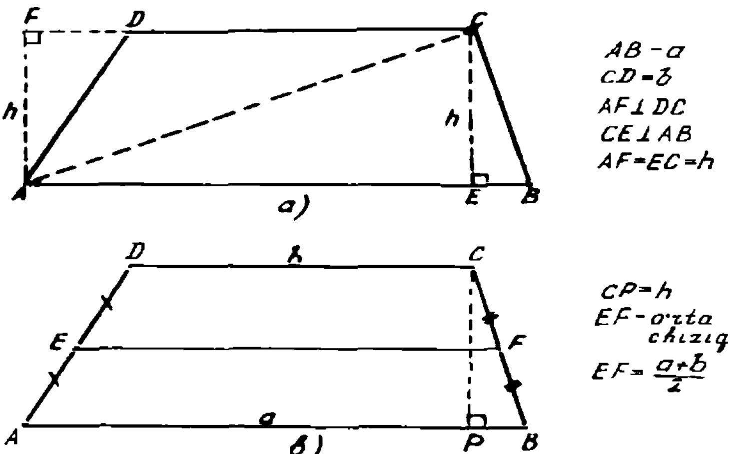
Q i z i q a r l i m a s a l a. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi yuz 14-*a* rasmda ko'rsatilganidek qirqilib, undan 14-*b* rasmdagi shakl hosil qilingan (uni o'zingiz hosil qiling). Bu shakllardan birinchisining yuzi 30 kv. birlik, ikkinchisining yuzi esa 32 kv. birlik. Ular teng shakllardan tuzilgan bo'lsa-da, nega yuzlari teng emas?

1.5. Trapetsiya va parallelogrammning yuzi

Avvalgi bandda biz ixtiyoriy uchburchakning yuzini hisoblashni o'rgandik. Bu har qanday shakldagi ko'pburchak yuzini hisoblash imkonini beradi. Buning uchun berilgan ko'pburchakni diagonallari yordamida uchburchaklarga ajratish zarur. Shunda ko'pburchakning yuzi uni tashkil etuvchi uchburchaklarning yuzlari yig'indisiga teng bo'ladi. Masalan, shu usulda trapetsiyaning yuzini topish mumkin.

Trapetsiyaning parallel tomonlarini *asoslar* va bu tomonlar yotgan parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani uning *balandligi* deb ataymiz.

T e o r e m a. *Trapetsiyaning yuzi uning asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligining ko'paytmasiga teng.*



15- rasm.

I s b o t. $ABCD$ trapetsiyaning asoslari $AB=a$ va $CD=b$, balandligi h, yuzi S_{TR} bo'lsin (15-*a* rasm).

$$S_{TR} = S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}h$$

ekanini isbotlaymiz.

Trapetsiyaning ixtiyoriy diagonali (masalan, AC) uni asoslari a va b, balandligi trapetsiya balandligi $AF=h$ ga teng ikkita uchburchakka ajratadi. Trapetsiyaning yuzi esa bu uchburchaklarning yuzlari yig'indisiga teng (I aksiomaga ko'ra), ya'ni

$$S_{TR} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Shunday qilib,

$$\boxed{S_{TR} = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{a+b}{2}h.}$$

Teorema isbot bo'ldi.

N a t i j a. *Trapetsiyaning yuzi uning o'rta chizig'i bilan balandligining ko'paytmasiga teng.* Haqiqatan, trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslari yig'indisining yarmiga teng, ya'ni $EF = \frac{1}{2}(a+b)$ (15-*b* rasm) bo'lgani sababli trapetsiyaning yuzi uchun hosil qilingan formuladagi $\frac{a+b}{2}$ ko'paytuvchini uning qiymati bilan almashtirsak, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S_{TR} = EF \cdot h.$$

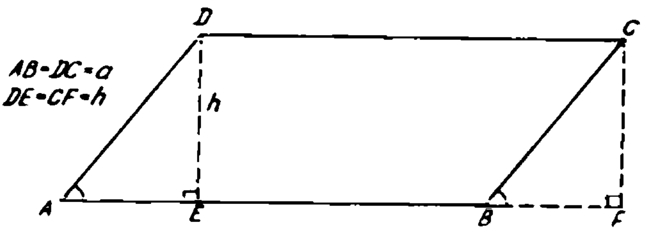
Har qanday parallelogrammni asoslari o'zaro teng, ya'ni $a=b$ bo'lgan trapetsiya deb qarash mumkin. (Nima uchun?)

Bundan, parallelogramm yuzi formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$S_{TR} = \frac{1}{2}(a+b)h = ah, \text{ ya'ni } S_{par} = ah.$$

Demak, parallelogrammning yuzi uning asosi bilan balandligining ko'paytmasiga teng (xuddi to'g'ri to'rtburchak singari) (16- rasm).

Parallelogrammning yuzi formulasini parallelogrammni to'g'ri to'rtburchak shakliga keltirish yo'li bilan ham hosil qilish mumkin. Buni 16- rasmdan foydalanib o'zingiz isbot qiling.



16- rasm.

23. 1) Trapetsiyaning asoslari 21 sm va 15 sm, balandligi esa 5 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

2) Trapetsiyaning balandligi 5 m, kichik asosi 6 m va katta asosi kichik asosidan 2,5 marta katta bo'lsa, trapetsiyaning yuzini toping.

24. Trapetsiyaning yuzi S, balandligi h bo'lsin. Agar shu trapetsiyaning asoslarini o'zgartirmay turib, balandligini:

1) 2 marta orttirilsa;

2) 3 marta kamaytirilsa, trapetsiyaning yuzi qanday o'zgaradi?

25. 1) Trapetsiyaning yuzi 1024 sm^2, asoslari 80 sm va 48 sm. Trapetsiyaning balandligini toping.

2) Agar $ABCD$ trapetsiyaning asoslari AB=2 sm va CD=10 sm; DA=8 sm, $\angle D$=30° bo'lsa, uning yuzini toping.

26. Trapetsiyaning yuzi 72 sm^2 va kichik asosi 6 sm. Trapetsiyaning diagonali o'tkazilgan. Tomonlari trapetsiyaning kichik asosi, diagonali va yon yog'idan iborat bo'lgan uchburchakning yuzi 24 sm^2. Trapetsiyaning katta asosi va balandligini toping.

27. To'g'ri burchakli trapetsiyada balandlik va kichik asos 6 sm, eng katta burchagi esa 135° bo'lsa, uning yuzini toping.

28. 1) Parallelogrammning asosi 6 m va mos balandligi 7 m bo'lsa, uning yuzini toping.

2) Parallelogrammning 13 sm bo'lgan diagonali uning 12 sm bo'lgan tomoniga perpendikulyar bo'lsa, parallelogrammning yuzini toping.

29. 1) Rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.

2) Diagonallari: a) 3,5 sm va 4,6 sm; b) 7,6 m va 8,5 m bo'lgan rombning yuzini toping.

30. 1) Agar rombning tomoni 4,6 sm, burchaklaridan biri esa 30° bo'lsa, uning yuzini toping.

2) Rombning tomoni 12 sm, burchaklaridan biri esa 150°. Rombning yuzini toping.

Qadimiy masala (Misr usuli). Bundan 4000 yil avval misrliklar tomonlari a, b, c, d bo'lgan ixtiyoriy to'rtburchakning yuzini

$$S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$$

formula bo'yicha hisoblashgan.

Bu formula faqat to'g'ri to'rtburchak uchun to'g'ri ekanini ko'rsating.

Qadimiy masala (Moskva papirusidan olingan masala). To'g'ri to'rtburchakning yuzi va tomonlari uzunliklarining nisbati ma'lum deb olib, uning tomonlarini toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

31. 1) Kvadratning tomoni quyidagicha o'zgartirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi? a) 1,5 marta orttiriladi; b) 2 marta kamaytiriladi; e) 3 marta orttiriladi; d) 4 marta kamaytiriladi.

2) Agar kvadratning yuzi: a) 0,16 dm^2; b) 1,44 sm^2; d) 1,96 m^2 bo'lsa, uning tomonini toping.

32. Tomonlari 3 sm va 1,5 dm bo'lgan to'g'ri to'rtburchak berilgan. Uning yuzi birlik kvadrat yuzidan necha marta katta?

33. Yuzi berilgan kvadrat yuzidan to'rt marta katta bo'lgan kvadrat yasang.

34. Agar to'g'ri to'rtburchakning:

a) asosi va balandligi 2 marta orttirilsa;

b) asosi va balandligi 3 marta kamaytirilsa;

v) asosi 4 marta orttirilib, balandligi 4 marta kamaytirilsa;

g) asosi 3 marta orttirilib, balandligi o'zgarishsiz qoldirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

35. 1) Berilgan uchburchakka tengdosh parallelogramm yasang.

2) Berilgan uchburchak bilan tengdosh va u bilan umumiy asosga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasang.

36. Sexga uzunligi 1,6 m, eni 1, 2 m va balandligi 3 m bo'lgan stanokni olib kirish kerak. Sex eshigining eni 1,4 m va balandligi 2,7 m. Stanokni sexga olib kirish mumkinmi? Masalani yuz bilan bog'lab tushuntiring.

37. 1) Uchburchakning o'rta chizig'i uzunligi 4 sm va yuzi 20 sm^2 bo'lsa, uning balandligini toping.

2) ABC uchburchakning AB va BC tomonlari mos ravishda 16 sm va 22 sm ga teng. AB tomonga tushirilgan balandlik esa 11 sm ga teng. BC tomonga tushirilgan balandlikni toping.

38. 1) Parallelogrammning o'tkir burchagi 30° ga teng, o'tmas burchagi uchidan tushirilgan balandliklar esa mos ravishda 4 sm ga va 5 sm ga teng. Parallelogrammning yuzini toping.

2) Parallelogrammning tomonlari 16 sm va 20 sm ga, balandliklaridan biri 12 sm ga teng. Parallelogrammning ikkinchi balandligini hisoblang. Masala nechta yechimga ega?

39. 1) Parallelogrammning diagonali uning tomoniga perpendinkulyar va bu diagonal qarshisidagi burchagi 45° ga teng. Agar diagonalning uzunligi 8 sm bo'lsa, parallelogrammning yuzini toping.

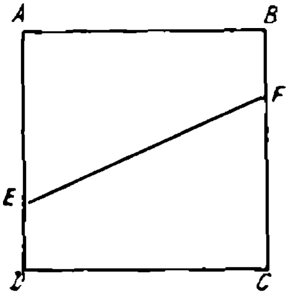
2) Parallelogrammning yuzi 48 sm^2 ga teng. Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi tomonlar yotgan to'g'ri chiziqlardan 2 sm va 6 sm uzoqlashgan. Bu parallelogrammning perimetrini hisoblang.

40. 1) Asoslari 4 sm va 8 sm, burchaklaridan biri 45° bo'lgan to'g'ri burchakli trapetsiyaning yuzini toping.

2) Asoslari 7 sm va 9 sm, asosidagi burchaklardan biri 45° bo'lgan teng yonli trapetsiyaning yuzini toping.

41. 1) Agar rombning yuzi 27 sm^2 ga teng, diagonallaridan biri ikkinchisidan 1,5 marta katta bo'lsa, uning diagonallarini toping.

2) Agar rombning diagonallari 2 va 3 sonlariga proporsional, yuzi esa 12 sm^2 bo'lsa, romb diagonallarini toping.



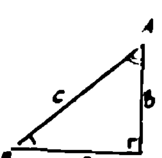
17- rasm

Q i z i q a r l i   m a s a l a. Ahmad kvadrat shaklidagi (*ABCD*) tortni to'rt kishiga teng bo'lib bermoqchi edi. U tortni birinchi marta *EF* kesma bo'yicha kesib qo'ydi (17-rasm). Bo'laklar teng bo'lishi uchun ikkinchi kesimni qanday o'tkazish kerak?

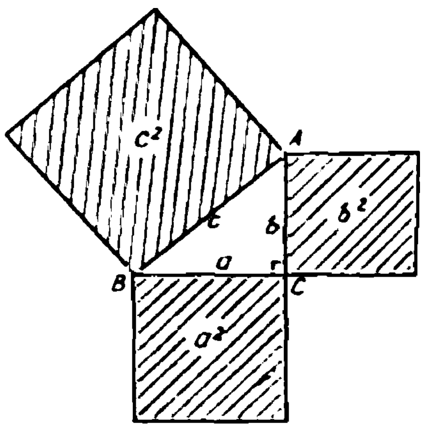
2- §. PIFAGOR TEOREMASI

2.1. Pifagor va uning teoremasi haqida

Pifagor miloddan avvalgi 570 – 500 yillarda yashagan buyuk yunon matematiklaridan biri. Uning shaxsiy hayotiga oid yozma manbalar qolmagan, u Egey dengizining Samos orolida tug'ilgan, keyinchalik esa Italiyaning janubida yashagan. Pifagor va uning o'quvchilarining matematika, astronomiya va falsafa ilmiga qo'shgan hissalari beqiyosdir. Xususan, geometriyaning fan sifatida tarkib topishida ularning hissasi kattadir. Biz hozir keltirmoqchi bo'lgan teorema Pifagor nomi bilan yuritiladi. Ammo bu teoremani undan avval qadimgi Misr va Bobilda ham bilishgan. Pifagor esa bu teoremaning nazariy isbotini keltirgan va o'sha davrgacha ba'zi hollar uchun to'g'ri deb qaralgan tushuncha qonun shaklini olgan.



18- rasm.



19- rasm.

Bu teorema to'g'ri burchakli uchburchakka oid bo'lib, uchburchak tomonlariga teng kvadratlarning yuzlari orasidagi munosabatni ko'rsatadi. Umumiy isbotdan so'ng esa u uchburchak tomonlari orasidagi munosabat ekani ma'lum bo'lgan.

T e o r e m a (Pifagor teoremasi). *To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati uning katetlari kvadratlarining yig'indisiga teng.*

Katetlarining uzunligi a va b, gipotenuzasining uzunligi c bo'lgan to'g'ri burchakli ABC uchburchak berilgan bo'lsin (18-rasm), u holda Pifagor teoremasi $c^2=a^2+b^2$ formula bilan ifodalanadi, bunda a^2, b^2, c^2 – tomonlari a, b, c bo'lgan kvadratlarning yuzlariga teng. Shuning uchun bu tenglik tomoni gipotenuzaning uzunligiga teng kvadratning yuzi tomonlari katetlarga teng kvadratlarning yuzlari yig'indisiga teng ekanini ko'rsatadi (19- rasm).

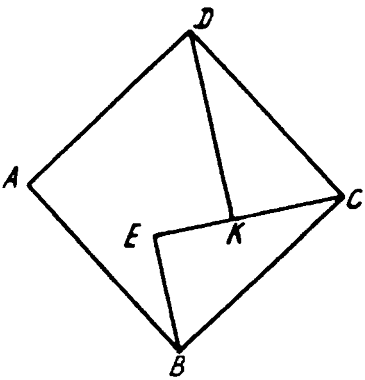
MASALALAR

42. 1) To'g'ri to'rtburchakning tomonlari uzunliklarini bilgan holda uning diagonali qanday hisoblanadi?

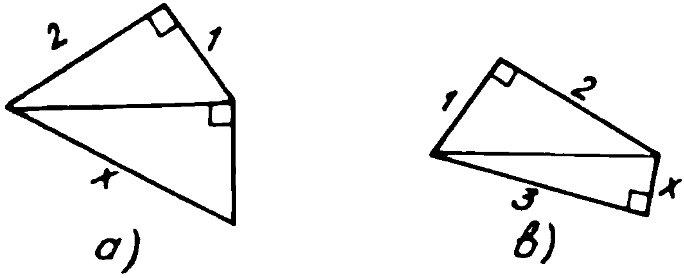
2) Pifagor teoremasidan foydalanib, to'g'ri to'rtburchakning diagonallari o'zaro tengligini isbotlang.

43. Kvadratning tomonlari o'rtalarini tutashtirishdan hosil bo'lgan shakl kvadrat ekanligini isbotlang.

44. 20- rasmda $ABCD$ kvadrat, $EC=DK=b$, $BE=KC=a$ va $EC\perp EB$, $DK\perp EC$ bo'lsa, $ABEKD$ ko'pburchakning yuzini toping.



20- rasm.



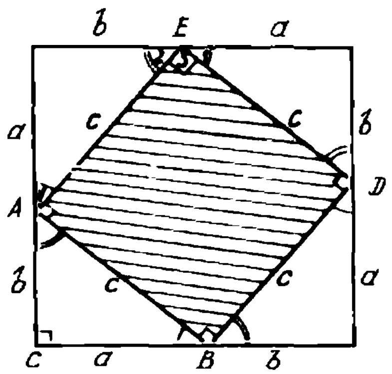
21- rasm.

45. 21- rasmdagi noma'lum x kesmaning uzunligini hisoblang.

2.2. Pifagor teoremasining isboti

Katetlari a, b va gipotenuzasi c bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakni qaraymiz (18- rasmga qarang). $c^2=a^2+b^2$ ekanini isbotlaymiz.

Isbot qilish uchun tomonining uzunligi $a+b$ ga teng bo'lgan kvadrat yasaymiz (22- rasm). Bu kvadratning burchaklaridan katetlari a va b bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklarni rasmda ko'rsatilgandek ajratamiz. Natijada hosil bo'lgan bu to'rttala to'g'ri burchakli uchburchakning katetlari teng, demak, ular o'zaro tengdir (to'g'ri burchakli uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra). Shuning uchun ularning gipotenuzalari berilgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga, ya'ni c ga teng.



$$(a+b)^2=4\left(\frac{1}{2}ab\right)+c^2$$

22- rasm.

Endi yasalgan kvadratning ichidagi $ABCD$ to‘rtburchakning tomoni c ga teng bo‘lgan kvadrat ekanini ko‘rsatamiz.

Bizga ma’lumki, to‘g‘ri burchakli uchburchakning o‘tkir burchaklari yig‘indisi 90° ga teng. Shuning uchun $\angle 1+\angle 2=90°$.

Ikkinchi tomondan, $\angle 1$, $\angle 3$ va $\angle 2$ ning yig‘indisi yoyiq burchak hosil qiladi, ya’ni $\angle 1+\angle 3+\angle 2=180°$. $\angle 1+\angle 2=90°$ ekanini e’tiborga olsak, $\angle 3=90°$ ekani kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash, $ABCD$ to‘rtburchakning qolgan burchaklarining har biri ham 90° ga tengligi isbotlanadi.

Shunday qilib, $ABCD$ to‘rtburchakning tomonlari teng va barcha burchaklari 90° dan iborat bo‘lgani uchun u kvadrat bo‘ladi. Tomoni $a+b$ bo‘lgan kvadratning yuzi

$$S=(a+b)^2.$$

ga teng.

Bundan tashqari, tomoni $a+b$ bo‘lgan kvadrat har birining yuzi $\frac{1}{2}ab$ ga teng bo‘lgan to‘rtta teng to‘g‘ri burchakli uchburchakdan hamda c tomonli kvadratdan tashkil topgan. Shuning uchun

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}ab+c^2 = 2ab+c^2.$$

Shunday qilib, I_6 aksiomaga ko‘ra

$$(a+b)^2=2ab+c^2 \text{ yoki } a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

bundan

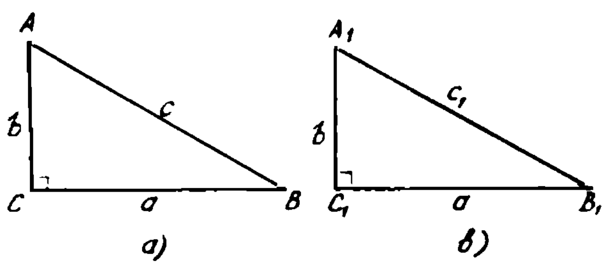
$$\boxed{c^2=a^2+b^2 \quad \text{yoki} \quad a^2+b^2=c^2}$$

kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu yerda biz Pifagor teoremasining isbotlaridan birini keltirdik, xolos.

T e o r e m a (Pifagor teoremasiga teskari teorema). *Agar uchburchak bir tomonining kvadrati qolgan ikki tomoni kvadratlarining yig‘indisiga teng bo‘lsa, u holda uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.*

I s b o t. ABC uchburchakning tomonlari a, b va c bo‘lib, $c^2=a^2+b^2$ bo‘lsin (23- *a* rasm). $\angle C_1=90°$ ekanini isbotlaymiz.



23- rasm.

To'g'ri burchagi C_1, katetlari a, b va gipotenuzasi c_1 bo'lgan to'g'ri burchakli $A_1B_1C_1$ uchburchakni ko'raylik (23- *b* rasm). Pifagor teoremasiga ko'ra $c_1^2=a^2+b^2$. Lekin shartga ko'ra $c^2=a^2+b^2$ edi. Bulardan $c_1^2=c^2$ ekanligi kelib chiqadi, bundan esa $c_1=c$ ga ega bo'lamiz. Yasashga ko'ra $BC=B_1C_1=a$ va $AC=A_1C_1=b$, shuningdek, isbotga ko'ra $AB=A_1B_1=c$ edi. Shunday qilib, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar teng bo'ladi. Bundan $\angle C=\angle C_1=90°$, ya'ni ABC uchburchakning to'g'ri burchakli ekani kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

TARIXIY MA'LUMOT

$a^2+b^2=c^2$ munosabatni qanoatlantiruvchi uchta butun musbat a, b va c son *Pifagor uchlik sonlari* deyiladi. Agar to'g'ri burchakli uchburchak katetlari va gipotenuzasining uzunliklari butun sonlar bilan ifodalansa, bu sonlar Pifagor uchligini hosil qiladi. Aksincha, har qanday Pifagor uchlik sonlari tomonlari butun sonli to'g'ri burchakli uchburchakni aniqlaydi. Bunday uchlikka 3, 4 va 5 sonlari misol bo'la oladi. Haqiqatan, $3^2+4^2=5^2$. Tomonlari 3, 4 va 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasashdan qadimgi Misrda yer ustida to'g'ri burchak yasash uchun foydalanilgan. Buning uchun ular arqonchani teng 12 qismga tugun qilib bo'lishar va oxirlarini bog'lashar edi. Keyin arqonchani tomonlari 3, 4 va 5 bo'limli uchburchak hosil qiladigan qilib yerda tortishar edi. Uchburchakning 5 bo'limli tomoni qarshisidagi burchak to'g'ri burchak bo'lar edi.

To'g'ri burchakni yuqoridagi usulda yasash munosabati bilan tomonlari 3, 4 va 5 birlik bo'lgan uchburchak ko'pincha «misr uchburchagi» deb ataladi.

Tomonlari butun sonli to'g'ri burchakli uchburchak tuzish qoidalaridan biri ham pifagorchilarga tegishli, chunonchi a, $\frac{a^2-1}{2}$ va $\frac{a^2+1}{2}$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda a – ixtiyoriy toq son. Shuningdek, boshqa bir qoida ham bor: a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$ va $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda a – juft son.

Bu qoidalardan foydalanib, quyidagi namuna bo'yicha Pifagor sonlari jadvalini tuzish mumkin:

a katet	b katet	c gipotenuza	a katet	b katet	c gipotenuza
3	4	5	12	35	37
5	12	13	13	84	85
7	24	25	16	63	65
9	40	41	17	144	145
11	60	61	19	180	181

Agar a, b, c va sonlar Pifagor uchlik sonlarini hosil qilsa, ma, mb va mc sonlar ham Pifagor sonlari bo'lishi o'z-o'zidan ayon, bunda m–butun musbat son. Demak, $2\cdot3$, $2\cdot4$ va $2\cdot5$, ya'ni 6, 8 va 10 sonlari ham Pifagor uchlik sonlarini tashkil etadi yoki $3\cdot5$, $3\cdot12$ va $3\cdot13$, ya'ni 15, 36 va 39 sonlari ham Pifagor sonlari bo'ladi.

Shuningdek, katetlari a, b va gipotenuzasi c bo'lgan uchburchaklarning tomonlari $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$ formulalar bilan ifodalanishini isbotlash mumkin, bunda m va n ixtiyoriy natural sonlar bo'lib, unda $m>n$.

46. To'g'ri burchakli uchburchakning a va b katetlariga ko'ra gipotenuzasini toping: 1) $a=12$; $b=16$; 2) $a=15$; $b=18$; 3) $a=\frac{3}{7}$; $b=\frac{4}{7}$; 4) $a=b$, $b=16\sqrt{3}$.

47. To'g'ri burchakli uchburchakda a va b katetlar, c esa gipotenuza. Agar 1) $b=24$, $c=26$; 2) $b=7$, $c=9$; 3) $b=12$; $c=15$; 4) $b=2\sqrt{3}$, $c=4\sqrt{3}$ bo'lsa, a ni toping.

48. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi c ga teng bo'lsa, uning $60°$ li burchagi qarshisidagi katetni toping.

49. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakda: a) agar $AB=10$, $AC=26$ bo'lsa, AD ni; b) agar $CD=4{,}5$; $AC=7{,}5$ bo'lsa, BC ni toping.

50. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 17 sm, asosiga tushirilgan balandligi esa 15 sm ga teng. Asosning uzunligini toping.

51. Teng yonli, to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi $5\sqrt{2}$ sm ga teng. Katetlarini toping.

52. Uydan simyog'ochgacha bo'lgan masofa 16 m, simyog'ochning balandligi 12 m, uyning balandligi 6 m bo'lsa, uy tomidan simyog'och uchigacha bo'lgan masofani toping.

53. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 7 sm, ikkinchisi gipotenuzadan 1 sm qisqa. Gipotenuzani va ikkinchi katetni toping.

54. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 25 sm, katetlarining nisbati 3:4 ga teng. Katetlarni toping.

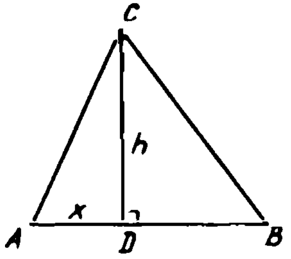
55. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi uning katetlarining biridan 3 sm ortiq. Ikkinchi katet 9 sm ga teng. Birinchi katetni va gipotenuzani toping.

56. Agar uchburchakning tomonlari quyidagi sonlar bilan ifodalangan bo'lsa, u to'g'ri burchakli uchburchak bo'lishi yoki bo'lmasligini aniqlang:

1) 12, 16, 20; 2) 5, 6, 7; 3) 18, 24, 30; 4) 20, 48, 52; 5) 6, 8, 12; 6) 11, 9, 13; 7) 30, 40, 50; 8) 6, 7, 8.

Har bir holda javobni asoslang.

57. To'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti 35 sm. Ikkinchi katet bilan gipotenuzaning yig'indisi 49 sm. Gipotenuza bilan ikkinchi katetni toping.



24- rasm.

58. 1) Rombning perimetri 8 m, diagonallaridan biri 2,4 m. Ikkinchi diagonalini va yuzini toping.

2) Agar rombning tomoni 10 sm ga, diagonallaridan biri 12 sm ga teng bo'lsa, uning ikkinchi diagonalini va yuzini toping.

3) Agar rombning diagonallari 10 sm ga va 24 sm ga teng bo'lsa, uning tomonini va yuzini toping.

Q a d i m i y m a s a l a. Uchala tomoni berilgan uchburchakning yuzini toping.

Al-Xorazmiy o'tkir burchakli va turli tomonli uchburchakning yuzi uchburchak balandligi va asosining yarmisi ko'paytmasi bilan aniqlanishini uqtirib, tomonlari 15, 14 va 13 birlikdan iborat bo'lgan ABC uchburchakning yuzi quyidagi tartibda hisoblanishini tushuntiradi (24- rasm).

Y e c h i s h. $BC=15$, $AB=14$, $AC=13$, $AD=x$, $CD=h$ bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$h^2=15^2-(14-x)^2 \text{ va } h^2=13^2-x^2.$$

Bu ikki tenglikdan:

$$15^2-(14-x)^2=13^2-x^2.$$

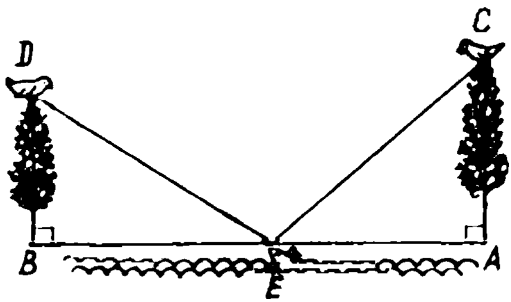
Buni soddalashtirsak, $28x-140$ yoki $x=5$ kelib chiqadi. U holda $h^2=13^2-5^2=169-25=144$, bundan $h=12$.

Demak, uchburchakning yuzi:

$$S_\Delta = CD\cdot\frac{1}{2}BC = 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 14 = 84 \text{ (kv. birlik).}$$

Bu masalani yechishda Al-Xorazmiy Geron formulasidan foydalanmagan. Natijaning to'g'riligini Geron formulasidan foydalanib tekshirib ko'ring.

M a s a l a. Tomonlari 5, 6 va 9 birlikdan iborat bo'lgan



25- rasm.

uchburchakning yuzini toping. Masalani Xorazmiy usulidan foydalanib yeching.

I k k i q u s h v a b a l i q h a q i d a g i q a d i m i y m a s a l a. Eni 60 birlik bo'lgan daryoning ikki sohilida bo'yi 20 va 25 birlik uzunlikdagi ikki terak bo'lgan. Bularning uchlarida turgan ikkita qush suv yuzasida ko'ringan baliq tomon to'g'ri chiziq bo'ylab bir vaqtda va bir xil tezlikda uchib borib, unga bir vaqtda yetganlar. Daryoning baliq turgan joyi bilan ikkala terakning tublari bir to'g'ri chiziqda yotadi. O'sha baliq ko'ringan joydan terak tublarigacha bo'lgan masofalarni va ikkala qushning uchib o'tgan yo'llarini aniqlang.

G' i yo s i d d i n K o sh i y u s u l i. Berilgan: $DB\perp AB$, $CA\perp AB$, $BD=20$, $AC=25$, $AB=60$ (25- rasm).

T o p i sh k e r a k: BE, EA, DE, EC masofalarni.

G'iyosiddin Koshiy usulida yechish. BE ni x deb belgilaylik. Masalaning shartiga ko'ra:

$$BE^2+BD^2=DE^2, \qquad (1),$$

$$EA^2+CA^2=EC^2, \qquad (2),$$

$$EA=AB-BE=AB-x; \; DE=EC. \qquad (3),$$

chunki qushlar bir xil masofani uchib o'tganlar. Bularga asosan quyidagi tenglik o'rinli:

$$BE^2+BD^2=EA^2+CA^2$$

yoki x^2–$400=(60-x)^2-625$, bundan

$$x = 31\frac{7}{8};\ AE = 28\frac{1}{8},\ DE = EC = \sqrt{1416\frac{1}{64}} \approx 37{,}13$$

kelib chiqadi.

Bundan ko'rinadiki, Koshiy bu masalani faqat Pifagor teoremasidan foydalanib, algebraik tenglama tuzish orqali yechgan.

Bu masalani Abu Rayhon B e r u n i y boshqacha usul bilan yechgan.

2.3. Pifagor teoremasining ba'zi tatbiqlari haqida

Pifagor teoremasi amaliy va nazariy masalalarni hal qilishda juda ko'p ishlatiladi. Biz shulardan ba'zilari bilan Sizlarni tanishtirib o'tamiz.

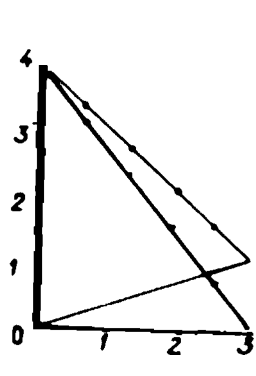
a) U s t u n n i t i k o' r n a t i sh.

Pifagor sonlari deb atalgan 3, 4, 5 sonlari xossasidan foydalanamiz. Bu sonlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$3^2+4^2=5^2.$$

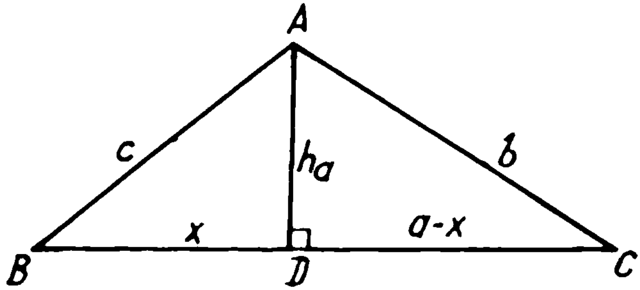
Bundan katetlari 3 va 4 uzunlik birligiga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 5 birlikka teng ekani kelib chiqadi.

Ustunni tik o'rnatish uchun ustun uzunligini ip bilan o'lchaymiz. So'ngra bu ipni ikki marta teng ikkiga bo'lamiz. Bunda ustunga nisbatan bir uzunlik birligini hosil qilamiz. Ustun esa to'rt birlikka teng bo'ladi. Ustun ostidan boshlab uch birlik o'lchaymiz va bu nuqtadan ustun uchigacha masofani o'lchaymiz. Agar bu masofa besh birlikka teng bo'lsa, ustun tekislikka nisbatan tik turgan bo'ladi. Faqat bu ishni kamida ikki yo'nalishda bajarish kerak (26- rasm).



26- rasm.

b) U c h b u r c h a k n i n g b a l a n d l i g i n i t o p i s h.



27- rasm.

Tomonlarining uzunliklari a, b va c bo'lgan ABC uchburchak berilgan (27- rasm). Uning A uchidan BC tomonga tushirilgan $AD=h_a$ balandlikning uzunligini topamiz. Balandlikning asosi BC tomonni x va $a-x$ uzunlikdagi kesmalarga ajratsin.

To'g'ri burchakli ADB va ADC uchburchaklarning tomonlari uchun Pifagor teoremasini qo'llaymiz.

ADB uchburchakda:

$$h_a^2 = c^2 - x^2 \tag{1}$$

hamda ADC uchburchakda:

$$h_a^2 = b^2 - (a - x)^2. \tag{2}$$

Bu tengliklarni solishtirsak:

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2 \text{ yoki } c^2-x^2=b^2-a^2+2ax-x^2.$$

Bundan

$$x = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} \text{ yoki } x^2 = \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}.$$

x^2 ning bu qiymatini (1) tenglikka qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$h_a^2 = c^2 - \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$$

Bu kasrning suratini ko'paytuvchilarga ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$$h_a^2 = \frac{(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2)}{4a^2}.$$

Hosil qilingan ifodaning suratidagi ikkala ko‘paytuvchining shaklini o‘zgartiramiz:

$$2ac + c^2 + a^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$$

va

$$2ac - c^2 - a^2 + b^2 = b^2 - (a^2 - 2ac + c^2) = b^2 - (a - c)^2 =$$
$$= (b + a - c)(b - a + c).$$

Demak,

$$h_a^2 = \frac{1}{4a^2}(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a),$$

bundan

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)}.$$

Agar ABC uchburchakning perimetrini $2p$ (p — yarim perimetr) bilan belgilasak, $2p=a+b+c$ bo‘ladi. U holda

$$a + c - b = 2p - b - b = 2p - 2b = 2(p - b);$$
$$a + b - c = 2p - c - c = 2p - 2c = 2(p - c);$$
$$b + c - a = 2p - a - a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Va nihoyat, ildiz ostidagi ko‘paytuvchilarni ularning qiymatlari bilan almashtirib, oxirgi natijani hosil qilamiz:

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a)}$$

yoki

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.}$$

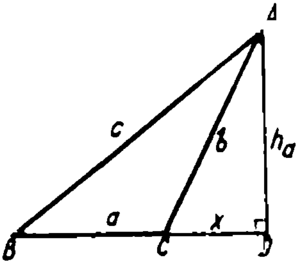
Xuddi shuningdek,

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

va

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.}$$

ekanini topish qiyin emas.



28- rasm.

Biz 27- rasmda balandlikning asosi uchburchak tomonida yotgan holni ko'rdik. Bu formulalar balandlik uchburchak tomonining davomiga tushganda ham o'rinli bo'lishini mustaqil isbot qiling (28- rasm).

d) G e r o n f o r m u l a s i. Biz tomonlari uzunligi ma'lum bo'lganda, uchburchakning balandligini hisoblashni o'rgandik. Ma'lumki, uchburchak yuzini

$$S = \frac{1}{2}ah$$

formula bilan ham hisoblasa bo'ladi.

Balandlik o'rniga uning uchburchak tomonlari orqali ifodasini qo'yib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S_{\Delta} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Bu formula milodning I asrida yashagan qadimgi yunon olimi Iskandariyalik Geron tomonidan topilgan bo'lib, *Geron formulasi* deb ataladi.

Geron formulasi uchburchakning uchala tomoni uzunligi ma'lum bo'lganda uning yuzini hisoblash uchun ishlatiladi.

e) T o' g' r i b u r c h a k l i u c h b u r c h a k l a r n i n g t e n g l i g i.

7- sinfda ko'rilgan «To'g'ri burchakli uchburchaklarning gipotenuzasi va kateti bo'yicha tenglik alomati»ni Pifagor teoremasining bevosita natijasi sifatida qarash mumkin.

T e o r e m a. *Agar bir to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va kateti ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va katetiga mos ravishda teng bo'lsa, bu uchburchaklar o'zaro tengdir.*

Uni isbotlaymiz. Pifagor teoremasidan foydalanib, berilgan uchburchaklarning ikkinchi katetini gipotenuzasi va berilgan kateti orqali ifodalaymiz:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Teorema shartiga ko'ra ular teng. Shunday qilib, ikki to'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti va gipotenuzasi teng bo'lsa, u holda ularning ikkinchi kateti ham teng bo'lar ekan. Demak, ko'rilayotgan uchburchaklarning uchala tomoni mos ravishda teng bo'lgani uchun ular o'zaro tengdir. Teorema isbotlandi.

MASALALAR

59. 1) ABC uchburchakda AB=5 sm, BC=7 sm va AC=10 sm bo'lsa, AC tomonga tushirilgan balandlikni toping.

60. Tomonlari 10 sm, 10 sm va 12 sm ga teng bo'lgan uchburchakning balandliklarini va yuzini toping.

61. To'g'ri to'rtburchakning diagonali uning tomonlaridan har doim katta bo'lishini isbotlang.

62. ABC uchburchakda AC tomonga tushirilgan BD balandlik uni AD va DC kesmalarga ajratadi. Agar $\angle A$=45° va AD=4 sm bo'lsa, BD balandlikni toping.

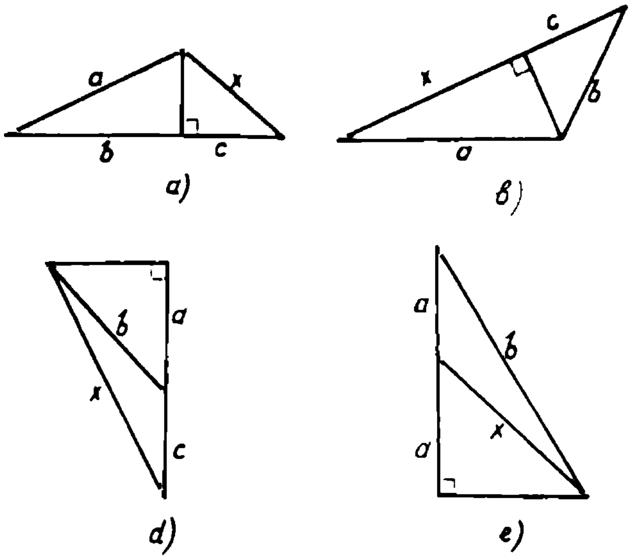
63. Rasmdagi noma'lum uzunliklarni toping (29- rasm).

64. Uchta tomoniga ko'ra uchburchakning yuzini toping:

1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80;

4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

65. Tomonlari 10, 14, 16 bo'lgan uchburchak berilgan. Uchlari shu uchburchak tomonlarining o'rtalarida bo'lgan uchburchakning yuzini toping.



29- rasm.

QO'SHIMCHA MASALALAR

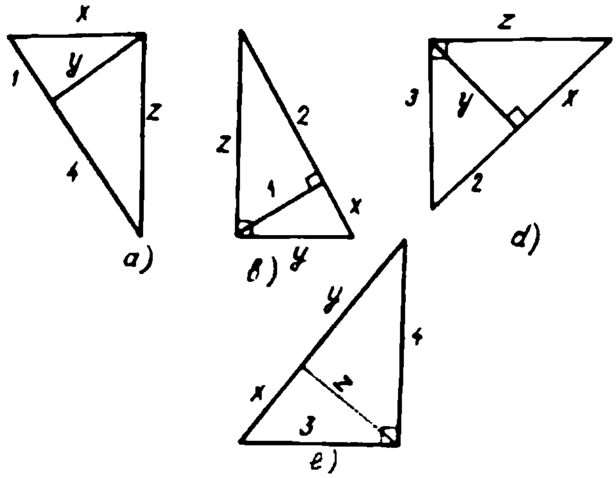
66. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari 3:4 nisbatda bo'lib, gipotenuzasi 50 mm bo'lsa, to'g'ri burchak uchidan tushirilgan balandlik gipotenuzani qanday kesmalarga ajratishini toping.

67. Tomonlari 5 sm, 12 sm, 13 sm bo'lgan uchburchakning katta tomoniga tushirilgan balandlik shu tomonni qanday kesmalarga ajratadi? Bu uchburchakning turini aniqlang.

68. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan tushirilgan balandlik gipotenuzani biri ikkinchisidan 11 sm katta bo'lgan kesmalarga ajratadi. Agar uchburchakning katetlari 6:5 nisbatda bo'lsa, gipotenuzaning uzunligini toping.

69. To'g'ri burchakli trapetsiyaning burchaklaridan biri 135°, o'rta chizig'i 18 sm, asoslari 1 : 8 nisbatda bo'lsa, trapetsiyaning kichik yon tomonini toping.

70. To'g'ri burchakli *ABC* uchburchakning *C* to'g'ri bur-



30- rasm.

chagi uchidan gipotenuzaga CD perpendikulyar o'tkazilgan bo'lsa, quyidagilarni isbotlang:

a) $CD^2=AD\cdot DB$; b) $AC^2=AD\cdot AB$; d) $BC^2=BD\cdot BA$.

71. 1) Rasmdan x, y, z, larning uzunliklarini hisoblang (30-rasm).

2) Teng tomonli uchburchakning yuzi $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ formula bo'yicha hisoblanadi. Shuni isbotlang, bunda a uchburchakning tomoni. Agar teng tomonli uchburchakning tomoni: 1) 10 sm; 2) 1,2 sm; 3) $2\sqrt{2}$ sm ga teng bo'lsa, uning yuzini toping.

72. a) Agar teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm ga teng bo'lsa, balandligini; b) agar teng tomonli uchburchakning balandligi 4 sm ga teng bo'lsa, uning tomonini toping.

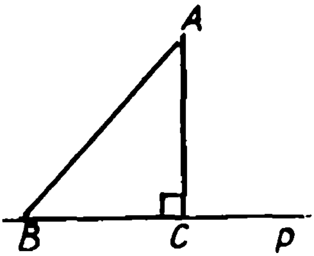
73. Agar teng yonli uchburchakda: 1) asosi 12 sm ga, asosiga tushirilgan balandlik esa 8 sm ga teng bo'lsa; 2) asosi 18 sm ga, asosining qarshisidagi burchagi esa 120° ga teng bo'lsa, uning yon tomonini va yuzini toping.

74. To'g'ri burchakli uchburchakning a va b katetlari bo'yicha gipotenuzaga o'tkazilgan balandlikni toping. Bunda: 1) $a=20$, $b=48$; 2) $a=36$, $b=48$.

3- §. UCHBURCHAKDA METRIK MUNOSABATLAR

3.1. Perpendikulyar. Og‘ma. Proyeksiya

Tekislikda biror p to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan A nuqta berilgan bo‘lsin (31- rasm). A nuqtadan p to‘gri chiziq bilan kesishuvchi va unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Kesishish nuqtasi C bo‘lsin, *AC kesma A nuqtadan p to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar deb ataladi.*



31- rasm.

A nuqtadan p to‘g‘ri chiziqqacha masofa deb AC perpendikulyarning uzunligiga aytiladi.

p to‘g‘ri chiziqda C nuqtadan farqli B nuqtani olamiz va uni A nuqta bilan tutashtiramiz. *Berilgan A nuqtadan berilgan p to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan og‘ma deb A nuqtani p* to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bilan tutashtiruvchi va to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lmagan istalgan AB kesmani aytiladi. *Kesmaning p to‘g‘ri chiziqda yotgan oxiri B og‘maning asosi deyiladi. Bitta nuqtadan o‘tkazilgan perpendikulyar va og‘maning asoslarini tutashtiruvchi kesma og‘maning (to‘g‘ri chiziqdagi) proyeksiyasi deyiladi.*

Perpendikulyar, og‘ma va uning proyeksiyasi uchun ushbu teorema o‘rinlidir.

T e o r e m a. *Og‘ma perpendikulyardan va o‘zining proyeksiyasidan kattadir.*

I s b o t. Og‘ma, perpendikulyar va og‘maning proyeksiyasi mos ravishda to‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning gipotenuzasi va katetlaridir. Pifagor teoremasiga asosan:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Musbat qo‘shiluvchilardan birini tashlab yuborsak,

$$AB^2 > AC^2 \text{ yoki } AB^2 > CB^2$$

ekanini kelib chiqadi. Demak, $AB>AC$ va $AB>CB$. Teorema isbotlandi.

MASALALAR

75. To'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa uzunliklari teng bo'lgan nechta og'ma o'tkazish mumkin?

76. Kesma proyeksiyasining uzunligi qanday holda shu kesmaning uzunligiga teng bo'ladi? Nolga-chi?

77. Imoratning birinchi va ikkinchi qavatiga narvonlar qo'yilgan. Narvonlarning pastdagi uchlari devordan a metr masofada hamda birinchi narvon uzunligi b m va ikkinchisining uzunligi c m bo'lsa, ikkinchi qavat birinchi qavatdan qancha baland bo'ladi?

78. Romb tomonining diagonallarga proyeksiyasi 20 sm va 21 sm. Romb tomonini toping.

79. Aylananing markazidan to'g'ri chiziqqacha masofa radiusdan 2 sm kichik. To'g'ri chiziq aylanani ikkita nuqtada kesib o'tadi. Bu nuqtalarni tutashtiruvchi vatar 16 sm. Aylananing radiusini toping.

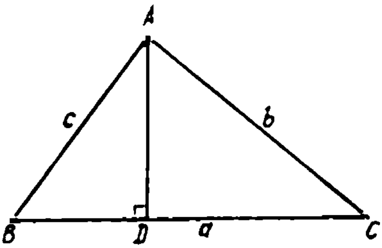
3.2. Uchburchak tengsizligi

T e o r e m a. *Ixtiyoriy uchburchakning har bir tomoni uzunligi qolgan ikki tomon uzunliklari yig'indisidan kichikdir (ularning ayirmasidan kattadir).*

I s b o t. ABC uchburchakning tomonlari $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ bo'lsin. $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ o'rinli ekanini isbotlaymiz. Teoremani uchburchak tomonlarining eng kattasi uchun isbot qilish yetarlidir. Uchburchakning boshqa tomonlari uchun teoremaning o'rinli ekani ravshan.

Uchburchakning A uchidan uning eng katta tomoni BC ga AD perpendikulyarni o'tkazamiz (32- rasm).

Perpendikulyarning asosi D nuqta BC tomonni ikki BD va DC kesmaga ajratadi.



32- rasm.

Perpendikulyar, og‘ma va uning proyeksiyasi xossasiga ko‘ra

$AB>BD$ va $AC>DC$ yoki $BD<AB$ va $DC<AC$.

Bundan

$BC=BD+DC<AB+AC$ yoki $a<b+c$.

Demak, $a<b+c$. Teorema isbotlandi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilish uchun tengsizlikning ikkala tomonidan c ni ayiramiz:

$$a-c<b+c-c \text{ yoki } a-c<b.$$

Bundan $b>a-c$ hosil bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, tengsizliklarni boshqa tomonlar uchun ham ko‘rsatish mumkin.

Ushbu natija o‘rinli ekanini o‘zingiz isbot qiling.

N a t i j a. *Ikki nuqtani tutashtiruvchi kesmaning uzunligi bu nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziq uzunligidan kichikdir.*

MASALALAR

80. A, B, C bir-biridan farqli nuqtalar bo‘lsin. Bu nuqtalar uchun $AB+BC \geq AC$ ekanini ko‘rsating.

81. Ushbu: 1) 3 sm, 5 sm, 9 sm; 2) 5 sm, 9 sm, 11 sm uchlik kesmalarning qaysi biridan uchburchak yasash mumkin? Yasash mumkin bo‘lmagani uchun sababini ko‘rsating.

82. Agar uchburchakning bir tomoni 4 sm, ikkinchisi 6 sm bo‘lsa, uchinchi tomonning uzunligi qanday bo‘lishi mumkin?

83. Tomonlari 5 sm, 5 sm, 6 sm bo'lgan uchburchak ichiga 4,97 sm kesmani biror tomoniga perpendikulyar qilib joylashtirish mumkinmi?

84. Radiuslari r_1 va r_2, markazlari orasidagi masofa d ga teng aylanakar $r_1+r_2<d$ shartda kesishadimi?

3.3. Kesmalar nisbati. Proporsional kesmalar

Ikki kesmaning o'zaro nisbati deb, shu kesmalarning uzunliklari nisbatiga aytiladi.

Agar $AB=m$, $CD=n$ bo'lsa, ularning nisbati:

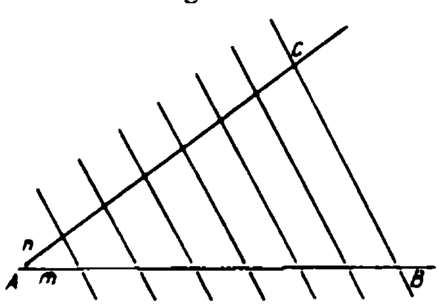
$$\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}.$$

Berilgan AB, CD, KL, MN kesmalar uchun AB : CD= =KL : MN bo'lsa AB va CD kesmalar KL va MN kesmalarga proporsional kesmalar deb ataladi.

T e o r e m a. *Burchak tomonlarini kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar burchak tomonlaridan proporsional kesmalar ajratadi.*

I s b o t. Berilgan A burchak tomonlarini B va C nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan kesaylik (33- rasm).

AB tomonni k ta teng bo'lakka bo'laylik. Bo'linish nuqtalaridan BC to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. U holda Fales teorema siga asosan AC tomon ham teng k ta bo'lakka bo'linadi. AB to-



33- rasm.

mondagi bir bo'lakning uzunligini m, AC tomondagi bo'lakning uzunligini esa n bilan belgilaylik. Bunda $AB=km$, $AC=kn$ ekanligi ravshan. Demak,

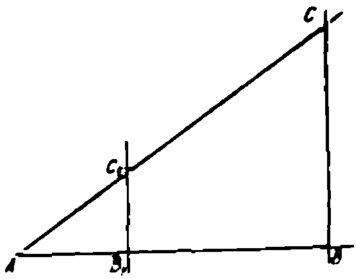
$$\frac{AB}{AC}=\frac{km}{kn}=\frac{m}{n}.$$

AB tomonda $AB_1=tAB$ tenglikni qanoatlantiruvchi B_1 nuqtani olaylik, t - ixtiyoriy haqiqiy son. B_1 nuqtadan BC ga parallel B_1C_1 to'g'ri chiziqni o'tkazaylik. Hosil bo'lgan AB_1 va AC_1 kesmalar uzunligi uchun quyidagi o'rinlidir (34-rasm):

$$AB_1=t\cdot AB=t\cdot k\cdot m,$$
$$AC_1=t\cdot AC=t\cdot k\cdot n.$$

Bundan

$$\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{tkm}{tkn}=\frac{m}{n}=\frac{AB}{AC}.$$



34- rasm.

Parallel kesuvchilar hosil qilgan kesmalar o'zaro proporsional ekan. Teorema isbotlandi.

MASALALAR

85. Qanday holda a, b, c, d kesmalar mos ravishda a_1, b_1, c_1, d_1 kesmalarga proporsional bo'ladi?

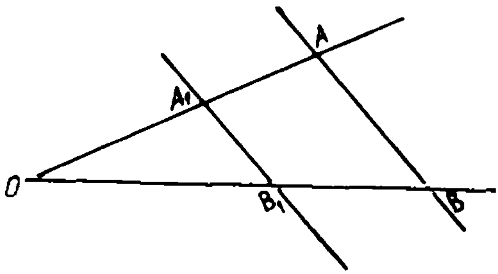
86. Agar AB=6 sm va CD=12 sm bo'lsa, bu kesmalar nisbatini toping. Agar kesma uzunliklari millimetrlarda, detsimetrlarda ifodalansa, natija o'zgaradimi?

87. Quyidagi tasdiq o'rinlimi?

Agar OA va OB nurlar AB va A_1B_1 parallel to'g'ri chiziqlar bilan kesilsa, hosil bo'lgan OA va OB kesmalar AA_1 va BB_1 kesmalarga proporsional bo'ladi (35- rasm).

88. Kesma 3 : 8 nisbatda ikki bo'lakka bo'lingan. Kichik bo'lak katta bo'lakdan 3,5 sm qisqa. Har bir bo'lakning uzunliklarini toping.

89. Agar geografiya xaritasidagi ikki manzil orasidagi masofa 1,5 sm ga teng bo'lib, xarita masshtabi 1 : 20000 bo'lsa, bu manzillar orasidagi masofa nimaga teng?



35- rasm.

90. C nuqta AB kesmani $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$ nisbatda bo'ladi:

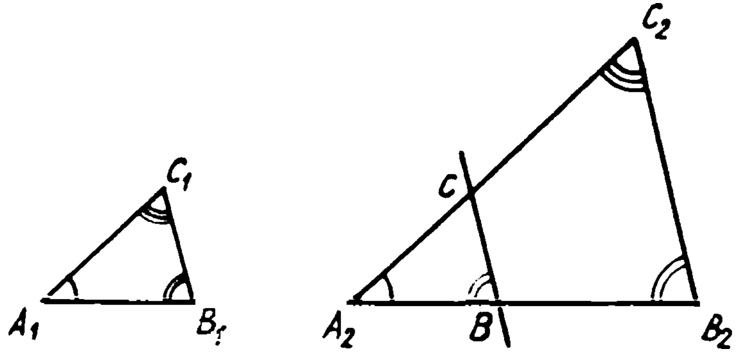
a) $\frac{AC}{AB}$, $\frac{CB}{AB}$ nisbatlarni toping;

b) agar AB kesmaning uzunligi 9 sm ga teng bo'lsa, AC va CB kesmalarning uzunliklarini toping.

3.4. Burchaklari teng bo'lgan uchburchaklar tomonlarining xossasi

Avvalgi bo'limdagi teoremadan ushbu natijaviy teorema kelib chiqadi.

T e o r e m a. *Agar ikki uchburchakning mos burchaklari teng bo'lsa, mos tomonlari proporsional bo'ladi.*



36- rasm.

I s b o t. $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ uchburchaklar berilgan. Ularning mos burchaklari o'zaro teng, ya'ni $\angle A_1=\angle A_2$, $\angle B_1=\angle B_2$ va $\angle C_1=\angle C_2$. Mos tomonlari proporsional ekanini isbotlashimiz kerak (36- rasm).

Agar $A_1B_1=A_2B_2$ bo'lsa, uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatidan $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ uchburchaklarning tengligi kelib chiqadi. Bunda mos tomonlar proporsional ekani ravshan.

$A_1B_1<A_2B_2$ bo'lsin. U holda A_2B_2 kesmadan A_1B_1 ga teng A_2B kesma ajratimiz va B nuqtadan B_2C_2 ga parallel BC to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq A_2C_2 tomonni C nuqtada kesib o'tsin. Hosil bo'lgan A_2BC uchburchak $A_1B_1C_1$ uchburchakka teng. Chunki $\angle A_2=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $A_1B_1=A_2B$.

$BC \parallel B_2C_2$ bo'lgani uchun

$$\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{A_2B_2}{A_2C_2}.$$

Demak,

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{A_2B_2}{A_2C_2}.$$

Xuddi shu kabi mulohaza bilan qolgan mos tomonlarning ham proporsional ekanini isbot qilish mumkin.

MASALALAR

91. To'g'ri burchakli ABC uchburchakning AB kateti 13 sm. O'tkir burchak uchi B dan AC gipotenuzaga tushirilgan BD balandlik 5 sm. BC katetni va DC kesmaning uzunligini toping.

92. Har qanday teng tomonli uchburchaklarda asosning balandlikka nisbati teng ekanligini isbotlang.

93. ABC va DEF to'g'ri burchakli uchburchaklarda A va D uchdagi o'tkir burchaklar teng. Agar $AB=4$ sm, $DE=20$ sm bo'lsa, qolgan mos tomonlar nisbatini toping.

94. Uchburchak yuzlari nisbati 2:7 kabi, tomonlari nisbati esa 3 ga teng bo'lsa, balandliklar nisbatini toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

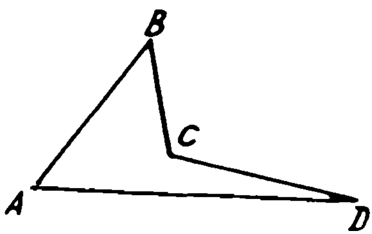
95. Uchburchakning yon tomonlari 30 sm va 25 sm, asosiga tushirilgan balandligi 24 sm bo'lsa, uchburchakning asosini toping.

96. To'g'ri chiziqning proyeksiyasi har doim ham to'g'ri chiziq bo'ladimi?

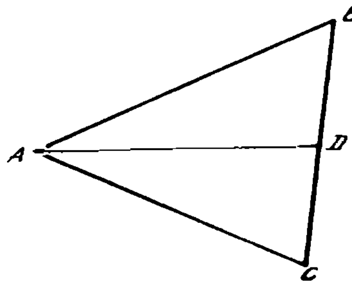
97. α tekislikda yotmaydigan M nuqta berilgan bo'lsin. Shu M nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofa qanday aniqlanadi?

98. 37- rasmda $AB+BC+CD>AD$ ekanini ko'rsating.

99. To'g'ri to'rtburchak diagonallari uzunliklarining yig'indisi shu to'rtburchakning perimetridan kichikligini isbotlang.



37- rasm



38- rasm.

100. BC tomonga tegishli ixtiyoriy D nuqta uchun

$$AD < \frac{AB+AC}{2}$$

ekanini isbotlang (38- rasm).

101. Agar: 1) AB=5 m, BC=7 m, AC=12 m;
2) AB=10,7 m, BC=17,1 m, AC=6,4 m;
3) AB=18,2 m, BC=16 m, AC=2,2 m

bo'lsa, A, B, C nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

102. 39- rasmda $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$ bo'lsa, quyidagini isbotlang:

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1.$$

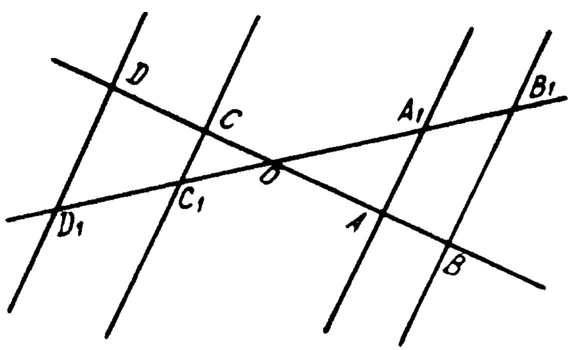
103. Ikki kesmaning nisbati 0,45 ga teng. Ulardan kichigining uzunligi 9 sm bo'lsa, kattasining uzunligi qancha bo'ladi?

104. Agar $AC \| DM$, $BC : BD = 3:2$ va AC=9 sm bo'lsa, DM kesmaning uzunligini toping (40- rasm).

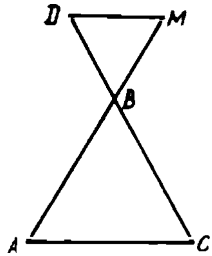
105. 41- rasmda ko'rsatilgan x kesmaning uzunligini hisoblang.

TARIXIY MA'LUMOT

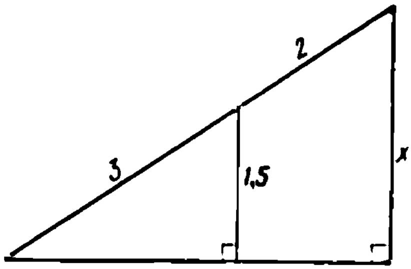
Abu Rayhon Muhammad ibn Ahmad B e r u n i y (973–



39- rasm.



40- rasm.



41- rasm.

1048) o'rta asrlarda O'rta Osiyo ilmiy tafakkurining ulug' namoyondalaridan biri. U Xorazmning qadimi Kot (hozirgi Beruniy) shahrida tug'ilgan.

Beruniy buyuk olim bo'lib, xususan geometriya sohasida ham juda ko'p ishlar qilgan.

Beruniyning geometriyaga oid ishlari uning ushbu kitoblarida bayon etilgan:

Astronomiya — bu asarning fors tilidagi qo'lyozmalari Toshkent, London, Parij, Istanbul va Tehronda saqlanadi.

Soyalar — asarning qo'lyozmasi Bankipur va Patnada saqlanadi. Faqat ingliz tiliga tarjima qilingan.

Quyosh tenglamasi haqida — qo'lyozma Bankipurda saqlanadi.

Astrolyabiya I va II — asarning I qo'lyozmasi Leyden, Istanbul, London, Berlin, Rampur va Tehronda, II qo'lyozmasi esa faqat Berlinda saqlanadi.

4- §. BURCHAK SINUSI

4.1. Sinusning ta'rifi

Biror o'tkir A burchak berilgan bo'lsin. Uning tomonlaridan birida $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nuqtalarni belgilab, bu nuqtalardan perpendikulyarlar o'tkazaylik (42- rasm).

Bu perpendikulyarlar burchakning ikkinchi tomonini C_1, C_2,

..., C_n nuqtalarda kesib o'tsin. Bunda umumiy A burchakka ega bo'lgan AB_1C_1, AB_2C_2, ..., AB_nC_n to'g'ri burchakli uchburchaklar hosil bo'ladi.

Proporsional kesmalar haqidagi teoremaga ko'ra, bu to'g'ri burchakli uchburchaklarning mos tomonlari proporsional, ya'ni

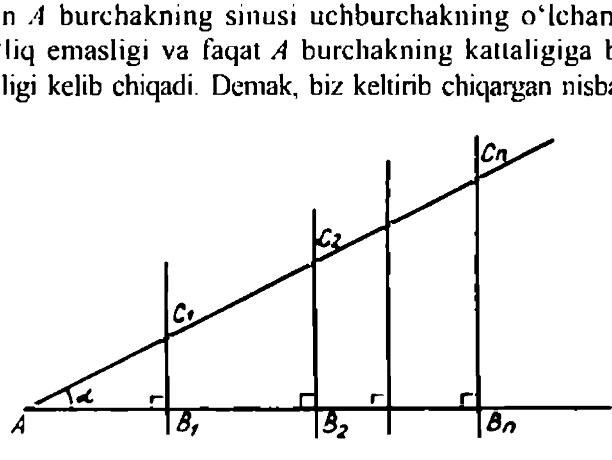
$$\frac{C_1B_1}{AC_1}=\frac{C_2B_2}{AC_2}=\ldots=\frac{C_nB_n}{AC_n}=\lambda.$$

λ son berilgan $\angle A$ burchak uchun o'zgarmas, chunki u C_n nuqtaning A burchak tomonining qayerida olinganiga bog'liq emas. Shu sonni A burchakning *sinusi* deb ataymiz. Bu son o'tkir burchaklari teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklarning shu burchak qarshisidagi kateti uzunligining uning gipotenuzasi uzunligiga nisbatiga teng.

Ta'rif. *To'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagi qarshisida yotgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning sinusi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:*

$$\sin A=\frac{C_1B_1}{AC_1}.$$

42- rasmdagi uchburchaklar tomonlarining proporsional ekanidan A burchakning sinusi uchburchakning o'lchamlariga bog'liq emasligi va faqat A burchakning kattaligiga bog'liq ekanligi kelib chiqadi. Demak, biz keltirib chiqargan nisbat faqat



42- rasm.

A burchakning, ya'ni α burchakning o'zgarishiga bog'liq funksiya. Shuning uchun bu funksiyani sinα deb maxsus belgi bilan belgilash qabul qilingan va u «*A* burchakning sinusi» yoki «sinus alfa» deb o'qiladi.

TARIXIY MA'LUMOT

S i n u s h a q i d a. Sinus haqidagi ma'lumot dastlab IV—V asrlardagi hind astronomlarining asarlarida uchraydi.

O'rta Osiyolik olimlar al-Xorazmiy, Beruniy, ibn Sino, Abdurahmon al Haziniy (XII asr) sinus uchun «al-jayb» atamasini ishlatishgan.

Hozirgi sin belgisini Simpson, Eyler, Dalamber, Lagranj (XVII asr) va boshqalar ishlatishgan.

MASALALAR

106. To'g'ri burchakli uchburchakning kateti 8 sm, shu katet qarshisidagi burchakning sinusi 0,8 ga teng bo'lsa, gipotenuza va ikkinchi katetni toping.

107. To'g'ri burchakli uchburchakning kateti va gipotenuzasi berilgan bo'lsa, o'tkir burchaklari sinuslarini va ikkinchi katetini toping:

1) a=6 sm, c=13 sm;
2) a=7 m, c=15 m;
3) a=11 sm, c=19 sm;
4) b=15 sm, c=25 sm;
5) b=18 sm, c=28 sm.

108. To'g'ri burchakli uchburchakning kateti va shu katet qarshisidagi burchakning sinusi ma'lum bo'lsa, uning gipotenuzasi, ikkinchi kateti va shu katet qarshisidagi burchakning sinusini toping:

1) a=5 sm; $\sin\alpha=0{,}5$;
2) a=16 sm; $\sin\alpha=\sqrt{3} : 2$;
3) a=7 sm; $\sin\alpha=\sqrt{2} : 2$;
4) a=12 sm; $\sin\alpha=3 : 5$;
5) a=21 sm; $\sin\alpha=1 : 7$.

109. Teng yonli uchburchakning balandligi 12,6 m ga, asosi esa 33,6 m ga teng. Uchburchak asosidagi burchakning sinusini va yon tomonini toping.

110. Rombning tomoni 241 m va balandligi 120 m ga teng. Uning burchagi sinusini toping.

4.2. Ixtiyoriy burchakning sinusi

Biz sinus ta'rifini o'tkir burchaklar uchungina keltirdik. Agar qaralayotgan burchak o'tmas yoki yoyiq bo'lsa ham, bu burchak bilan bog'liq o'zgarmas nisbatni ko'rsatish mumkin (43- rasm). Bu holda B_1, B_1, ..., B_n nuqtalardan o'tkazilgan perpendikulyar burchak tomonining davomi bilan kesishadi.

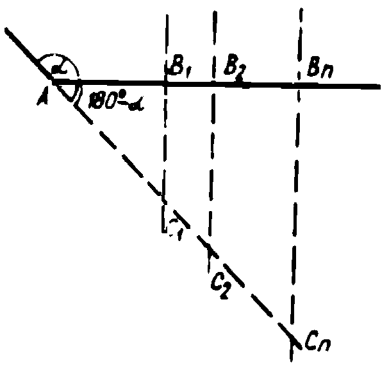
Ixtiyoriy burchak sinusini kiritishni soddalashtirish uchun markazi koordinatalar boshida va radiusi R ga teng aylana olamiz.

Aylana ustidagi ixtiyoriy A $(x; y)$ nuqtani qaraylik. A nuqtadan Ox o'qiga AB perpendikulyar tushiramiz (44- rasm). Hosil bo'lgan OBA uchburchak to'g'ri burchakli uchburchak va

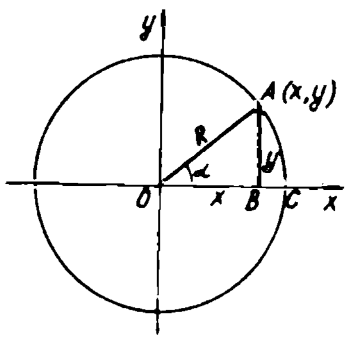
$$\sin\alpha = \frac{AB}{R}$$

ekanligini bilamiz.

Koordinata o'qlari va OA radius hosil qilgan α burchakni o'lchash uchun ushbu qoidani kiritamiz.

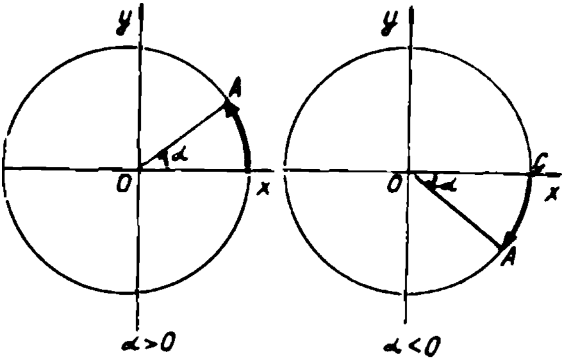


43- rasm



44- rasm.

Agar aylananing Ox o'qi bilan kesishgan C nuqtasidan A nuqtaga aylana yoyi bo'yicha borish uchun soat mili yo'nalishiga qarshi yurilsa, burchakni musbat kattalik bilan, aks holda esa burchakni manfiy kattalik bilan belgilaymiz (45-rasm).



45- rasm.

Ixtiyoriy burchak sinusi kattaligini A nuqtaning aylana bo'yicha ko'chishidan foydalanib aniqlaymiz.

T a ' r i f. *Ixtiyoriy α burchakning sinusi deb A nuqta ordinatasi y ning aylana radiusi R ga nisbatiga aytiladi:*

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}.$$

O'tkir burchaklaridan biri va gipotenuzalari teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklarning tengligidan foydalanib, burchak sinusi uchun quyidagi xossalarni ko'rsatish mumkin.

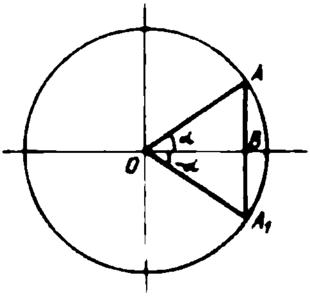
1 - x o s s a. $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$.

Haqiqatan ham (46- rasm), OBA uchburchak OBA_1 uchburchakka teng, bundan AB kesma BA_1 kesmaga teng. Ammo AB va BA_1 Oy o'qiga nisbatan qarama-qarshi yo'nalganligi uchun

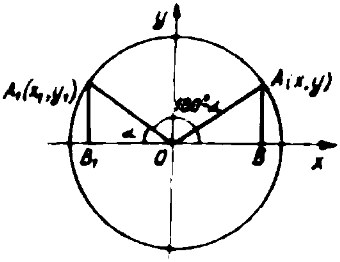
$$AB = y, \quad BA_1 = -y.$$

Shuning uchun

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad \sin(-\alpha) = -\frac{y}{R}.$$



46- rasm.



47-rasm.

Shunday qilib,

$$\sin\alpha = -\sin(-\alpha).$$

2-xossa.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha.$$

A_1 nuqtaning ordinatasini topish uchun 47- rasmdagi OB_1A_1 va OBA to'g'ri burchakli uchburchaklarning tengligidan foydalanamiz. Bunda $A_1B_1 = AB = y$. Shuning uchun

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{AB}{OA} = \sin\alpha.$$

Xuddi birinchi va ikkinchi xossalarga o'xshash,

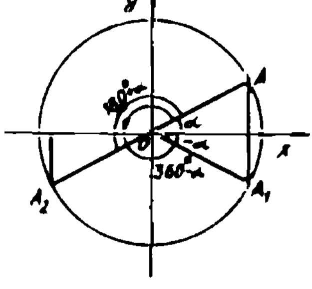
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, -\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$

tengliklarning o'rinli ekanini ko'rsatish mumkin (48- rasm).

MASALALAR

111. To'g'ri burchakli uchburchakda $\sin\alpha = 0{,}8$ va gipotenuza 5 sm ga teng. Gipotenuzaga tushirilgan balandlikni toping.

112. Teng yonli uchburchakning balandligi h m, asosi esa $2h$ m ga teng. Uchburchak asosidagi burchakning sinusini va yon tomonini toping.



48-rasm.

113. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakning A o‘tkir burchagi B o‘tkir burchagidan katta. Katetlardan AC kattami yoki BC mi?

114. Radiusi 5 ga teng bo‘lgan aylana ustida A (3; 4) nuqta yotibdi. Radiusning Ox o‘qi bilan tashkil qilgan burchagining sinusini hisoblang.

115. Agar $\sin\alpha = \frac{7}{9}$ bo‘lsa, $\sin(180°-\alpha)$ va $\sin(180°+\alpha)$ ning qiymatlari qanday bo‘ladi?

116. $\sin\alpha$ ning qiymati ma’lum bo‘lsa, $\sin(90°+\alpha)$, $\sin(270°+\alpha)$ ning qiymatlarini topsa bo‘ladimi?

4.3. Ba’zi burchaklarning sinusi qiymatlarini hisoblash

Ixtiyoriy burchak sinusining ta’rifi va uchburchak elementlarining xossalaridan foydalanib, 0°, 30°, 45°, 60° va 90° li burchaklarning sinusi qiymatlarini aniq hisoblash mumkin.

1. $\sin 0° = 0$, chunki 0° li burchakda OA aylana radiusining yo‘nalishi Ox o‘qining yo‘nalishi bilan ustma-ust tushadi va A nuqtaning ordinatasi $y=0$ bo‘ladi. Shuning uchun

$$\sin 0° = \frac{0}{R} = 0.$$

Demak, $\sin 0° = 0$.

2. $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Bu tenglikning to‘g‘ri ekanini isbotlash uchun ordinatalar o‘qi bilan 30° li burchak hosil qiluvchi OA radius va $-30°$ li burchak hosil qiluvchi OA_1 radius o‘tkazamiz (49- rasm).

Hosil bo‘lgan OA_1A uchburchak teng yonli uchburchak, $OA_1=OA=R$ va $\angle AOA_1=60°$. Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklar teng bo‘lgani uchun $\angle A=\angle A_1$. Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ekanligidan

$$\angle A + \angle A_1 + 60° = 180° \text{ ёки } \angle A = 60°.$$

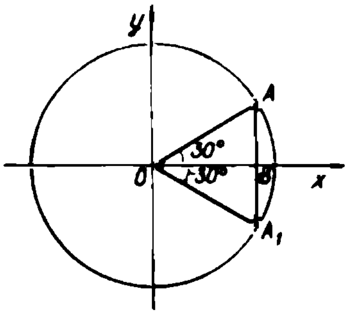
OA_1A uchburchakning barcha burchaklari 60° dan ekan.

Bundan uning tomonlari tengligi, ya'ni $AA_1=R$ ekani kelib chiqadi. OA_1A uchburchakda OB bissektrisa, u mediana ham bo'ladi. Shuning uchun

$$AB=\frac{1}{2}AA_1=\frac{R}{2}.$$

Shunday qilib,

$$\sin 30^\circ=\frac{AB}{R}=\frac{R}{2}=\frac{1}{2}.$$



49- rasm.

Demak, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

N a t i j a. *To'g'ri burchakli uchburchakda 30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng.*

3. $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchaklardan biri 45° bo'ladi, bundan uning katetlari o'zaro teng, ya'ni $x=y$ ekani kelib chiqadi (50- rasm).

Bu uchburchak uchun Pifagor teoremasi

$$x^2+y^2=R^2$$

ni qo'llasak

$$2y^2=R^2,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}R.$$

Bundan

$$\sin 45^\circ=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}R}{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ekani kelib chiqadi. Demak, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bu tenglikni isbot qilish uchun to'g'ri burchakli uchburchakning ikkinchi o'tkir burchagi 30° li ekanidan foydalanamiz (51-rasm). Bunda $AB = \frac{AC}{2}$. Pifagor teoremasiga ko'ra

$$AB^2 + CB^2 = AC^2, \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + CB^2 = AC^2$$

yoki $CB^2 = AC^2 - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{4}AC^2$, bundan $CB = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

ga ega bo'lamiz. Shunday qilib,

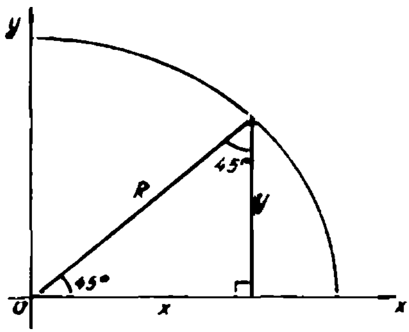
$$\sin 60^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}AC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Demak, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

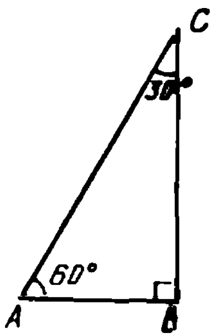
5. $\sin 90^\circ = 1$.

Bu holda OA radiusning yo'nalishi Oy o'qi yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi va A nuqtaning ordinatasi aylana radiusiga teng, ya'ni $y=R$. Shuning uchun $\sin 90^\circ = R : R = 1$.

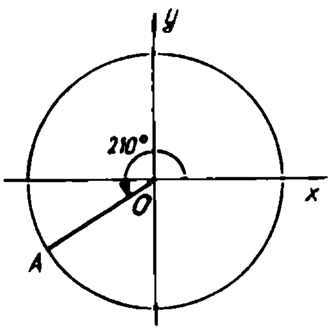
Demak, $\sin 90^\circ = 1$.



50- rasm.



51- rasm.



52- rasm.

MASALALAR

117. To'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklari sinuslari kvadratlarining yig'indisi 1 bo'lishini ko'rsating.

118. Ox o'qi bilan 210° li burchak tashkil etuvchi OA radius o'tkazilgan (52- rasm). Shu burchak sinusining qiymatini hisoblang.

119. 30° li burchak qarshisida yotgan katet gipotenuzaning yarmiga tengligini isbotlang.

120. sin 120°, sin 135° ning qiymatini toping.

121. O'tkir burchaklaridan birining sinusi 0,6 ga, ikkinchisining sinusi 0,8 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasash mumkinmi?

122. Ushbu burchaklar sinuslari qiymatlarini o'sish tartibida joylashtiring:

1) 30°, 150°, 225°; 2) 45°, 30°, 120°;
3) 30°, 90°, 180°; 4) 60°, 150°, 120°;
5) 135°, 150°, 60°.

4.4. Uchburchak yuzini burchak sinusi yordamida hisoblash

Uchburchakning yuzini berilgan ixtiyoriy ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha hisoblash mumkin.

ABC uchburchakning ikki tomoni uzunliklari a, b va ular orasidagi burchak kattaligi α ma'lum bo'lsin. U holda uchburchak yuzi uchun ushbu teorema o'rinli.

T e o r e m a. *Uchburchakning yuzi uning ikki tomoni uzunliklari bilan shu tomonlar orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga teng, ya'ni*

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha.}$$

I s b o t. ABC uchburchakda $BC=a$, $AC=b$ va $\angle ACB=\alpha$ bo'lsin. Uchburchakning A uchidan BC tomonga AD balandlik o'tkazamiz. Hosil bo'lgan ADC uchburchak – to'g'ri burchakli. Bu uchburchakdagi AD katet (53- rasm) ABC uchburchakning balandligiga teng. Bundan tashqari, $\frac{h_a}{b} = \sin\alpha$ yoki $h_a = b\sin\alpha$.

Ma'lumki, ABC uchburchakning yuzi formulasi $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. Bu formuladaga $h_a = b\sin\alpha$ ni qo'yib,

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \sin\alpha$$

ga ega bo'lamiz. Teorema isbotlandi.

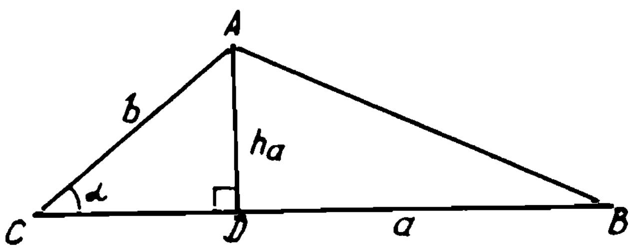
MASALALAR

123. Teng yonli uchburchakning asosi 12 m ga, yon tomoni 10 m ga teng bo'lsa, uning yuzi nimaga teng?

124. Gipotenuzasi α bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning yuzini toping.

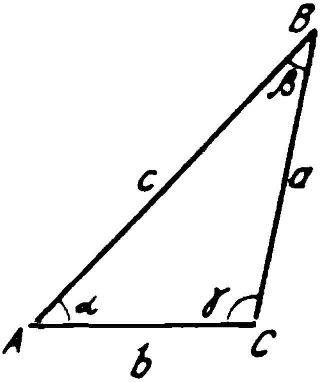
125. Parallelogrammning qo'shni tomonlari uzunliklari 6 sm va 11 sm, ular orasidagi burchak 30°. Parallelogrammning yuzini toping.

126. ABC uchburchakda $BC=a$, $AC=b$ va $\angle C=90°$ bo'lganda uchburchakning yuzi eng katta bo'lishini ko'rsating.



53- rasm.

4.5. Sinuslar teoremasi



54- rasm.

Tomonlari uzunliklari a, b, c va shu tomonlar qarshisidagi burchaklari α, β, γ bo'lgan ABC uchburchak berilgan bo'lsin (54- rasm).

T e o r e m a (sinuslar teoremasi). *Uchburchakning tomonlari ular qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional, ya'ni*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

I s b o t. Uchburchakning har bir burchagi sinusi yordamida uchburchak yuzini hisoblash formulalarini yozamiz:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Bu uch tenglikdan, ushbu tengliklarni hosil qilamiz:

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta \text{ ва } \frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Birinchi tenglikni $\frac{1}{2}a$ ga, ikkinchisini $\frac{1}{2}c$ ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$b\sin\gamma=c\sin\beta \text{ ва } a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

α, β, γ bo'rchaklarning har birining sinusi nolga teng bo'lmaganligi uchun

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \text{ va } \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Demak,

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.}$$

Teorema isbotlandi.

Sinuslar teoremasi geometriyada uchburchaklar haqida Pifagor teoremasidan keyingi yana bir muhim teoremadir.

MASALALAR

127. Uchburchakning ikki tomoni 5 sm va 9 sm. Bu tomonlar orasidagi burchakning sinusi 0,8. Uchburchakning 9 sm li tomoniga tushirilgan balandlikni toping.

128. Sinuslar teoremasidan foydalanib quyidagilarni isbotlang:

a) teng burchaklar qarshimida teng tomonlar yotadi va, aksincha;

b) katta burchak qarshisida katta tomon yotadi va, aksincha.

129. ABC uchburchakda A burchak bissektrisasi AK o'tkazildi. $AB : AC = KB : KC$ ekanligini isbotlang. (Bu uchburchak bissektrisasi xossasidir.)

130. 129- masalani sinuslar teoremasidan foydalanmay turib, yechish mumkinmi?

QO'SHIMCHA MASALALAR

131. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 10 sm, o'tkir burchaklaridan biri 30°. Ikkinchi o'tkir burchakni va katetlarni toping.

132. To'g'ri burchakli uchburchakning bir burchagi sinusi va gipotenuzasi berilgan bo'lsa, uning katetlarini toping:

1) $\sin\alpha=0{,}1$, $c=80$ sm; 4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=24$ sm;

2) $\sin\alpha=0{,}225$, $c=2$ m; 5) $\sin\alpha=0{,}5$, $c=10$ m.

3) $\sin\alpha=\frac{7}{8}$, $c=4$ m;

133. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari berilgan. Uning gipotenuzasini va burchaklari sinuslarini toping.

1) $a=5$, $b=8$; 4) $a=18$, $b=19$;

2) $a=4$, $b=9$; 5) $a=3$, $b=4$.

3) $a=11$, $b=20$;

134. Rombning diagonallari 4, 73 va 2,94 sm ga teng. Uning burchaklari sinuslarini toping.

135. To'g'ri to'rtburchakning diagonali uning bir tomonidan ikki marta katta. Uning diagonallari orasidagi burchaklarini toping.

136. O'tkir burchak sinusi qanday qiymat qabul qiladi?

137. Rombning diagonallari 10 sm va 24 sm ga teng bo'lsa, romb burchaklari yarmining sinuslarini toping.

138. Gipotenuzasi $7\sqrt{3}$ ga, o'tkir burchagi 60° ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning shu o'tkir burchagi qarshisidagi katetini toping.

139. Radiusi 5 ga teng bo'lgan aylana ustida $A(-3; 4)$ nuqta berilgan. OA radiusning Oy o'qi bilan tashkil qilgan burchagi sinusini toping.

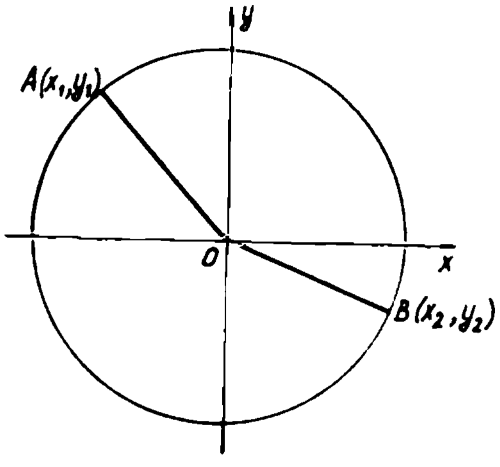
140. Birlik aylana ustida $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ulardan radiuslar o'tkazilgan. Qanday shart bajarilganda radiuslarning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchaklarining sinuslari qarama-qarshi ishorali bo'ladi? (55- rasm.)

141. Quyidagi jadvalni to'ldiring:

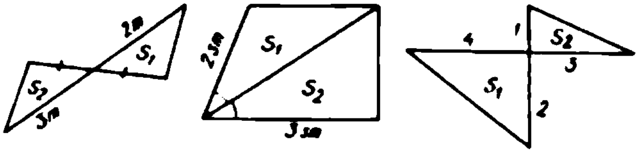
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$									

142. 56-rasmdagi uchburchaklar yuzlari nisbatini toping.

143. Agar uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ma'lum bo'lsa, shu burchakning bissektrisasini toping.



55- rasm.



56- rasm.

144. Parallelogrammning yuzi diagonallari va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.

145. Agar parallelogrammning tomonlari 2 m va 3 m, burchaklaridan biri esa 60° ga teng bo'lsa, uning yuzini toping.

146. Uchburchakning a tomoni va unga yopishgan α va β burchaklari bo'yicha uning yuzini toping.

147. Uchburchakning tomonlari uning balandliklariga teskari proporsional, ya'ni

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

ekanini isbotlang.

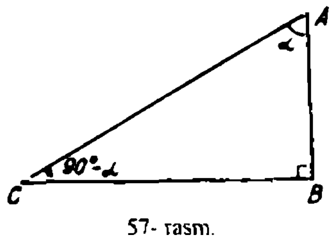
5- §. BURCHAK KOSINUSI

5.1. Kosinusning ta'rifi

Ma'lumki, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklaridan biri α ga teng bo'lsa, ikkinchisi $90^\circ - \alpha$ ga teng bo'ladi.

To'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchagining tomoni bo'lgan katet shu burchakka yopishgan katet deb ataladi.

Masalan, ABC uchburchakda AB katet A burchakka yopishgan katetdir (57- rasm). Ammo bu tomon C burchak uchun qarama-qarshi katet bo'ladi.



57- rasm.

Sinus funksiyasining ta'rifiga ko'ra

$$\sin C = \frac{AB}{AC}.$$

Demak, $AB : AC$ nisbat o'tkir burchakning kattaligigagina bog'liq bo'lgan miqdor ekan.

T a ' r i f. *To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning kosinusi deb ataladi.*

α burchakning kosinusi quyidagicha belgilanadi:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

O' q i l i sh i: «α burchakning kosinusi» yoki «kosinus alfa».

Kosinus ta'rifidan va sin C qiymatidan berilgan o'tkir burchak kosinusi unga to'ldiruvchi bo'lgan burchakning sinusiga teng ekanligini kelib chiqadi, ya'ni

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha).$$

TARIXIY MA'LUMOT

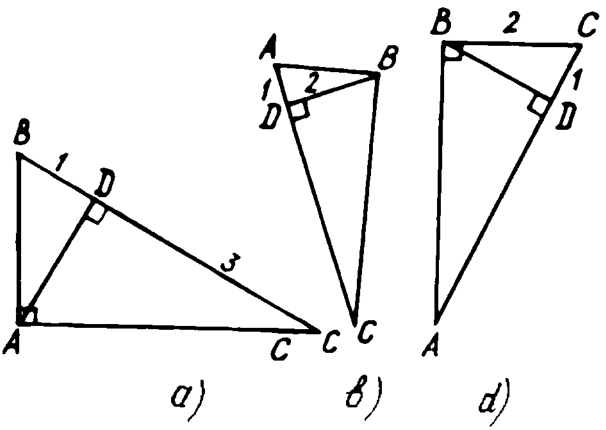
«Kosinus» atamasi lotincha «komplimenti sinus» atamasining qisqartirilgani, u «qo'shimcha sinus», aniqrog'i «qo'shimcha yoyning sinusi» demakdir.

MASALALAR

148. Quyidagi uchburchaklar burchaklarining kosinuslarini toping (58- rasm).

149. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 7 sm va gipotenuzasi 10 sm bo'lsa, shu uchburchakning o'tkir burchaklari kosinuslarini toping.

150. To'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagi 60° ga va uning sinusi $\sqrt{3}/2$ ga tengligi ma'lum bo'lsa, bu burchakning kosinusini toping.



58- rasm

151. $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ tenglikni isbotlang.

152. Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining uzunligi m ga teng bo'lsa, uning har bir katetining uzunliklari $m/\sqrt{2}$ ga teng bo'lishini isbotlang.

153. ABC uchburchakda $AC=30$ sm, $AB=50$ sm va $\cos A=0{,}8$. C uchdan tushirilgan balandlikni toping.

5.2. Ba'zi burchaklarning kosinusini hisoblash

Biz 0°, 30°, 45°, 60°, 90° li burchaklarning sinuslari qiymatlarini bilamiz. Endi $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ tenglikdan foydalanib, ba'zi burchaklarning kosinuslari qiymatini aniqlaymiz:

$\alpha=0°$ bo'lsa, $\cos 0°=\sin 90°=1$;

$\alpha=30°$ bo'lsa, $\cos 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha=45°$ bo'lsa, $\cos 45°=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\alpha=60°$ bo'lsa, $\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2}$;

$\alpha=90°$ bo'lsa, $\cos 90°=\sin 0°=0$.

Natijada ushbu jadvalga ega bo'lamiz:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

MASALALAR

154. 59- rasmda belgilangan burchaklarning sinuslari va kosinuslari uchun ifodalarni yozing.

155. Daftaringizga o'tkir burchagining sinusi va kosinusi teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak chizing.

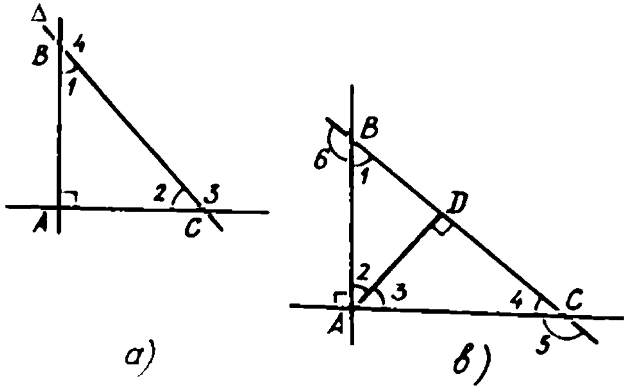
156. O'tkir burchakning qiymati ortganda, shu burchak kosinusining qiymati kamayishini ko'rsating.

157. Burchak sinusi qiymatidan foydalanib, cos 120°, cos 135°, cos 150°, cos 270° ning qiymatlarini aniqlang.

158. Ixtiyoriy o'tkir burchak uchun $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ekanini isbotlang (Pifagor teoremasini qo'llang).

5.3. Kosinuslar teoremasi

T e o r e m a (kosinuslar teoremasi). *Uchburchakning istalgan tomoni kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig'indisidan shu tomonlar bilan ular orasida burchak kosinusining ikkilangan ko'paytmasini ayirilganiga teng.*



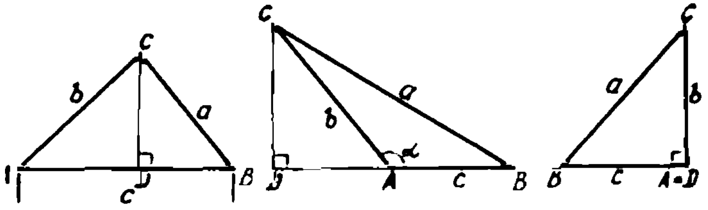
59- rasm.

ΔABC ning tomonlari a, b, c bo'lib, b va c tomonlar orasidagi burchak α bo'lsin, u holda

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\alpha$$

ekanligini ko'rsatish kerak.

I s b o t. ABC uchburchakning C uchidan qarshi tomonga perpendikulyar o'tkazaylik. Bunda uch hol bo'lishi mumkin. Perpendikulyarning asosi bo'lgan D nuqta: AB tomonda yotadi (60- a rasm); AB tomonning davomida yotadi (60- b rasm) yoki A va B nuqtalarning biri bilan ustma-ust tushadi (60- d rasm).



60- rasm.

Har bir hol uchun teoremaning o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Birinchi hol uchun 60- a rasmdan foydalanamiz. CDB to'g'ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga ko'ra

$$CB^2=CD^2+DB^2.$$

Ammo $DB=AB-AD$. Shuning uchun

$$CB^2=CD^2+(AB-AD)^2.$$

Bundan

$$CB^2=CD^2+AD^2-2AB\cdot AD+AB^2.$$

ADC to'g'ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga ko'ra

$$CD^2+AD^2=AC^2 \text{ va } AD=AC\cos\alpha.$$

Natijada ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$CB^2=AC^2+AB^2-2AB\cdot AC\ \cos\alpha$$

yoki

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos\alpha.$$

Teorema birinchi hol uchun isbot qilindi.

Ikkinchi holda (60- *b* rasm) $180°-\alpha$ qiymat uchun kosinus qiymatidan foydalanib isbotlashni o'zingizga havola qilamiz.

Uchinchi holda esa Pifagor teoremasining natijasi hosil bo'ladi, chunki $\alpha=90°$ bo'lganda $\cos\alpha = 0$, demak, $a^2=b^2+c^2$.

T a r i x i y m a s a l a. Jamshid al Koshiy (XIV–XV asrlar) uchburchakning ikki (b va c) tomoni va ular orasidagi A burchak berilganda uchinch itomonni

$$b^2-(b\pm c\ \cos A)^2+c^2\sin^2 A$$

formula bilan hisoblagan. Bu formula kosinuslar teoremasini ifoda etishini ko'rsating.

MASALALAR

159. Uchburchakning ikki tomoni uzunliklari o'zgarmas va ular orasidagi burchak ortib boradi. Burchak o'sishi bilan uchburchakning uchinchi tomoni ortishini isbotlang.

160. ABC uchburchakda $a=2$, $b=1$ va $\angle C=60°$ bo'lsa, c tomonni toping.

161. Uchburchakning a, b, c tomonlari berilgan. Uchburchakning c tomoniga tushirilgan balandligini toping.

162. Parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning tomonlari kvadratlarining yig'indisiga tengligini isbotlang.

163. Uchburchakning tomonlari berilgan:

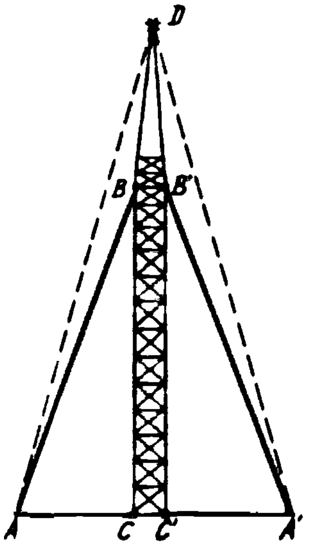
1) 5, 6, 7;	4) 30, 40,50;
2) 5, 6, 10;	5) a, $a+1$, $a+2$.
3) 5, 10, 10;	

Uchburchak burchaklarining kattaliklarini hisoblamasdan, har bir uchburchakning turini (burchaklariga nisbatan) aniqlang.

164. Uchburchakning ikki tomoni 20 m va 21 m, ular orasidagi burchakning sinusi esa 0, 6 ga teng. Uchinchi tomonni toping.

165. ABC uchburchakning tomonlari $AB=5,1$ m, $BC=6,2$ m, $AC=7,3$ m. Uchburchakning qaysi burchagi eng katta va qaysi burchagi eng kichik?

QO'SHIMCHA MASALALAR



61- rasm.

166. Radiomachta AB, AD troslar bilan mahkamlangan. A nuqta machta asosidan 75 m uzoqlikda joylashgan va $\angle ABD=150°$, $BD=24$ m bo'lsa, AD trosning uzunligini toping (61- rasm).

167. ABC to'g'ri burchakli uchburchakning AC gipotenuzasi 16 sm va katetlaridan biri 11 sm. Uning o'tkir burchaklari sinus va kosinuslari qiymatlarini toping.

168. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari 8 va 9,5 m ga teng bo'lsa, shu katetlarga yopishgan burchaklarning kosinuslarini toping.

169. Teng tomonli uchburchakning burchaklari kosinuslari tengligini isbotlang.

170. Agar to'g'ri burchakli uchburchak burchagining sinusi ma'lum bo'lsa, uning kosinusini topish mumkinmi? Misollar keltiring.

171. Quyidagi ma'lumotlarga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchakning noma'lum tomonini, o'tkir burchaklar sinuslar va kosinuslarini toping:

1) ikki kateti bo'yicha:

a) $a=3$, $b=4$;	e) $a=7$, $b=8$;
b) $a=15$, $b=20$;	f) $a=6$, $b=8$;
d) $a=9$, $b=11$;	g) $a=5$, $b=8$;

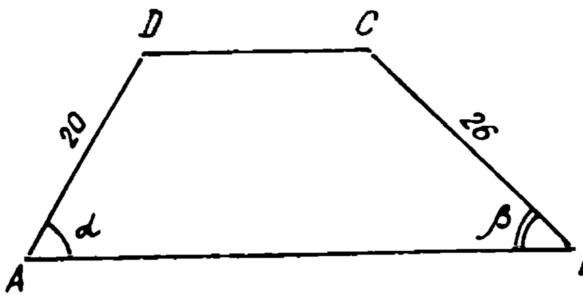
2) gipotenuzasi va bir kateti bo'yicha:

a) $c=13$, $a=5$;	e) $c=9$, $b=4$;
b) $c=10$, $a=5$;	f) $c=60$, $b=25$;
d) $c=13$, $a=10$;	g) $c=12$, $b=5$.

5-13

172. $ABCD$ trapetsiya $DC \parallel AB$, $AD=20$ sm va $BC=26$ sm. Agar $\cos\alpha = 0{,}5$ bo'lsa, trapetsiyaning balandligini va $\cos\beta$ ni toping (62- rasm).

173. 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}5$ bo'lgan burchakni yasang.



62- rasm.

174. l uzunlikdagi kesma a to'g'ri chiziqqa l_1 uzunlikda proyeksiyalanadi va a to'g'ri chiziq bilan α ($\alpha \leq 90°$) burchak hosil qiladi. l, l_1 va α n i bog'lovchi ifodalarni yozing.

175. 174- masalada α ning qanday qiymatida kesma proyeksiyasi eng katta qiymatiga erishadi?

176. Burchak kosinusidan foydalanib, quyidagi masalani yeching: teng yonli uchburchakda a – asos, b – yon tomon, h_a – asosga tushirilgan balandlik, α – asosidagi burchaklar. Agar:

a) h_a va b;   e) b va α;
b) h_a va a;   f) b va β;
d) a va b;

ma'lum bo'lsa, qolgan noma'lum kattaliklarni toping (63- rasm)

177. To'g'ri burchakli uchburchak katetlarining nisbati ma'lum bo'lsa, uning burchaklari kosinuslarini toping.

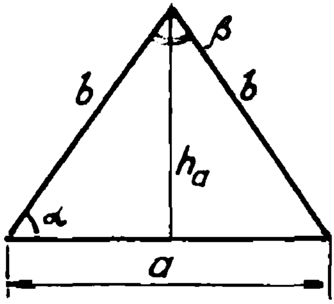
178. Vertikal turgan to'sinning balandligi 21 m, soyasi esa 7 m ga teng. Quyoshning gorizontdan balandligini graduslarda ifodalang.

179. Agar teng yonli trapetsiyaning tomonlari ma'lum bo'lsa, uning burchaklarini toping.

180. Teng yonli trapetsiyaning diagonali va uning asos bilan tashkil qilgan burchagi ma'lum bo'lsa, yuzini hisoblang.

181. Ikki medianasi teng bo'lgan uchburchak teng yonli uchburchak ekanini isbotlang.

182. Uchburchakning a, b, c tomonlari berilgan. Shu tomonlarga o'tkazilgan m_a, m_b, m_c medianalarni toping.

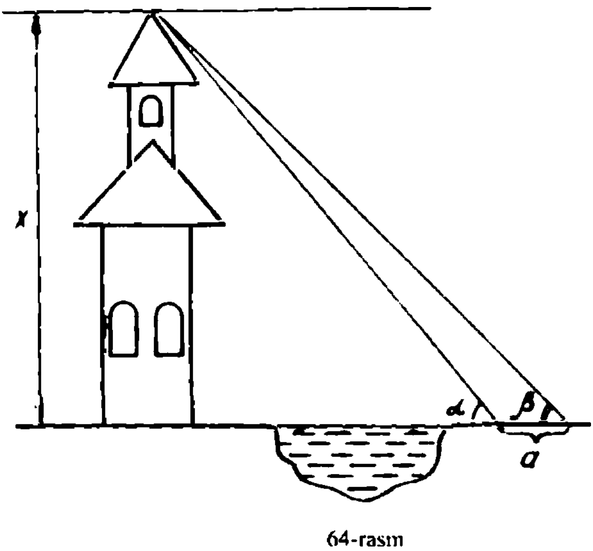


63-rasm.

183. Uchburchakning katta medianasi uning kichik tomoniga va kichik medianasi katta tomoniga o'tkazilishini isbotlang.

184. α va β burchaklari hamda a masofa bo'yicha binoning x balandligini qanday topish mumkinligini tushuntiring (64-rasm).

185. Parallelogrammning c va d diagonallari hamda ular orasida α burchak berilgan. Parallelogrammning tomonlarini toping.



64-rasm

186. (Pifagor teoremasiga teskari teorema). a, b, c — uchburchakning tomonlari. Agar $a^2+b^2=c^2$ bo'lsa, u holda $\angle C=90°$ ekanini isbotlang.

187. Uchburchakning tomonlari 13, 14, 15 m. Uchburchak burchaklarining kosinuslarini toping.

188. ABC uchburchak berilgan. CD uning AB tomoniga o'tkazilgan bissektrissasi. Agar CAB burchak CBA burchakdan katta bo'lsa, AD kesma BD kesmadan kichik bo'lishini isbotlang.

189. Parallelogrammda katta burchak qarshisida katta diagonal yotishini isbotlang.

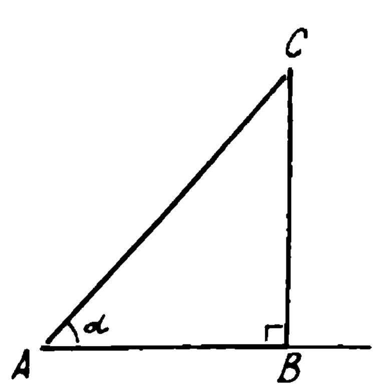
190. Sinuslar teoremasini kosinuslar teoremasidan foydalanib isbotlang.

191. ABC uchburchakning AB tomonida D nuqta berilgan. CD kesma hech bo'lmaganida AC yoki BC tomonlarning biridan kichik ekanini isbotlang.

192. Pifagor teoremasi kosinuslar teoremasining xususiy holi ekanini isbotlang.

6 - §. TANGENS VA KOTANGENS TRIGONOMETRIK AYNIYATLAR

6.1. Tangens va kotangens



65- rasm.

To'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagiga bog'liq bo'lgan sinus va kosinus funksiyalar bilan tanishdik. Bu funksiyalarning ta'rifida to'g'ri burchakli uchburchak katetlarining gipotenuzaga nisbati ishtirok etadi Bu uchburchakdagi katetlar nisbati ham burchakka bog'liq kattalikdir.

T a ' r i f. *To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchak qarshisidagi katetning unga yopishgan katetga nisbati shu o'tkir burchakning tangensi deb ataladi va ushbu ko'rinishda yoziladi* (65- rasm):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AB}. \qquad (1)$$

O'qilishi: «α burchakning tangensi» yoki «tangens alfa».

T a ' r i f. *To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchakka yopishgan katetning shu burchak qarshisidagi katetga nisbati shu o'tkir burchakning kotangensi deb ataladi va ushbu ko'rinishda yoziladi*

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AB}{BC} \qquad (2)$$

O'qilishi: «α burchakning kotangensi» yoki «kotangens alfa».

O'tkir burchakning tangensi va kotangensini shu burchakning sinusi va kosinusi orqali ifodalash mumkin. Buning uchun (1) va (2) tengliklarning o'ng tomonidagi kasrning surati va maxrajini gipotenuza uzunligi AC ga bo'lib, quyidagiga ega bo'lamiz (65- rasm):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{AC}:\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

demak,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

va

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{AC}:\frac{BC}{AC}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Demak,

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.}$$

Bulardan o'tkir burchakning tangensi va kotangensi shu burchakning sinusi va kosinusi nisbatlari ekani kelib chiqadi. Shunday qilib, tgα va ctgα ham faqat burchakning kattaligiga bog'liq ekan.

Tangens va kotangensning ixtiyoriy burchak uchun qiymatini hisoblashda shu burchak uchun sinus va kosinus qiymatidan foydalanish mumkin. Albatta, maxrajdagi ifoda noldan farqli bo'lgan holda shunday qilish mumkin.

TARIXIY MA'LUMOT

To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchakni katetlar nisbati bilan aniqlash mumkin degan xulosa birinchi bo'lib suriyalik ulug' astronom va matematik Abu Abdulloh Muhammad ibn Jabir al-Battani (850–929 yy.) tomonidan kiritilgan. Al-Battani «Sinuslar jadvalini tuzish» va «Astronomiya» kitoblarini yozgan. U bu fikrga quyoshning balandligini aniklash usuli orqali kelgan (66- rasm).

MASALALAR

193. Gipotenuza va katetlaridan biri

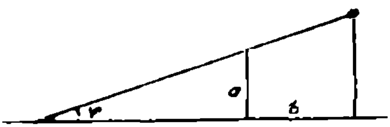
1) $c=5$, $a=3$; 2) $c=6$, $a=2$

bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchaklarining tangensi va kotangensini hisoblang (67- rasm.)

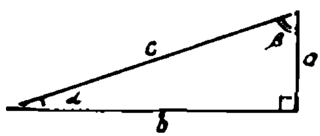
194. OA nur va Ox o'qi hosil qilgan burchakning tangensi va kotangensini toping. A nuqta quyidagicha koordinatalarga ega:

a) (2; 2); b) (0; 3); d) (3; 1); e) $(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

195. Agar: a) cosα=0,5; b) cosα= –2/3; d) cosα=1 bo'lsa, tgα ni toping.



66- rasm.



67- rasm.

196. Agar: 1) $tg\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $ctg\alpha=\frac{2}{3}$; 3) $sin\alpha=\frac{1}{2}$ bo'lsa, α burchakni yasang.

6.2. Ba'zi burchaklarning tangensi va kotangensini hisoblash

Ba'zi burchaklarning sinus va kosinuslari qiymatlaridan foydalanib, tangens va kotangensning shu burchaklarga mos qiymatlarini hisoblash mumkin. Bunda

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ va } ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

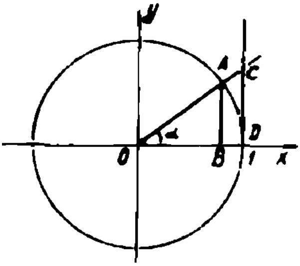
ekanligidan foydalanamiz. Ma'lumki, maxraj nolga teng bo'lganda kasr ma'noga ega emas. Ammo maxraj nolga qanchalik yaqin bo'lsa, kasrning qiymati shunchalik katta bo'ladi. Istalgancha katta miqdorni (∞) ko'rinishda belgilaymiz. Endi $tg\alpha$ va $ctg\alpha$ ning qiymatlari jadvalini tuzamiz:

	0°	30°	45°	60	90
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$stg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

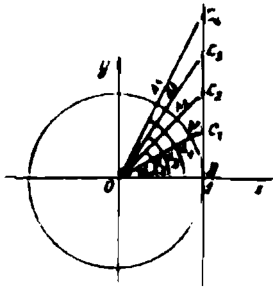
Birlik aylananing radiusidan foydalanib, $tg\alpha$ va $ctg\alpha$ ning qiymatiga mos keluvchi kesmalarni ko'rsatamiz (68- rasm). Koordinatalar boshidan Ox o'qi bilan α burchak tashkil qiluvchi OA nur o'tkazamiz. Nurning birlik aylana bilan kesishgan nuqtasi A, $AB\perp Ox$ va $DC\perp Ox$ bo'lsin. Bunda $AB\|DC$ bo'ladi. Teng burchakli uchburchaklarning mos tomonlari proporsionalligidan

$$\frac{AB}{OB}=\frac{DC}{OD}.$$

Ammo $OD=1$ va $tg\alpha = \frac{AB}{OB}$ ekanligidan



68- rasm



69- rasm.

$$\mathrm{tg}\alpha = DC$$

ekani kelib chiqadi. Demak, DC kesmaning uzunligi α burchakka mos keluvchi tangens qiymatiga teng bo‘ladi.

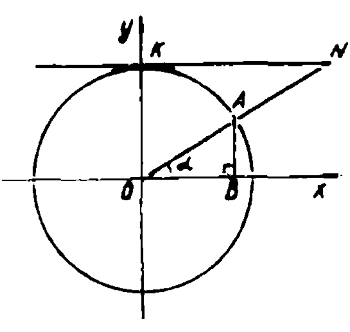
Agar α burchak 90° ga yaqin bo‘lsa, DC kesmaning kattalashishini ko‘rish unchalik qiyin emas, ya’ni DC istalgancha katta bo‘ladi (69- rasm).

Burchak 90° bo‘lganda OA nur DC nur bilan parallel bo‘ladi, ya’ni ular kesishmaydi.

Ushbu rasmdan (70- rasm) $\mathrm{ctg}\alpha = KN$ ekanini hosil qilish mumkin. Buni o‘zingiz keltirib chiqaring.

MASALALAR

197. $N_1(0;1)$, $N_2\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N_3\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$ nuqtalarning birlik aylanada yotishini tekshiring va AON_1, AON_2, AON_3, AOB burchaklarning tangenslarini toping.

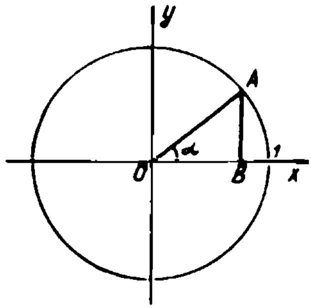


70- rasm.

198. 120°, 135°, 150° li burchakning tangenslarini va kotangenslarini hisoblang.

199. $y=\mathrm{tg}x$ va $y=\mathrm{ctg}x$ funksiyalar $-\infty<y<+\infty$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilishini misollar yordamida ko'rsating.

200. α burchak ortishi bilan $\sin\alpha$ va $\operatorname{tg}\alpha$ ning ortishini, $\cos\alpha$ va $\operatorname{ctg}\alpha$ ning kamayishini isbotlang.



71- rasm.

6.3. Asosiy trigonometrik ayniyatlar

Biz o'tkir burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi bilan tanishdik. Bu trigonometrik funksiyalar va Pifagor teoremasidan foydalanib, o'tkir burchakning ixtiyoriy qiymati uchun o'rinli bo'ladigan formulalarni hosil qilish mumkin. Bu formulalar *trigonometrik ayniyatlar* deb ataladi.

Ulardan birinchisini ushbu usulda hosil qilamiz. Markazi koordinatalar boshida va radiusi birga teng aylana chizamiz (71- rasm).

Abssissalar o'qi bilan α o'tkir burchak hosil qiluvchi OA radius o'tkazamiz. A nuqtadan $AB\perp Ox$ tushiramiz. Hosil bo'lgan OBA to'g'ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$AB^2+OB^2=OA^2.$$

Bu tenglamaning ikkala qismini OA^2 ga bo'lamiz:

$$\left(\frac{AB}{OA}\right)^2+\left(\frac{OB}{OA}\right)^2=1.$$

Trigonometrik funksiyalar ta'rifidan

$$\frac{AB}{OA}=\sin\alpha,\quad \frac{OB}{OA}=\cos\alpha$$

ekani ma'lum. Bu qiymatlarni o'rniga qo'yib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.} \qquad (1)$$

Bu tenglik *birinchi trigonometrik ayniyat* deb ataladi.

Bu ayniyatdan foydalanib, boshqa ko'rinishdagi ayniyatlarni hosil qilish mumkin. Birinchi ayniyatning ikkala qismini $\cos^2\alpha \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{yoki} \quad 1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Bunda $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ ekanidan foydalanib,

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}} \qquad (2)$$

ayniyatni hosil qilamiz. Buni *ikkinchi trigonometrik ayniyat* deb ataymiz.

Agar birinchi ayniyatni $\sin^2\alpha \neq 0$ ga bo'lsak, u holda

$$\boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}} \qquad (3)$$

ayniyat kelib chiqadi. Bu *uchinchi trigonometrik ayniyatdir.*

Tangens va kotangens funksiyalari ta'rifidan

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$$

yoki

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1} \qquad (4)$$

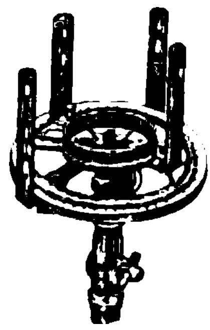
ayniyatni hosil qilamiz, bunda $\sin\alpha\neq0$ va $\cos\alpha\neq0$. Bu *to'rtinchi trigonometrik ayniyatdir.*

Hosil qilingan bu ayniyatlar *asosiy trigonometrik ayniyatlar* deb ataladi. Bu ayniyatlarning ahamiyati shundan iboratki, ular $\sin\alpha$ va $\cos\alpha$ dan birini bilgan holda qolgan uchtasini topish imkonini beradi.

TARIXIY MA'LUMOT

Trigonometriyadan birinchi bor «Astrolyabiya bilan ishlash haqida» traktat asari al-X o r a z m i y tomonidan yozilgan.

Astrolyabiyaning yaratuvchisi bo'lib al-Battanining otasi Jobir ibn Sinon a l- X o r r a n o (IX asrning ikkinchi yarmi) hisoblanadi. Trigonometrik funksiyalar jadvallarini tuzishda o'zbek olimi al-Koshiy juda katta yutuqlarga erishdi. U sinuslar jadvalini milliarddan bir aniqlikda tuzdi. Bu o'z davrida juda yuqori aniqlik edi.



72- rasm

MASALALAR

201. Ifodalani soddalashtiring:

1) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;
2) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
3) $\cos^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;
4) $(1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}\alpha)\cos^2\alpha$.

202. Agar: 1) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha=0,6$; 3) $\sin\alpha=0,4$ bo'lsa, $\cos\alpha$ va $\mathrm{tg}\alpha$ ni hisoblang.

203. Agar: 1) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; 2) $\cos\alpha=\frac{11}{13}$; 3) $\cos\alpha=\frac{13}{15}$ bo'lsa, $\sin\alpha$ va $\mathrm{tg}\alpha$ ni hisoblang.

204. Gipotenuzasi a ga va o'tkir burchagi 30° ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning katetlarini toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

205. α o'tkir burchak uchun $\cos\alpha<1$ ekanini isbotlang.

206. ABC uchburchakda C to'g'ri burchak bo'lsa, A va B burchaklarning sinus, kosinus, tangenslarini toping. Bunda: a) $AB=8$, $BC=7$; b) $BC=21$, $AC=20$; d) $BC=1$, $AC=2$; e) $AC=24$, $AB=25$.

207. Uchburchakning tomonlari 5 m, 6 m, 7 m. Uchburchak burchaklarining tangenslarini toping.

208. Rombning diagonallari 10 sm va 12 sm. Diagonallarning tomon bilan hosil qilgan burchagining tangensini toping.

209. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari 3 sm va $\sqrt{3}$ sm bo'lsa, diagonalning tomon bilan tashkil qilgan burchaklari tangenslarini toping.

210. Rombning diagonallari $2\sqrt{3}$ va 2 bo'lsa, uning burchaklari tangenslarini toping.

211. Agar biror to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklari ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchaklariga teng bo'lsa, shu burchaklarning tangenslari ham tengligini isbotlang.

212. tg30°, tg0°, tg60° ni o'sib borish tartibida joylashtiring.

213. Agar: a) tg $(\angle A)$ > tg $(\angle B)$; b) tg $(\angle A)$ < tg $(\angle B)$ bo'lsa, A va B o'tkir burchaklar haqida nima deyish mumkin?

214. Agar β o'tkir burchak uchun

a) $\mathrm{tg}\beta < 1$; b) $0 < \mathrm{tg}\beta < 1$; d) $\mathrm{tg}\beta > 1$ bo'lsa, shu burchakning kattaligi haqida nima deyish mumkin?

215. Nima uchun tangensning 90° dagi qiymati aniqlanmagan?

216. $\sin\alpha = 0{,}8$, $\mathrm{tg}\alpha = 4$ bo'lsa, $\cos\alpha$ ni hisoblang.

217. Uchburchakning ikki tomoni 8 sm, 12 sm, ular orasidagi burchakning tangensi esa $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ga teng. Uchburchakning yuzini hisoblang.

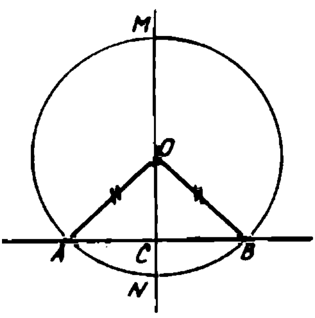
7- §. AYLANA VA KO'PBURCHAKLAR

7.1. Aylana vatari va diametrining xossalari

Aylana, aylana vatari diametri tushunchalari bilan Siz tanishsiz.

T e o r e m a. *Vatarning o'rtasidan o'tuvchi diametr shu vatarga perpendikulyardir.*

I s b o t. MN diametr O markazli aylana AB vatarining o'rtasida C nuqta orqali o'tgan bo'lsin (73- rasm). $MN \perp AB$ ekanini isbotlaymiz.



73-rasm.

OAB uchburchak – teng yonli, chunki $OA=OB$ bir aylananing radiusidir. C nuqta AB tomonning o'rtasi b o'lgani uchun OC kesma OAB uchburchakning medianasidir. Teng yonli uchburchakning asosiga o'tkazilgan medianasi bir vaqtda ham balandlik, ham bissektrisa bo'ladi. Demak ,$OC \perp AB$. Bundan $MN \perp AB$ kelib chiqadi.

Bu teoremadan ushbu natijalarni hosil qilamiz:

1-natija. *Vatarga perpendikulyar diametr shu vatarni va unga tiralgan aylana yoyini teng ikkiga bo'ladi.* (Bu 7- sinfda ham o'tilgan).

Haqiqatan ham, vatarni ikkiga bo'lishi uning mediana bo'lishidan, aylana yoyini ikkiga bo'lishi esa bissektrisa ekanidan kelib chiqadi.

2-natija. *Vatarning o'rta perpendikulyari aylananing diametri bo'ladi.*

Bu natijaning isboti vatarning o'rtasiga o'tkazilgan perpendikulyarning yagonaligidan kelib chiqadi.

Ushbu natijalarni qo'llash yo'li bilan markazi belgilanmagan aylananing markazini aniqlash mumkin. Buning uchun aylanada ikkita parallel bo'lmagan vatarni (AB va CD) o'tkazamiz. Bu vatarlar o'rta perpendikulyarining kesishish nuqtasi aylana markazi bo'ladi. (Buni o'zingiz isbot qiling).

MASALALAR

218. 1) Aylana markazidan uning 24 sm lik vatarigacha bo'lgan masofa 5 sm. Aylana diametrining uzunligini toping.

2) Radiusi 13 sm bo'lgan aylananing radiusiga perpendikulyar va uni 5 sm hamda 8 sm li kesmalarga ajratuvchi vatar o'tkazilgan. Shu vatarning uzunligini toping.(Yechim necha xil bo'ladi?)

219. Ixtiyoriy aylanada ikki radius va radiuslar uchini tutashtiruvchi uchburchakning markazga mos kelgan burchagi 60° bo'lsa, u teng tomonli uchburchak ekanini ko'rsating.

220. Aylananing diametri va vatari umumiy uchga ega. Diametrning uzunligi 40 sm, vatarning uzunligi 24 sm bo'lsa, aylananing markazidan vatargacha bo'lgan masofani hisoblang.

221. Radiuslari a va b ga teng konsentrik aylanalar berilgan ($a>b$). Ichki aylana ixtiyoriy urinmasining tashqi aylana ichidagi bo'lagi o'zgarmas uzunlikka teng ekanini ko'rsating va uni hisoblang.

7.2. Ikki aylananing o'zaro joylashishi

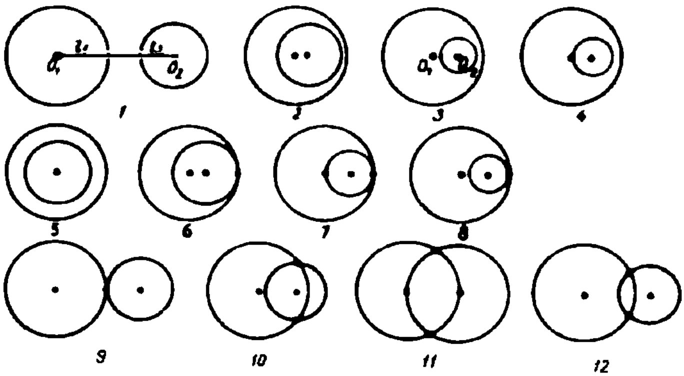
Tekislikda ikki aylana chizaylik. Aylanalar ularning markazlari joylashgan nuqtalar va radiuslarining kattaligiga qarab 74- rasmda ko'rsatilgan holatlardan biriday joylashgan bo'lishi mumkin. O_1 va O_2 – aylanalarning markazlari, r_1 va r_2 – mos ravishda ularning radiuslari, h – markazlari orasidagi masofa ($O_1O_2 = h$) bo'lsin.

Aylanalarni tekislikda joylashishiga qarab quyidagi hollarga ajratish mumkin. (Yana qanday hollari bor?)

1. U m u m i y n u q t a g a e g a b o' l m a g a n a y l a n a l a r (1–5 hollar). Bunda 1- holda $r_1 + r_2 < h$, 2 va 3- hollarda $r_1 > r_2 + h$, 4- holda $r_1 > r_2$ 5- holda $r_1 > r_2$, $h=0$.

2. B i t t a u m u m i y n u q t a g a e g a b o' l g a n a y l a n a l a r. (6–9- hollar). Bunda 6–8 hollarda $r_1 = r_2 + h$, 9-holda $r_1 + r_2 = h$. Bu hollarda *aylanalar o'zaro urinadi* deb aytiladi. Joylashishiga qarab *ichki urinma* (6–8- hollar) va *tashqi urinma* (9- hol) deb ataladi.

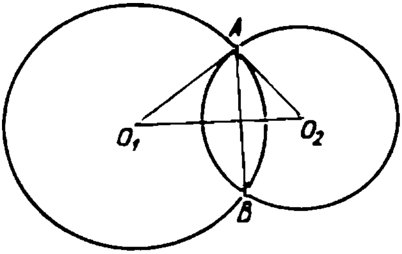
3. I k k i t a u m u m i y n u q t a g a e g a b o' l g a n a y l a n a l a r (10–12- hollar). Bunda barcha hollarda $r_1 + r_2 > h$. Bu aylanalar *kesishuvchi aylanalar* deb ataladi.



74- rasm.

T e o r e m a. *Kesishuvchi aylanalarning kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar shu aylanalarning markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyardir.*

Teoremani 75- rasmdan foydalanib o'zingiz isbot qiling. Rasmda ko'rsatilgan holdan boshqacha ham bo'lishi mumkinmi?



75- rasm.

MASALALAR

222. Radiusi 3 sm bo'lgan aylana chizing va unda D nuqtani belgilang. Aylanada shunday nuqtani belgilangki, shu nuqtadan D nuqtagacha bo'lgan masofa: a) 3 sm; b) 6 sm bo'lsin. Shu nuqtalarni D bilan tutashtiring. Aylananing markazi shu kesmalarning birida yotadimi? Shartni qanoatlantiradigan nuqtalar nechta?

223. Markazi O nuqtada bo'lgan r_1 va r_2 $(r_1 < r_2)$ radiusli aylanalar chizing va shunday shaklni shtrixlab ko'rsatingki, uning barcha X nuqtalari uchun $r_1 \leq OX \leq r_2$ shart bajarilsin.

224. Diametrlari 4 sm va 8 sm bo'lgan o'zaro urinuvchi aylanalar berilgan. Shu aylanalarning markazlari orasidagi masofani toping (barcha hollarni ko'ring).

225. Markazlari O_1, O_2, O_3 hamda radiuslari 1 sm, 2 sm, 3 sm bo'lgan va o'zaro juft bo'lib tashqaridan urinuvchi aylanalar berilgan. $O_1\ O_2\ O_3$ uchburchakning perimetrini toping.

226. Radiuslari 4, 4, 10 bo'lgan o'zaro urinuvchi aylanalar shunday berilganki, radiuslari 4 sm li aylanalar katta aylanaga ichki tomondan urinadi. $O_1 O_2 O_3$ uchburchakning perimetrini toping. Bunda O_1, O_2, O_3–tegishli aylanalar markazlari.

227. ABC uchburchakning tomonlari AB, BC, va AC mos ravishda 4 sm, 5 sm va 6 sm bo'lsa, shunday 3 ta aylana chizingki, ularning markazlari uchburchakning uchlarida bo'lib, ular o'zaro juft-jufti bilan tashqi urinuvchi bo'lsin.

7.3. Aylanaga urinma

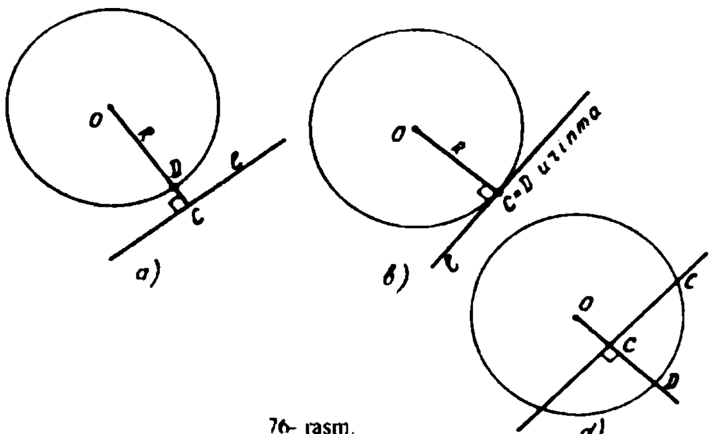
Tekislikda aylana va to'g'ri chiziq o'zaro uch xil holatda joylashishi mumkin (76- rasm).

Aylana va to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega emas (kesishmaydi) (76- *a* rasm); bitta umumiy nuqtaga ega (76- *b* rasm); ikkita umumiy nuqtaga ega (kesishadi) (76- *d* rasm).

T a ' r i f. *To'g'ri chiziq bilan aylana faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu to'g'ri chiziq aylanaga urinma deb ataladi.*

To'g'ri chiziq bilan aylananing bu umumiy nuqtasi (C) *urinish nuqtasi deyiladi* (76-*b* rasm).

Aylananing markazi O nuqtadan l to'g'ri chiziqqa OC perpendikulyarni tushiraylik. OC perpendikulyarning uzunligi aylana markazidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani beradi.



76- rasm.

Agar aylana bilan to‘g‘ri chiziq kesishmasa *(OC > R)*, bu masofa aylana radiusidan katta bo‘ladi (76- *a* rasm).

Agar aylana bilan tug‘ri chiziq kesishsa, u holda markazdan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aylana radiusidan kichik ($OC< R$) bo‘ladi (76- *d* rasm).

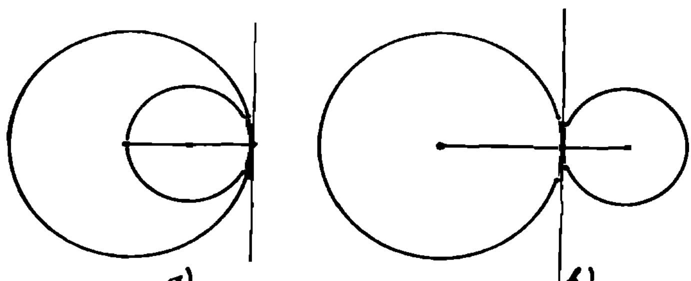
To‘g‘ri chiziq aylanaga urinma bo‘lganda $OC=R$ bo‘ladi (76- *b* rasm).

Haqiqatan ham OC perpendikulyarning aylana bilan kesichlgan nuqtasini D bilan belgilasak, birinchi holda $OC > OD$, ikkinchi holda $OC = OD$ va uchinchi holda $OC < OD$ ekanini ko‘ramiz.

Ikkinchi holda perpendikulyarning aylana bilan kesishgan nuqtasi D va perpendikulyarning asosi C ustma-ust tushib qoladi. Bundan aylana radiusi OD ning l urinmaga perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi. Ushbu muhim natijani hosil qildik.

N a t i j a. *Urinish nuqtasiga o‘tkazilgan aylana radiusi urinmaga perpendikulyardir.*

Bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan ikki aylanani ko‘raylik (77- rasm).



a) *б)*

77- rasm.

Umumiy nuqtadan o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq aylanalarning biriga urinma bo‘lsa, u albatta ikkinchisiga ham urinma bo‘ladi. Chunki u natijaga ko‘ra urinish nuqtasidagi radiusga perpendikulyar bo‘ladi.

Perpendikulyarning yagonalik shartidan urinma bir radiusga perpendikulyar bo'lsa, u holda uning ikkinchisiga ham perpendikulyar bo'lishi kelib chiqadi.

Umumiy urinmaga ega bo'lgan *aylanalar o'zaro urinadi* deb ataladi. Agar aylanalarning markazlari umumiy urinmadan bir tomonda yotsa, urinish *ichki urinish* (77- *a* rasm), agar turli tomonda yotsa, urinish *tashqi urinish* (77- *b* rasm) deyiladi.

Ichki urinishning 77- *a* rasmda ko'rsatilgan holdan boshqacha holatlarini toping.

MASALALAR

228. Radiusi 3 sm ga teng bo'lgan aylana chizing. Uning OA radiusini o'tkazib, bu radiusdan 2 sm uzoqlikdagi nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq chizing. Bu to'g'ri chiziq aylana bilan o'zaro qanday joylashadi?

229. 228- masalada OA=3 sm yoki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi OA radiusning davomida bo'lsa, to'g'ri chiziq aylana bilan o'zaro qanday joylashadi?

230. 78- rasmda berilgan barcha urinmalar O nuqtadan o'tadi. $OA=OD$ ekanligini isbotlang.

231. O'quvchi radiusi 3 sm bo'lgan aylana chizdi, lekin markazni belgilashni unutdi. Aylana markazini qanday topish mumkin?

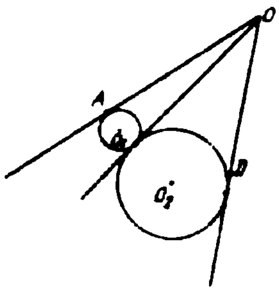
232. Aylana yoylari teng bo'lishi uchun ularga tiralgan markaziy burchaklar teng bo'lishi zarurligini isbotlang.

233. O markazli aylana va shu aylanaga tegishli A, B va K nuqtalar belgilangan. $\angle AOB=35°$. Ichki chizilgan $\angle AKB$ ning kattaligini hisoblang (79- rasm).

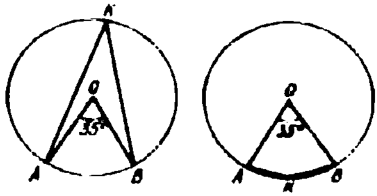
234. Aylanada A, B va C nuqtalar shunday berilganki, unda $\smile AB=80°$, $\smile BC=180°$ bo'lsin. ABC uchburchakning burchaklarini hisoblang.

235. 80- rasmda $CD=DB$ ekanligini isbotlang, bunda $AC \| OD$.

236. Agar $\angle BOD=\alpha$ bo'lsa, uni teng ikkiga bo'lmasdan turib, $\frac{\alpha}{2}$ burchakni yasang (80- rasm).

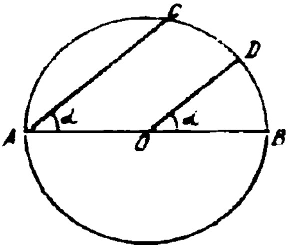


78- rasm.



79- rasm.

80- rasm.

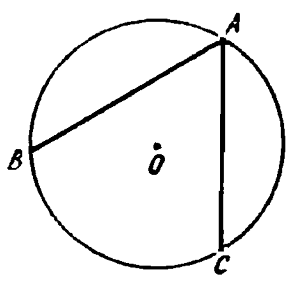


7.4. Aylanaga ichki chizilgan burchak

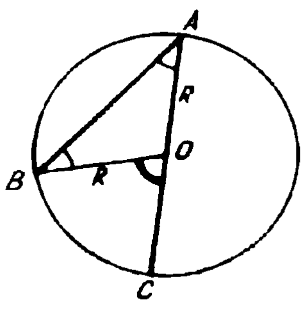
Aylananing bir nuqtasidan chiquvchi ikki vataridan tashkil topgan burchak *aylanaga ichki chizilgan burchak* deb ataladi (81- rasm).

Ichki burchak tomonlari *AB* va *BC aylananing BC yoyiga tiralgan* deb aytiladi.

T e o r e m a. *Aylanaga ichki chizilgan burchak o'zi tiralgan yoyning yarmi bilan o'lchanadi* (ya'ni *burchakning kattaligi o'zi tiralgan yoy burchak kattaligining yarmiga teng)*.



81- rasm.



82- rasm

I s b o t. BAC burchak aylanaga ichki chizilgan hamda BA va BC aylananing vatarlari bo'lsin. Aylana markazining shu ichki chizilgan burchakka nisbatan joylanishining uch holini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

B i r i n c h i h o l. Aylana markazi ichki chizilgan burchak tomonlaridan birida, masalan, AC tomonda yotadi. U holda OB radius o'tkazib, $\Delta\ OAB$ ni hosil qilamiz. Bu teng yonli uchburchakdir, chunki $OA=OB=R$ (82- rasm). Shuning uchun $\angle OBA=\angle OAB$. Ammo BOC markaziy burchak AOB uchburchakka nisbatan tashqi burchagidir. Uchburchak tashqi burchagining xossasiga ko'ra: $\angle BOC=\angle OBA+\angle OAB=$ $=2\angle OAB$, bundan

$$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle BOC. \qquad (1)$$

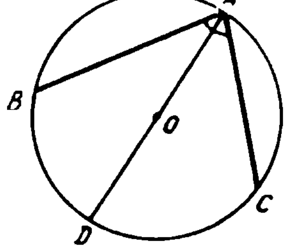
$\angle BOC$ markaziy burchak bo'lgani uchun uning kattaligi o'zi tiralgan BC yoyning gradus ulchoviga teng,

$$\angle BOC=\smile{BC}. \qquad (2)$$

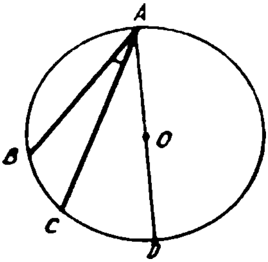
ya'ni (1) va (2) tengliklardan: $\angle OAB=\frac{1}{2}\smile{BC}$.

Bunda OAB burchak $\smile{BC}$ ning gradus o'lchovi yarmiga tengligini hosil qilamiz. Teorema birinchi hol uchun isbotlandi.

I k k i n ch i h o l. Aylananing markazi O ichki chizilgan burchak ichida yotadi (83- rasm). AD diametr o'tkazamiz, natijada BAC burchak ikki burchakka bo'linadi: $\angle BAD$ va $\angle DAC$. Hosil bo'lgan ichki burchaklar uchun $\angle BAC=$ $=\angle BAD+\angle DAC$ ekani ma'lum. Birinchi holga ko'ra $\angle BAD$ va



83- rasm.



84-rasm.

$\angle DAC$ o'zlari tiralgan BD va DC yoylarning yarmi bilan o'lchanadi, ya'ni $\angle BAD=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BD}$ va $\angle DAC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{DC}$.

Ammo BC yoy BD va DC yoylar yig'indisiga teng, ya'ni $\overset{\smile}{BC}=\overset{\smile}{BD}+\overset{\smile}{DC}$, demak

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BD}+\frac{1}{2}\overset{\smile}{DC}=\frac{1}{2}(BD+DC)=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BD}\cdot$$

Shunday qilib, $\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{BC}$, ya'ni $\angle BAC$ o'zi tiralgan yoyning yarmi bilan o'lchanishi kelib chiqdi. Teorema bu holda isbotlandi.

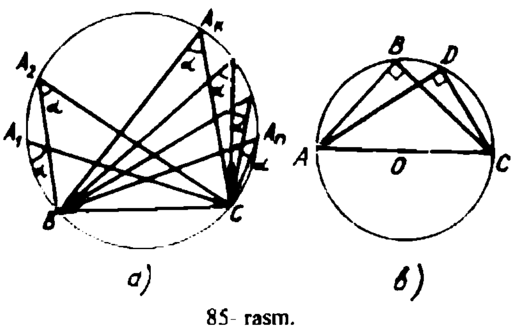
U c h i n c h i h o l. Aylana markazi ichki chizilgan burchak tashqarisida yotadi (84- rasm). Bu hol uchun teoremani o'zingiz isbot qiling.

Isbot qilingan teoremadan ushbu muhim natijalar kelib chiqadi.

1- n a t i j a. *Bitta yoyga tiralgan barcha ichki burchaklar o'zaro tengdir* (85- *a* rasm).

Xususan, agar ichki chizilgan burchakning tomonlari bitta diametrning ikki uchidan o'tsa, ichki chizilgan burchak to'g'ri burchak bo'ladi. Demak, *har qanday diametrga tiraluvchi ichki burchak to'g'ri burchakdir*.

2- n a t i j a. *Diametrga tiralgan barcha ichki chizilgan burchaklar to'g'ri burchaklardir* (85- *b* rasm).



85- rasm.

MASALALAR

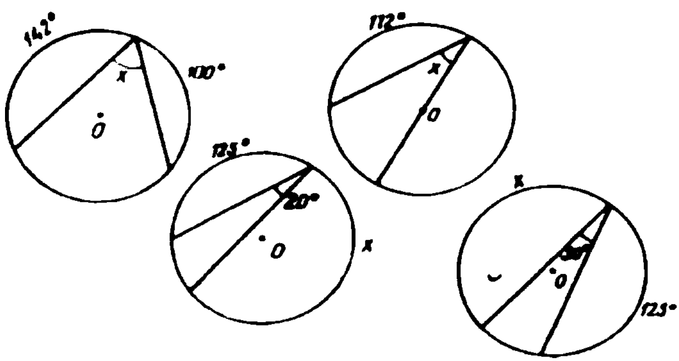
237. Radiusi 5 sm bo'lgan aylana chizing. Bu aylanada tomonlari bir diametrning uchlaridan o'tuvchi ichki burchak chizing.

238. AB yarim aylanada C va D nuqtalar olingan. $\overset{\smile}{AC}=37°$, $\overset{\smile}{BD}=23°$. Aylana radiusi 15 sm bo'lsa, CD vatarni toping.

239. A va B nuqtalar aylanani ikkita yoyga bo'ladi. Yoylardan kichigi 150°, kattasi esa C nuqta bilan 2:1 nisbatda bo'linadi. BAC burchakni toping.

240. A nuqtadan berilgan aylanaga AB urinma va O markazdan o'tuvchi AD kesuvchi o'tkazilgan. Agar $\overset{\smile}{BD}=100°40'$ bo'lsa, $\angle BAD$ va $\angle DOB$ ni toping.

241. Rasmlardagi noma'lum burchaklarni toping (86- rasm).



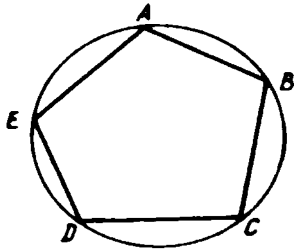
86- rasm.

7.5. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana

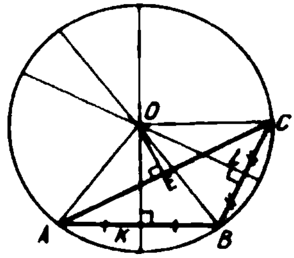
T a ' r i f. *Agar ko'pburchakning hamma uchlari bitta aylana ustida yotsa, ko'pburchak aylanaga ichki chizilgan deb ataladi. Aylana esa ko'pburchakka tashqi chizilgan deb ataladi* (87- rasm).

T e o r e m a. *Har qanday uchburchakka yagona tashqi aylana chizish mumkin.*

I s b o t. Ixtiyoriy ABC uchburchak berilgan bo'lsin. A, B



87- rasm.



88- rasm.

va C nuqtalardan o'tuvchi yagona aylana chizish mumkin ekanini ko'rsatishimiz kerak.

ABC uchburchak AB tomonining o'rtasini K bilan, BC tomonining o'rtasini L bilan belgilaylik (88- rasm).

Bu nuqtalardan mos tomonlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. OK va OL mos ravishda AB hamda BC tomonlarga o'rta perpendikulyar bo'lgani uchun $OA=OB$ va $OB=OC$. Shuning uchun $OA=OC$, ya'ni ABC uchburchakning uchlari O nuqtadan bir xil masofada (uzoqlikda) yotar ekan:

$$OA=OB=OC=R.$$

Demak, ABC uchburchakka markazi O nuqtada va radiusi $R=OA$ bo'lgan tashqi aylana chizish mumkin ekan.

Agar markazi O nuqtada va radiusi $R=OA$ bo'lgan aylana chizsak, u A, B va C nuqtalardan o'tuvchi aylana bo'ladi.

AOC teng yonli uchburchak bo'lgani uchun AC tomonning o'rtasini O bilan tutashtiruvchi OE kesma AC ga o'rta perpendikulyar bo'ladi.

Bundan ushbu muhim natijalar kelib chiqadi:

1- n a t i j a. *Uchburchakning tomonlariga o'rta perpendikulyarlar bir nuqtada – tashqi chizilgan aylananing markazida kesishadi.*

2- n a t i j a. *To'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi gipotenuzaning o'rtasida bo'ladi.*

Demak, uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchak tomonlari o‘rta perpendikulyarlarining kesishish nuqtasi bo‘lar ekan.

3- n a t i j a. *Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uch nuqta orqali bitta aylana o‘tadi.*

Natijalarning isbotini o‘zingiz bajaring.

T o p s h i r i q

a) Agar tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning ichki nuqtasida bo‘lsa, uchburchak o‘tkir burchakli uchburchak ekanini isbotlang.

b) Agar tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning tashqarisida bo‘lsa, uchburchak o‘tmas burchakli ekanini isbotlang.

d) To‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uning gipotenuzasi o‘rtasida bo‘lishini isbotlang.

88- rasmdagi uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi uchburchakka nisbatan qanday joylashgan?

T a r i x i y m a s a l a. Singan terak haqidagi masala. Yer sirtiga perpendikulyar turgan terak bir joyidan sinib, uning singan bo‘lagining uchi bukilgan holda yerga tekkan. Terakning ostidan boshlab singan bo‘lagining yerga tekkan uchigacha bo‘lgan masofa ma‘lum bo‘lsa, uning qayerdan singanini toping.

T a r i x i y m a s a l a. (Evklid masalasi). AB kesma berilgan. Tomonlari AB ga teng uchburchak yasang (sirkul yordamida).

MASALALAR

242. Teng tomonli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning balandligini uchidan boshlab hisoblaganda 2:1 nisbatda bo‘lishini isbot qiling.

243. Uchburchakning tomoni unga tashqi chizilgan aylana diametrining shu tomon qarshisida yotgan burchak sinusiga ko‘paytmasiga teng ekanini isbot qiling.

244. To‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi R va o'tkir burchaklaridan biri α bo'lsa, uchburchakning tomonlarini toping.

245. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi medianada yotsa, bu uchburchak teng yonli yoki to'g'ri burchakli ekanini isbotlang.

246. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi R uchun $R=\frac{abc}{4S}$ formulani keltirib chiqaring.

247. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 6 sm, asosiga tushirilgan balandligi esa 4 sm. Tashqi chizilgan aylananing radiusini toping.

7.6. Uchburchakka ichki chizilgan aylana

T a ' r i f. *Agar ko'pburchakning hamma tomonlari aylanaga urinuvchi bo'lsa, uni aylanaga tashqi chizilgan deb ataladi, aylanani esa shu ko'pburchakka ichki chizilgan deb ataladi.*

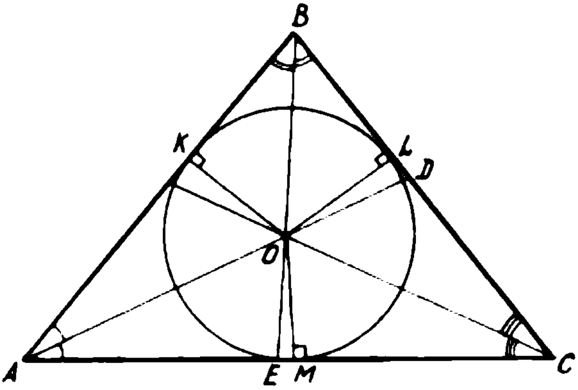
T e o r e m a. *Har qanday uchburchakka yagona ichki aylana chizish mumkin.*

I s b o t. Ixtiyoriy ABC uchburchak berilgan bo'lsin, uning tomonlariga urinuvchi yagona ichki aylana chizish mumkin ekanligini ko'rsatamiz.

Uchburchak A va B burchaklarining AD va BE bissektrisalarini o'tkazaylik. Bu bissektrisalar biror O nuqtada kesishsin (89- rasm).

O nuqtadan uchburchak tomonlariga OK, OM va OL perpendikulyarlar o'tkazamiz. Ma'lumki, burchak bissektrisasining ixtiyoriy nuqtasidan burchak tomonlarigacha bo'lgan masofalar o'zaro teng. Shuning uchun $OK=OM$ va $OK=OL$. Bundan $OM=OL$.

Markazi O nuqtada va radiusi $r=OK$ bo'lgan aylana chizamiz. Bu aylana albatta M, L nuqtalardan ham o'tadi. Aylananing OK, OM va OL radiuslari mos ravishda AB, AC va BC tomonlarga perpendikulyar bo'lgani uchun aylana uchbur-



89- rasm.

chakning uchala tomoniga ham urinadi. Demak, u ichki chizilgan aylana bo'ladi.

Biz ichki aylana chizish mumkin ekanini ko'rsatdik. Endi bunday aylana faqat bitta bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun biz uchburchakning uchinchi bissektrisasi ham O nuqtadan o'tishini ko'rsatishimiz kerak.

OC kesmani o'tkazamiz va u C burchakning bissektrisasi ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $\triangle CLO$ va $\triangle$ CMO o'zaro teng. Chunki bu uchburchaklar to'g'ri burchakli, ularning OL va OM katetlari teng va OC gipotenuzalari umumiy. Bu uchburchaklarning tengligidan $\triangle OCL = \triangle OCM$ kelib chiqadi. Demak, OC kesma C burchakning bissektrisasi ekan.

Ushbu muhim natijani hosil qildik.

N a t i j a. *Uchburchakning bissektrisalari bir nuqtada kesishadi va ularning kesishish nuqtasi uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi bo'ladi.*

MASALALAR

248. Teng yonli uchburchakning asosi 8 sm, yon tomoni esa 12 sm. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

249. Teng yonli uchburchakka O_1 markazli aylana tashqi va O_2 markazli aylana ichki chizilgan. O_1 va O_2 nuqtalar asosga tushirilgan o'rta perpendikulyarda yotishini isbotlang.

250. Agar teng tomonli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi 10 sm bo'lsa, ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

251. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing r radiusi uchun $r=\frac{2S}{a+b+c}$ formulani keltirib chiqaring.

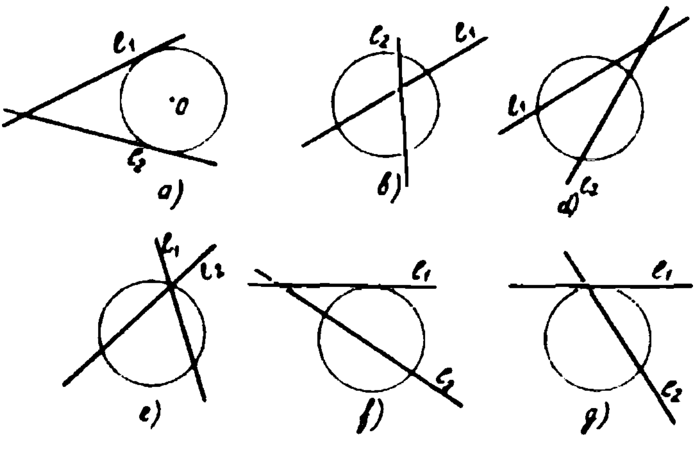
252. To'g'ri burchakli uchburchakka r radiusli aylana ichki chizilgan. Agar: a) gipotenuza 26 sm, r = 4sm; b) urinish nuqtasi gipotenuzani 5 sm va 12 sm li kesmalarga ajratsa, uchburchakning perimetrini toping.

7.7. Aylanani kesuvchi to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan burchaklarni o'lchash

Tekislikda ikkita kesishuvchi l_1, l_2 aylanani qaraylik. Aylana va to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lganda quyidagi hollar bo'lishi mumkin (90- rasm).

Mumkin bo'lgan hollarning har birida to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni o'lchash usullari bilan tanishib chiqamiz.

1- t e o r e m a. *Uchi aylananing ichida bo'lgan burchakning kattaligi burchak tomonlaridagi to'g'ri*



90- rasm.

chiziqlar aylanadan kesgan yoylar yig'indisining yarmiga teng, ya'ni

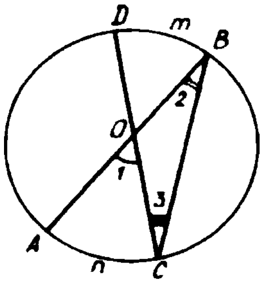
$$\angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AnC}+\overset{\smile}{DmB}).$$

I s b o t. Isbot qilish uchun BC vatarni o'tkazamiz (91-rasm). $\angle 1=\angle AOC$ hosil bo'lgan OBC uchburchakka nisbatan tashqi burchak bo'ladi. Demak, $\angle 1=\angle 2+\angle 3$. Ammo $\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AnC}$, $\angle 3=\frac{1}{2}\overset{\smile}{DmB}$, chunki $\angle 2$, $\angle 3$–ichki chizilgan burchaklar. Bundan

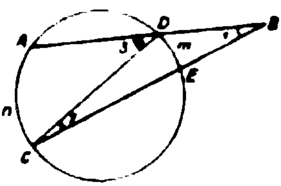
$$\angle AOC=\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AnC}+\frac{1}{2}\overset{\smile}{DmB},$$

yoki

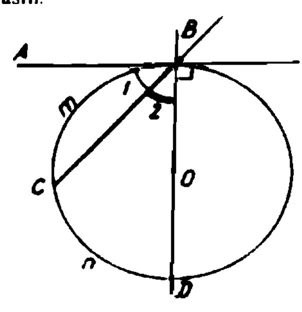
$$\angle 1=\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AnC}+\overset{\smile}{DmB})$$



91- rasm.



92- rasm.



93- rasm.

2- t e o r e m a. *Tomonlari aylanani kesuvchi va uchi aylana tashqarisida bo'lgan burchak kattaligi aylanadada o'zi ajratgan yoylar ayirmasining yarmiga teng,* ya'ni

$$\angle 1=\angle ABC=\frac{1}{2}(\smile AnC-\smile DmB).$$

I s b o t. B – aylana tashqarisidagi nuqta; BA va BC kesuvchilar bo'lsin. DC vatarni o'tkazamiz (92- rasm). $\angle 3=\angle ADC$ bu ΔBDC da tashqi burchak bo'ladi. Demak, $\angle 3 = \angle 1+\angle 2$, bundan $\angle 1=\angle 3-\angle 2$. Ammo $\angle 3=\frac{1}{2}\smile AnC$, $\angle 2=\frac{1}{2}\smile DmE$. Bularni o'rniga qo'yamiz. Demak, $\angle ABC=\angle 1=\frac{1}{2}\smile AnC-\frac{1}{2}\smile DmE$ yoki

$$\angle ABC=\frac{1}{2}(\smile AnC-\smile DmE).$$

3- t e o r e m a. *Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak o'z ichiga olgan aylana yoyining yarmi bilan o'lchanadi,* ya'ni

$$\angle ABC=\angle 1=\frac{1}{2}\smile BmC.$$

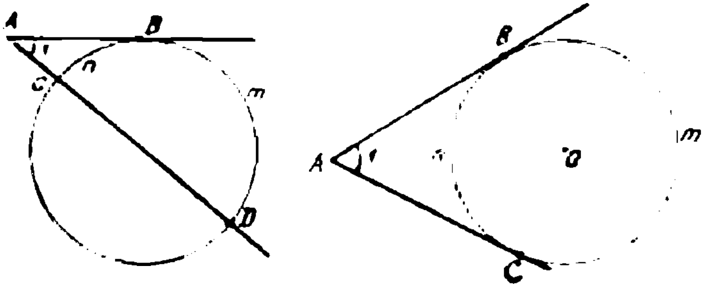
I s b o t. AB aylananing B nuqtasiga o'tkazilgan urinma va BC urinish nuqtasidan chiquvchi vatari bo'lsin. Urinish nuqtasidan BD diametrni o'tkazamiz (93- rasm). Bu diametr urinmaga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun

$\angle 1+\angle 2=d=\frac{1}{2}\smile BmD$. Ammo $\angle 2=\frac{1}{2}\smile CnD$.

Demak, $\angle 1=\frac{1}{2}\smile BmD-\frac{1}{2}\smile CnD$ yoki $\angle 1=\frac{1}{2}\smile BmC$, chunki

$\frac{1}{2}\smile BmD-\frac{1}{2}\smile CnD=\frac{1}{2}\smile BmC.$

Kesuvchi va urinma orasidagi burchak (94- rasm) hamda bir nuqtadan aylanaga o'tkazilgan ikki urinma orasidagi burchakning kattaligi uchi aylana tashqarisida bo'lgan burchak singari o'lchanadi.



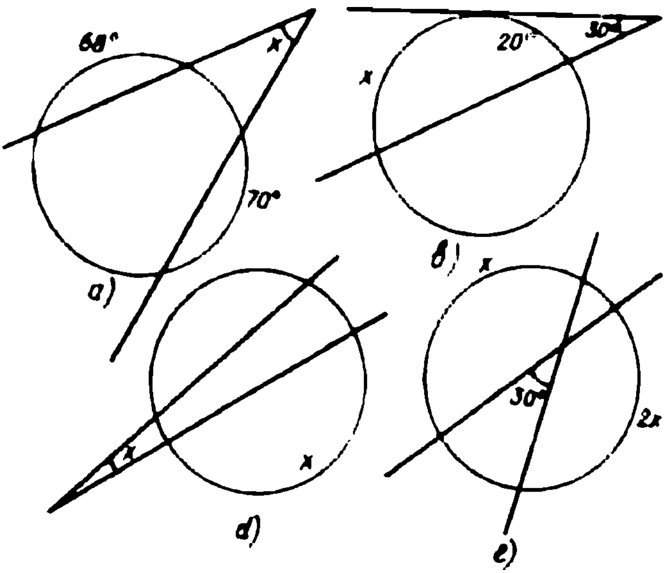
94- rasm.

MASALALAR

253. 95- rasmlarda tasvirlangan x burchakni toping.

254. Aylananing AB va CD vatarlari F nuqtada kesishadi. Agar $AF : FB = 1:3$ bo'lib, $CD=40$ sm bo'lsa, CF va FD kesmalar qancha bo'ladi?

255. O markazli aylananing AB va CD vatarlari teng bo'lsa, vatar uchlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar kesishishidan



95- rasm.

hosil bo'lgan burchak AB yoyga tiralgan markaziy burchakka tengligini ko'rsating.

256. 96- rasmda $\smile{DmB} = \frac{2}{3}\smile{AnC}$ bo'lsa, $\angle AOC$ ni toping.

257. Aylanada to'rtta nuqta A, B, C, D ketma-ket belgilangan. Agar $\angle ABC=\alpha$ bo'lsa, $\angle ADC$ nimaga teng?

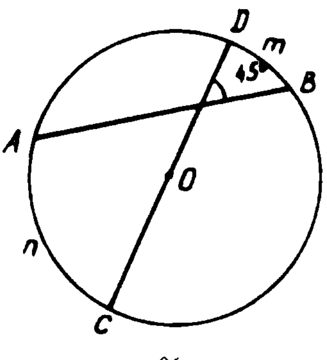
7.8. Aylana elementlariga bog'liq proporsional kesmalar

T a ' r i f. *Agar $b : a = a : c$ bo'lsa, a kesma b va c kesmalarga o'rta proporsional deb ataladi.*

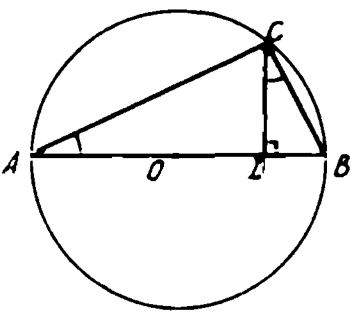
1- t e o r e m a. *Aylananing biror nuqtasidan uning diametriga tushirilgan perpendikulyar diametr kesmalari orasida o'rta proporsional miqdordir.*

$CD \perp AB$ ekanidan (97- rasm) $AD : CD=CD : DB$ kelib chiqishini isbot qilish kerak.

I s b o t. C nuqtani diametr uchlari A va B bilan tutashtiramiz. ΔACD – to'g'ri burchakli uchburchak, chunki $\angle C= 90°$ aylana diametriga tiralgan ichki chizilgan burchak, ΔADC va ΔCDB uchburchaklarda mos burchaklar o'zaro teng: $\angle ADC=\angle CDB$–to'g'ri burchak bo'lgani uchun; $\angle CAD=\angle DCB$, chunki bu burchaklar $\angle CBD$ ni to'g'ri burchakka to'ldiruvchi burchaklar, xuddi shuningdek, $\angle ACD=\angle CBD$.



96- rasm.



97- rasm

ADC va CDB uchburchaklarning mos burchaklari teng bo'lgani uchun, ularning mos tomonlari proporsional, demak,

$$\boxed{AD : CD = CD : DB.}$$

Teorema isbotlandi.

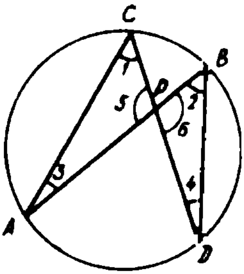
2- t e o r e m a. *Aylananing ichki nuqtasida kesishuvchi vatarlardan birining bo'laklari ko'paytmasi ikkinchi vatar bo'laklarining ko'paytmasiga teng.*

I s b o t. AB va CD vatarlar P nuqtada kesishgan bo'lsin (98- rasm).

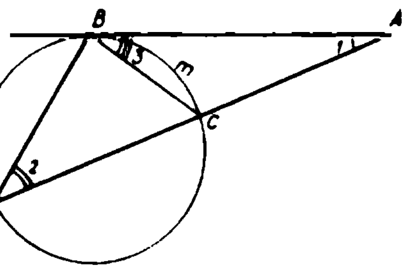
$AP\ BP=CP\ DP$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun CA va BD vatarlarni o'tkazamiz. APC va BPD uchburchaklar teng burchakli uchuburchaklardir, chunki ularda: $\angle 5=\angle 6$– vertikal burchaklar bo'lgani uchun bir-biriga teng; $\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\smile AD$ va $\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\smile CB$ bitta yoyga tiralgan ichki chizilgan burchaklar bo'lgani uchun bir-biriga teng.

APC va BPD mos burchaklari teng uchburchaklar bo'lganidan ularning mos tomonlari proporsionaldir, ya'ni

$$\frac{AP}{DP}=\frac{CP}{BP},$$



98- rasm.



99- rasm.

bundan $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ bo'ladi. Demak, AB vatar kesmalarining ko'paytmasi berilgan CD vatar kesmalarining ko'paytmasiga teng ekan. Teorema isbotlandi.

3- t e o r e m a. *Agar aylana tashqarisida berilgan nuqtadan aylanaga urinma va kesuvchi o'tkazilgan bo'lsa, urinmaning kvadrati kesuvchi bilan uning tashqi bo'lagi ko'paytmasiga teng*, ya'ni

$$\boxed{AB^2 = AC \cdot AD.}$$

I s b o t. AB – urinma. AC kesuvchi bo'lsin (99- rasm). Isbot qilish uchun aylananing BD va BC vatarlarini o'tkazamiz. Hosil bo'lgan ABD va ACB uchburchaklar mos burchaklari teng uchburchaklardir.

Bu uchburchaklarda $\angle 1$ – umumiy; $\angle 2 = \angle 3$, chunki bu ikkala burchak $\smile{BmC}$ yoyning yarmi bilan o'lchanadi. Uchburchaklarning ikkitadan burchaklari tengligidan uchinchi burchaklarining ham tengligini hosil qilamiz.

Uchburchaklarning mos burchaklari tengligidan ularning mos tomonlari proporsionalligi kelib chiqadi. Bundan

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$$

yoki $AB^2 = AD \cdot AC$ ga ega bo'lamiz.

Teorema isbotlandi.

MASALALAR

258. AB – aylana diametri, CD – unga tushirilgan perpendikulyar (97- rasm). Agar:

1) $AB = 13$ sm va $AD = 9$ sm bo'lsa, CD ni;

2) $DB = 2$ sm va $CD = 4$ sm bo'lsa, AD ni toping.

259. Agar $AC = 6$ sm va $CB = 8$ sm bo'lsa, CD kesmaning uzunligini toping (97- rasm).

260. Aylana nuqtasidan diametrga tushirilgan perpendikulyar diametrning o'rtasiga tushsa, perpendikulyar haqida nima deyish mumkin?

261. Agar (99- rasm): 1) AB=5 sm, DC=4 sm bo'lsa, AC ni; 2) DC =AC, AB =$2b$ bo'lsa, DC va AC ni; 3) AC =9 sm, DC = 7 sm bo'lsa, AB kesma uzunligini toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

262. 99- rasmda $\angle BCA$=120°, BC=4 sm, CA=5 sm bo'lsa, AB va CD ni toping.

263. AOB markaziy burchak AB yoyga tiralgan tashqi burchakdan 30° katta bo'lsa, ikkala burchakni toping.

264. AB vatar 100° li yoyga tiralgan, AC vatar esa 45° li yoyga tiralgan. BAC burchakni toping. (Masala nechta yechimga ega?).

265. AB va BC vatarlar B nuqtada kesishadi. $\overset{\smile}{AB}=60°$, $\overset{\smile}{BC}=70°$ bo'lsa, $\angle BAC$ va $\angle ABC$ ni toping. (AB va BC kesishmaydi).

266. Aylananing AB diametri CD vatariga perpendikulyar va uni P nuqtada kesib o'tadi. Agar AP=4 sm, PB=8 sm bo'lsa, CD ni toping.

267. A nuqtadan aylanaga AD urinma hamda aylanani C va D nuqtalarda kesadigan kesuvchi o'tkazilgan. Agar:

a) AB=4 sm, AC=2 sm;

b) AB=5 sm, AD=10 sm bo'lsa, CD ni toping.

268. Aylanadan tashqaridagi A nuqtadan ikkita kesuvchi o'tkazilgan. Kesuvchilardan biri aylanani B va C, ikkinchisi D va E nuqtalarda kesib o'tadi. $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ ekanini isbotlang.

269. To'g'ri burchagi C bo'lgan to'g'ri burchakli ABC uchburchakka aylana tashqi chizilgan. Agar:

a) AC=8 sm, BC=6 sm; b) AB=18 sm, $\angle B$=60° bo'lsa, aylana radiusini toping.

270. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 8 sm va asosidagi burchagi 30° bo'lsa, shu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing diametrini toping.

271. Agar teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi asosga tushirilgan balandlikni uchidan 12:5 nisbatda bo'lsa va yon tomon 60 sm bo'lsa, uning asosini toping.

272. Agar to'g'ri burchakli uchburchakda gipotenuza c ga, katetlar yig'indisi m ga teng bo'lsa, ichki chizilgan aylananing diametrini toping.

273. To'g'ri burchakli uchburchakda ichki chizilgan aylananing radiusi katetlar yig'indisi bilan gipotenuza ayirmasining yarmiga tengligini isbotlang.

274. Markazi A nuqtada va radiusi 3 sm bo'lgan aylana chizing. $AB=4$ sm, $AC=3$ sm shartni qanoatlantiruvchi B va C nuqtalarni belgilang. Nuqtalardan qaysi biri aylana ichida, qaysinisi aylana tashqarisida yotadi?

275. Markazi umumiy bo'lgan aylanalar *konsentrik aylanalar* deb ataladi. Konsentrik aylanalardan katta radiusligining vatari kichik radiusli aylanaga urinsa, urinish nuqtasida teng ikkiga bo'linishini isbotlang.

276. Aylana diametrining uchlaridan aylanaga o'tkazilgan urinmalar o'zaro parallel bo'lishini isbotlang.

277. A nuqtadan aylana markazi O gacha masofa 13 sm, aylana radiusi 5 sm, A nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq aylanaga B nuqtada urinadi. AB ning uzunligini toping.

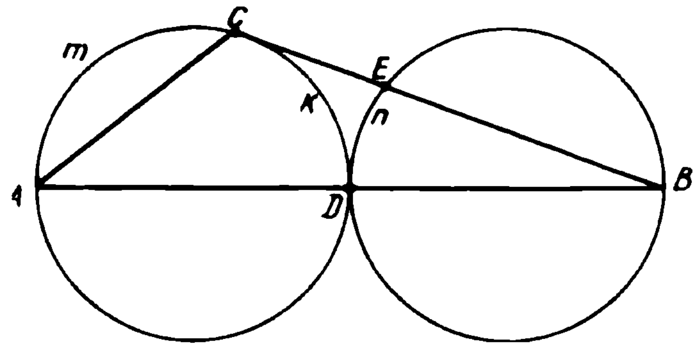
278. Uzunligi 12 sm bo'lgan vatar urinmaga parallel va urinish nuqtasidan o'tuvchi radiusning o'rtasidan kesib o'tadi. Aylananing radiusini toping.

279. 100- rasmdagi aylanalarning radiuslari o'zaro teng. Rasmdagi yoylar uchun $\smile AmC = \smile DkC + \smile DnE$ ekanini ko'rsating.

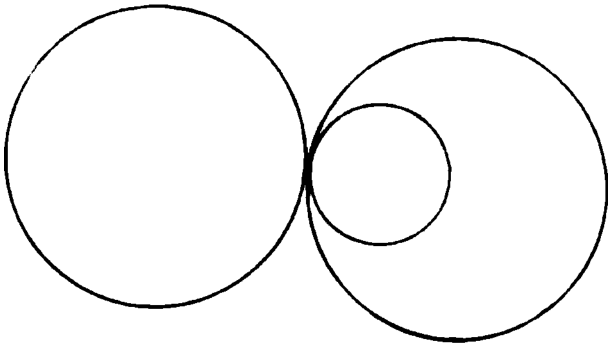
280. Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga ikkita urinma o'tkazilgan. Agar urinmalar orasidagi burchak 72° bo'lsa, urinish nuqtalari aylanani qanday gradus o'lchovli bo'laklarga bo'ladi?

281. Radiuslari har xil bo'lgan uchta aylana bir-biriga bitta nuqtada urinadi. 101- rasmda ko'rsatilgan holdan boshqa holni chizing.

282. 1) 102- rasmda PA – aylanaga urinma. Agar $PB=5$ va $PC=20$ bo'lsa, PA ning uzunligini toping.



100- rasm.



101- rasm.

2) 102- rasmda $PA = 8$ va $PB = 7$ bo'lsa, PC ni toping.

3) 102- rasmda $PA = 16$ va $BC = 24$ bo'lsa PC ni toping.

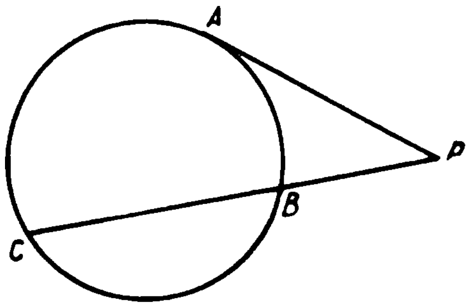
283. 1) 103-rasmda AB va AC lar aylanaga urinma. Agar aylana radiusi 5 va urinma $AB = 12$ bo'lsa, A nuqtadan aylana markazigacha bo'lgan masofani toping.

2) 103- rasmdagi AB va AC urinma kesmalarining o'zaro tengligini isbotlang.

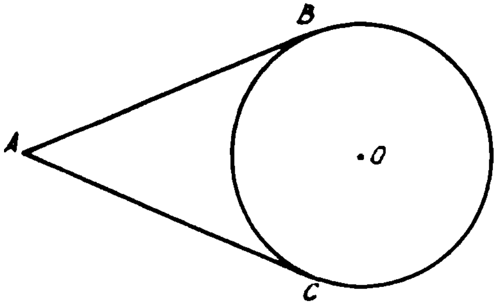
8- §. AYLANA UZUNLIGI VA DOIRANING YUZI

8.1. Ko'pburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalar

Ma'lumki, har qanday uchburchakka ichki va tashqi aylanalar chizish mumkin. Ammo ixtiyoriy ko'pburchakka har doim



102- rasm.



103- rasm.

ham ichki yoki tashqi aylanalar chizish imkoniyati bo'lavermaydi. Buni 104- rasmdan ko'rish mumkin.

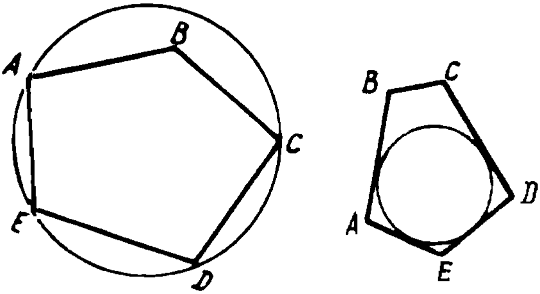
Hattoki, ixtiyoriy to'rtburchakka ichki yoki tashqi aylanalar chizish mumkin yoki mumkin emasligini ko'rsatish ham mushkuldir.

Aylanaga ichki yoki tashqi chizilgan to'rtburchaklarning ba'zi xossalari bilan tanishamiz.

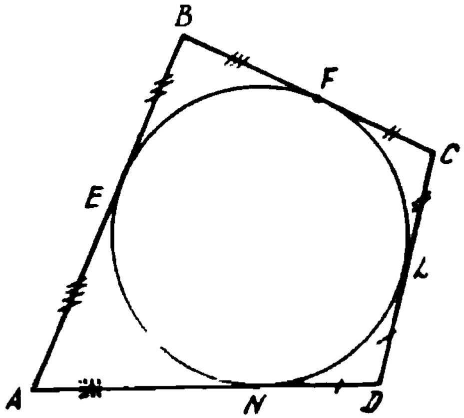
1- t e o r e m a . *Aylanaga tashqi chizilgan to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari yig'indisi o'zaro tengdir.*

I s b o t . *ABCD* to'rtburchak aylanaga tashqi chizilgan to'rtburchak bo'lsin (105-rasm). Isbot qilish kerak: $AB+CD-BC+AD$.

To'rtburchak tomonlarining aylana bilan urinish nuqtalarini mos ravishda E, F, L, N bilan belgilaylik. Aylana tashqarisidagi



104-rasm.



105-rasm.

nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinmalarning o'zaro tengligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$AE=AN,\ BE=BF,\ CL=CF,\ DL=DN.$$

Bu tengliklarning chap va o'ng tomonlarini mos ravishda qo'shib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$AE+BE+CL+DL=AN+BF+CF+DN.$$

Ammo

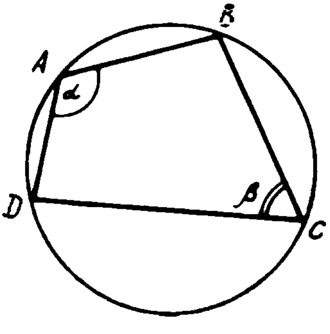
$$AE+BE=AB,\ CL+DL=CD,\ AN+DN=AD.$$

va

$$BF+CF=BC.$$

Demak,

$$AB+CD=BC+AD.$$



106-rasm

Teorema isbot qilindi.

2- t e o r e m a . *Aylanaga ichki chizilgan to'rtbuchakning qarama-qarshi burchaklari yig'indisi 180° ga teng.*

I s b o t . $ABCD$ to'rtburchakda $\angle A+\angle C-180°$ ekanini isbotlaymiz.

Teoremaning isboti aylanaga ichki chizilgan burchakni o'lchash usulidan kelib chiqadi. Ma'lumki, ichki chizilgan burchak o'zi tiralgan yoyning yarmi bilan o'lchanadi (106- rasm). To'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari α va β tiralgan yoylar aylananing to'la yoyini beradi. Aylana to'la yoyining yarmi esa 180°. Shuning uchun $\alpha+\beta=180°$, ya'ni $\angle A+\angle C=180°$.

MASALALAR

284. Aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning perimetri shu aylanaga tashqi chizilgan muntazam n burchak perimetridan ortiq bo'lmasligini isbotlang.

285. $ABCD$ to'rtburchakning AB tomoni qarshisida CD tomon yotadi. Agar:

a) $AB=5$ sm, $BC=7$ sm, $CD=12$ sm, $AD=10$ sm;

b) $AB=6$ sm, $BC=4$ sm, $CD=8$ sm, $AD=7$ sm bo'lsa, $ABCD$ to'rburchakka ichki aylana chizish mumkinmi?

286. $ABCD$ to'rtburchakda A burchak $\angle C$ ning qarshisida yotadi. Agar:

a) $\angle A=85°$, $\angle B=70°$, $\angle C=95°$;

b) $\angle A=60°$, $\angle B=120°$, $\angle C=120°$ bo'lsa, shu to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin bo'lishi uchun $\angle D$ qanday bo'lishi kerak?

287. Aylanaga tomonlari teng bo'lgan beshburchak ichki chizilgan, uning burchaklari kattaligi qanday bo'lishi kerak?

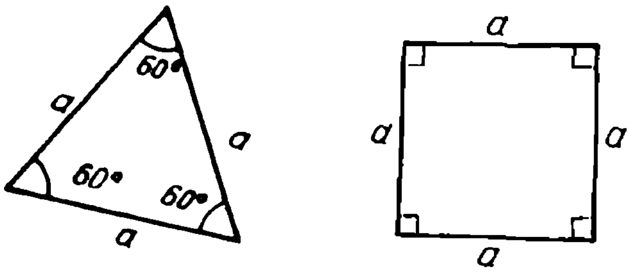
288. Qanday parallelogrammga ichki aylana chizish mumkin bo‘ladi?

289. Bitta to‘rtburchak ichki va tashqi chizilgan aylanalarga ega bo‘lishi mumkinmi? Misol keltiring.

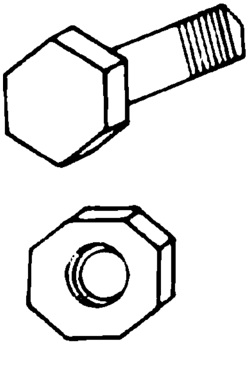
8.2. Muntazam ko‘pburchaklar

T a ’ r i f. *Hamma tomonlari teng va hamma burchaklari teng bo‘lgan qavariq ko‘pburchak muntazam ko‘pburchak deb ataladi.*

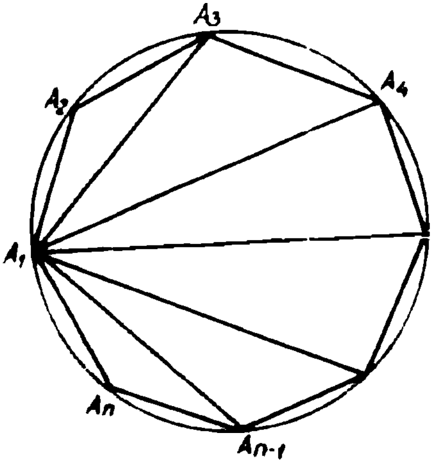
Teng tomonli uchburchak, kvadrat muntazam ko‘pburchakka misol bo‘la oladi. Haqiqatan ham (107- rasm), teng tomonli



107-rasm.



108-rasm.



109-rasm.

uchburchakning burchaklari 60° dan, kvadratning to'rttala tomoni teng va burchaklari to'g'ri burchakdir.

Avtomobil mexanizmlarida ishlatiladigan bolt va gaykalar muntazam ko'pburchak shaklida yasaladi (108- rasm).

Muntazam ko'pburchakning burchaklari kattaligi uning tomonlari soniga bog'liq. Bu bog'liqlilik ushbu teoremada ifoda etiladi.

1- t e o r e m a. *Muntazam n burchakning burchaklari* $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$*ga teng bo'ladi.*

I s b o t. Avval tomoni n ta bo'lgan muntazam ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisini aniqlaymiz. Buning uchun muntazam ko'pburchakning ixtiyoriy uchini olib, uni barcha qo'shni bo'lmagan uchlari bilan diagonallar yordamida tutashtiraylik (109- rasm).

Bunda muntazam ko'pburchak $n-2$ ta uchburchakka ajraladi. Muntazam ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi hosil bo'lgan $n-2$ ta uchburchakning burchaklari yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng.

Hamma burchaklar o'zaro teng bo'lgani uchun har bir burchakning kattaligi ichki burchaklar yig'indisining n ga nisbatiga, ya'ni

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

ga teng.

MASALALAR

290. Muntazam uchburchak, kvadrat va oltiburchak tomonlari o'zaro teng bo'lsa, ular yuzlarining nisbatlarini aniqlang.

291. Har qanday muntazam to'rtburchak kvadrat ekanligini isbotlang.

292. Burchaklari 120° bo'lgan muntazam ko'pburchakning tomonlari nechta? Burchaklari 60° bo'lsa-chi?

293. Muntazam oltiburchakning burchaklari kattami yoki muntazam sakkizburchaknimi?

294. Muntazam oltiburchakning ichki burchaklari necha gradusdan? Muntazam beshburchakning ichki burchaklari-chi?

8.3. Muntazam ko'pburchakka ichki va tashqi aylanalar chizish

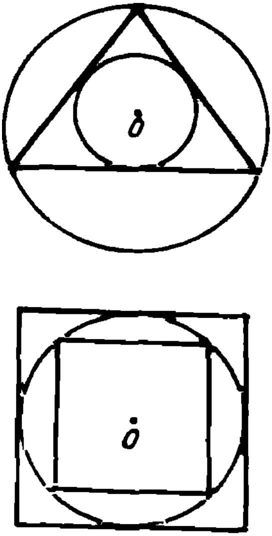
T e o r e m a. *Har qanday muntazam ko'pburchakka ichki va tashqi aylanalar chizish mumkin va bu aylanalarning markazlari ustma-ust tushadi.*

I s b o t. Muntazam ko'pburchak uchburchak va to'rtburchak bo'lganda teorema o'rinli ekanini ko'rish mumkin. Har qanday uchburchakka ichki va tashqi aylanalar chizish mumkinligini isbot qilganmiz. Markazlarining ustma-ust tushishi esa teng tomonli uchburchakda bissektrisa ham mediana, ham balandlik bo'lishidan kelib chiqadi. Chunki tomonlarning o'rta perpendikulyarlari bissektrisalar bilan ustma-ust tushadi. Muntazam to'rtburchak kvadratdir. Kvadratning diagonallari o'zaro teng va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Shuning uchun markazi diagonallarning kesishish nuqtasida bo'lgan va radiusi diagonalning yarmiga teng aylana kvadratga tashqi aylana bo'ladi.

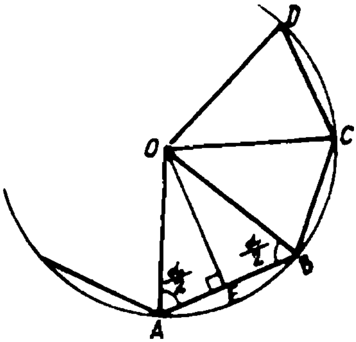
Markazi diagonallarning kesishish nuqtasida bo'lgan va radiusi kvadrat tomonining yarmiga teng aylana kvadratga ichki aylana bo'ladi (110- rasm).

Teoremani muntazam n burchak uchun isbot qilaylik. Ko'pburchakning uchlari A, B, C, D, . . . , Q nuqtalar bo'lsin (111-rasm), α– ko'pburchakning burchagi.

Ko'pburchak A va B uchlaridan burchaklarining bissektrisalarini o'tkazaylik. Bu bissektrisalar O nuqtada kesishsin. Hosil bo'lgan AOB uchburchak–teng yonli uchburchak, chunki uning asosidagi burchaklar o'zaro teng va ko'pburchak burchagining (α ning) yarmiga teng. O nuqtadan ko'pburchakning C uchiga OC kesma o'tkazamiz. ΔBOC va ΔAOB o'zaro teng. Ularda $AB=BC$ muntazam ko'pburchak tomoni bo'lgani uchun OB – umumiy tomon va $\angle OBA=\angle CBO$. Ikki tomoni va ular



110- rasm.



111- rasm.

orasidagi burchaklari tengligidan: $\Delta BOC=\Delta AOB$. Xuddi shu usul bilan $\Delta BOC=\Delta COD$ ekanini isbot qilish mumkin. Natijada $\Delta AOB=\Delta BOC=\Delta COD=...=\Delta QOA$ – teng uchburchaklarni hosil qiladimiz. Bu uchburchaklarning yon tomonlari o'zaro teng. Markazi O nuqtada va radiusi OA ga teng aylana chizamiz. Bu muntazam ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana bo'ladi.

Ichki chizilgan aylanani hosil qilish uchun ΔAOB ning O uchidan AB tomonga OE balandlik o'tkazamiz. Markazi O nuqtada va radiusi OE ga teng aylana ko'pburchakka ichki chizilgan aylana bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Muntazam ko'pburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalar bir xil markazga ega, ya'ni ustma-ust tushar ekan. Bu umumiy markaz *ko'pburchakning markazi* deyiladi.

Ichki chizilgan aylananing radiusi, ya'ni ko'pburchakning markazidan uning tomonigacha bo'lgan masofa *muntazam ko'pburchakning apofemasi* deyiladi. Tashqi chizilgan aylananing radiusi, ya'ni ko'pburchakning markazidan uning uchigacha bo'lgan masofa *ko'pburchakning radiusi* deyiladi.

Muntazam ko'pburchakning markazidan uning tomoni ko'rinadigan burchak *ko'pburchakning markaziy burchagi* deyiladi.

MASALALAR

295. Aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning perimetri 18 sm bo'lsa, shu aylanaga ichki chizilgan kvadratning tomonini toping.

296. Aylanaga tashqi chizilgan muntazam uchburchakning tomoni a ga teng. Shu aylanaga ichki chizilgan kvadratning tomonini toping.

297. Aylanaga ichki muntazam 12 burchakni sirkul va chizg'ich yordamida chizing.

298. Aylanaga tashqi muntazam uchburchak, kvadrat, muntazam 8 burchak chizing (sirkul va chizg'ich bilan).

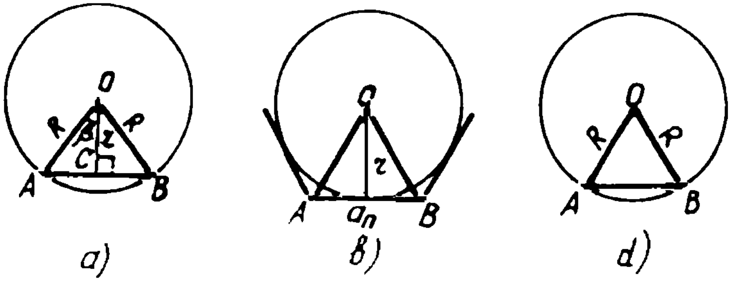
T a r i x i y m a s a l a. Doiraning uchdan (to'rtdan, oltidan, sakkizdan) birining vatarini aniqlang.

8.4. Muntazam ko'pburchakning tomoni bilan ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari orasidagi bog'lanish

Muntazam n burchakning tomonini a_n bilan belgilash qabul qilingan. Unga tashqi va ichki chizilgan aylanalarning radiuslari mos ravishda R va r bo'lsin (112- a rasm). Demak, $AB=a_n$, $OA=OB=R$ va $OC=r$.

Muntazam ko'pburchakning a_n tomoni $\frac{360°}{n}$ gradusli yoyni tortib turadi, demak, bu yoyga mos markaziy burchak ham $\frac{360°}{n}$ bo'ladi.

AOB teng yonli uchburchak ($OA=OB=R$). Bunda OC kesma AB tomonga o'tkazilgan perpendikulyar (ya'ni $OC\perp AB$), shuning uchun u:



112- rasm.

1) AB vatarni C nuqtada teng ikkiga bo'ladi, chunki u medianadir. Demak, $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a_n$.

2) AOB burchakning bissektrisasi, demak, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$

a) To'g'ri burchakli AOC uchburchakdan:

$$AC = OA \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ yoki } \frac{a_n}{2} = R \cdot \sin\frac{180}{n}$$

Bundan

$$\boxed{a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}} \qquad (1)$$

Demak, muntazam n burchakning a_n tomoni o'ziga tashqi chizilgan aylananing R radiusi orqali (1) formula bilan ifodalanadi, ya'ni (1) formula aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning tomonini unga tashqi chizilgan aylana radiusi orqali hisoblash formulasidir.

b) To'g'ri burchakli AOC uchburchakdan

$$AC = OC \cdot \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \text{ yoki } \frac{a_n}{2} = r \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$$

Bundan

$$\boxed{a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}} \qquad (2)$$

Demak, muntazam n burchakning a_n tomoni o'ziga ichki chizilgan aylananing r radiusi (apofemasi) orqali (2) formula bilan ifodalanadi, (2) formula aylanaga tashqi chizilgan muntazam n burchakning tomonini unga ichki chizilgan aylana radiusi orqali hisoblash formulasidir.

Muntazam n burchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalarning radiuslari (1) va (2) formulalarga asosan uning tomoni va tomonlari soni orqali quyidagi formulalar yordamida ifodalanadi:

$$\boxed{R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};} \qquad (3)$$

$$\boxed{r = \frac{a_n}{2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}.} \qquad (4)$$

d) $\boxed{r = R\cos\frac{180^\circ}{n}}$ (5) – bu muntazam n burchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslarini bog'lovchi formuladir.

(1) – (5) formulalardagi n ning o'rniga 3, 4 va 6 sonlarini qo'yib, muntazam uchburchak, kvadrat va muntazam oltiburchak uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

1. n=3 bo'lsin, u holda

$$a_3 = 2R\sin\frac{180^\circ}{3} = 2R\sin 60^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

$$a_3 = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{3} = 2r\,\mathrm{tg}60^\circ = 2r\sqrt{3}.$$

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{3} = R\cos 60^\circ = R\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}R$$

Demak, $a_3 = R\sqrt{3}$ yoki $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$;

$$a_3 = 2r\sqrt{3} \quad \text{yoki} \quad r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}.$$

$r = \frac{1}{2}R(r_3 = \frac{1}{2}R_3)$ (ya'ni muntazam uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi unga tashqi chizilgan aylana radiusining yarmiga teng).

2. $n = 4$; 6 uchun tegishli bog'lanishlarni keltirib chiqarishni o'zingizga havola qilamiz.

1- t e o r e m a . *Muntazam ko'pburchakning yuzi uning perimetri bilan ichki chizilgan aylana radiusi (apofemasi) ko'paytmasining yarmiga teng.*

I s b o t . R – ko'pburchakning perimetri, r – ko'pburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi (apofemasi) bo'lsin, u holda

$$S_n = \frac{1}{2}Pr$$

ekanini isbotlaymiz.

Muntazam n burchakning uchlarini ichki chizilgan aylananing markazi bilan kesmalar orqali tutashtirib, uni n ta uchburchakka ajratamiz (112- *b* rasm). Bu uchburchaklar o'zaro teng (asoslang). Bulardan har birining yuzi $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}a_n \cdot r$ ga teng, bunda a_n – muntazam ko'pburchakning tomoni.

Ko'pburchakning yuzi $S_n = \frac{1}{2}a_n \cdot r \cdot n$ ga teng, biroq $a_n \cdot n = P$. Demak,

$$S_n = \frac{1}{2}Pr$$

Teorema isbotlandi.

2- t e o r e m a . *Muntazam n* burchakning yuzi

$$S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$$

ga teng, bunda R – tashqi chizilgan aylana radiusi (112-*a* rasm).

I s b o t. $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot Sin < AOB$. Biroq

$OA = OB = R, \angle AOB = \frac{360°}{n}$. Shuning uchun

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360°}{n}.$$

Muntazam n burchak AOB uchburchakka teng n ta kesishmaydigan uchburchakdan tashkil topgani uchun

$$S_n = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360°}{n}.$$

Teorema isbotlandi.

MASALALAR

299. Muntazam n burchaklarning perimetrlari nisbati ularga tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari nisbati kabidir. Shuni isbotlang.

300. Aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning perimetri 36 sm ga teng. Shu aylanaga ichki chizilgan kvadratning tomonini toping.

301. Radiusi 6 sm li aylanaga muntazam uchburchak ichki chizilgan va bu uchburchakning tomoniga kvadrat yasalgan. Shu kvadratga tashqi chizilgan aylananing radiusini hisoblang.

T a r i x i y m a s a l a. Berilgan O markazli doiraga ABC siniq chiziq ichki chizilgan bo'lib, AB kesma BC dan katta bo'lsin. Siniq chiziqqa tortilgan AC yoyning o'rtasi D nuqtadan $DE \perp AB$ o'tkazilgan. E nuqta ABC siniq chiziqning o'rtasi ekanini isbotlang.

302. Radiusi $R = 16$ sm li aylanaga tashqi chizilgan n burchakning yuzini hisoblang: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

303. Radiusi $r = 8$ sm li aylanaga tashqi chizilgan muntazam n burchakning yuzini hisoblang: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

304. R radiusli aylanaga ichki va tashqi muntazam n burchaklar chizilgan. n=3; 4; 6 uchun: 1) shu ko'pburchaklar perimetrlarining nisbatini; 2) yuzlarining nisbatini toping.

305. Agar: 1) n=4 va $R=3\sqrt{2}$ sm; 2) n=4 va R=24 sm; 3) n=6 va r =9 sm; 4) n=8 va r =12 sm bo'lsa, muntazam n burchakning yuzini toping.

306. Aylanaga muntazam oltiburchak va kvadrat tashqi chizilgan. Agar muntazam oltiburchakning perimetri 48 sm bo'lsa, kvadratning perimetrini toping.

307. Yog'och ustunning ko'ndalang kesimi kvadrat bo'lib, uning tomoni 10 sm bo'lsa, shu ustundan yasash mumkin bo'lgan eng katta diametrli dumaloq ustunning diametrini toping.

308. Yog'och ustunning ko'ndalang kesimi radiusi 12 sm bo'lgan doiradan iborat. Shu ustundan yasash mumkin bo'lgan eng katta kvadrat kesimli ustunning tomonini toping.

309. a_4 – kvadratning tomoni, P – kvadratning perimetri, S – uning yuzi, R – tashqi chizilgan aylana radiusi, r ichki chizilgan aylana radiusi. Agar: 1) a_4=8 sm; 2) r = 4 sm; 3) R = 12 sm; 4) P=24 sm; 5) S=38 sm^2 bo'lsa, mos ravishda qolgan elementlarni toping.

310. Muntazam n burchaklar yuzlari nisbatini toping.

T a r i x i y m a s a l a. Aylana yoyiga ichki chizilgan ABC siniq chiziqning AB va BC qismlari ko'paytmasi bilan u yoyning o'rtasi bo'lgan D nuqtani B nuqta bilan tutashtiruvchi BD vatar kvadratining yig'indisi AD vatarning kvadratiga teng, ya'ni

$$AB \cdot BC + BD^2 = AD^2.$$

Shuni isbotlang.

8.5. Aylana uzunligi, burchakning radian o'lchovi

1. A y l a n a u z u n l i g i.

Aylana yoyining uzunligi haqida tasavvur hosil qilish uchun uni egiluvchan, ammo cho'zilmaydigan materialdan yasalgan deb qaraylik. Aylanani biror A nuqtasidan uzib, to'g'ri chiziqqa yotqizsak, biror AB kesma hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan kesmaning uzunligi aylana uzunligini beradi (113- rasm).

113- rasm.

Buni boshqacha usulda bajarish ham mumkin. Aylananing A nuqtasidan boshlab ipni yopishtiramiz. Ip aylanaga to'la bir marta o'ralsin, ya'ni aylanib, yana A nuqtaga kelsin. So'ngra ipning uzunligini o'lchasak, aylana uzunligini hisoblab olish mumkin.

Bu keltirilgan usullar masalada aylananing uzunligini taqribiy hisoblash yo'llaridir. Aylananing uzunligini aniq hisoblash ancha murakkab matematik masalalardan biridir.

Aylananing uzunligini hisoblashda unga ichki yoki tashqi chizilgan muntazam ko'pburchaklarning perimetrlaridan foydalaniladi. Bu hisoblash taqriban bo'lib, muntazam ko'pburchakning tomonlari soniga bog'liq bo'ladi. Ko'pburchakning tomonlari soni qanchalik katta bo'lsa, hisoblash xatoligi shunchalik kam bo'ladi.

Muntazam ko'pburchakning tomonlari soni yetarli darajada katta bo'lganda uning perimetri qiymatini aylananing uzunligi sifatida qabul qilish mumkin, ya'ni

$$C = n \cdot 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n},$$

bu yerda n – muntazam ko'pburchakning tomonlari soni,

$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ – muntazam ko'pburchak tomonining uzunligi,

C – aylana uzunligi.

Aylana uzunligini shu aylananing diametri $D=2R$ ga bo'lib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Bu tenglikning o'ng tomoni aylanaga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas kattalikdir. Bundan quyidagi muhim natijani hosil qilamiz.

N a t i j a. *Aylana uzunligining uning diametriga nisbati barcha aylanalar uchun o'zgarmas sondir (miqdordir),* ya'ni

$$\frac{C}{D}=\frac{C}{2R}=\pi$$

Bu son grekcha π (pi) harfi bilan belgilanadi. Demak,

$$\pi \approx n \sin\frac{180^\circ}{n}$$

π irratsional son bo'lib, chekli o'nli kasr orqali ifodalanmaydi. π ning taqribiy qiymati 3,14159265 ... ga teng. Agar muntazam ko'pburchakning tomonlari soni $n=96$ bo'lsa, $\pi\approx3,14$ bo'ladi.

Aylananing uzunligi

$$\boxed{C=2\pi R}$$

formula bilan hisoblanadi.

2. A y l a n a y o y i u z u n l i g i.

Ma'lumki, aylana butun yoyining 360 dan bir bo'lagini 1° deb olgan edik. Demak, 1° *yoy uzunligi butun aylana uzunligining* $\frac{1}{360}$ *bo'lagini tashkil etadi, ya'ni*

$$\frac{C}{360}=\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$$

ga teng bo'ladi. U holda n° li yoyning uzunligi

$$\frac{\pi R}{180}\cdot n$$

ga teng bo'ladi. Odatda, aylana yoyining uzunligi l harfi bilan belgilanadi. Shunday qilib, n° li yoyning uzunligi

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

formula bilan hisoblanadi.

3. B u r c h a k n i n g   r a d i a n   o' l c h o v i.

Burchakning radian o'lchovi deb, mos yoy uzunligining aylana radiusiga nisbatini aytiladi.

Aylana yoyi uzunligining formulasidan

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ}\, n^\circ$$

kelib chiqadi, ya'ni *burchakning radian o'lchovi uning gradus o'lchovini* $\frac{\pi}{180^\circ}$ *ga ko'paytirish bilan hosil qilinadi.*

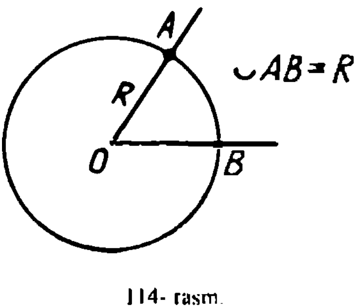
Ushbu

$$\boxed{n^{c} = \frac{\pi}{180}\cdot n}$$

formula gradus o'lchovdan radian o'lchovga o'tish formulasidir. Jumladan, 180° li burchakning radian o'lchovi π ga, to'g'ri burchakning radian o'lchovi $\frac{\pi}{2}$ ga teng. Haqiqatan ham,

$$180^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 180 = \pi,$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 90 = \frac{\pi}{2}.$$



114- rasm.

Burchaklarning radian o'lchovi birligi radiandir. *Bir radian burchak yoyining uzunligi radiusga teng burchakdir* (114- rasm). Bir radian burchakning gradus o'lchovi

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ \text{ ga teng.}$$

MASALALAR

311. Aylananing radiusi: 1) 8,5 sm; 2) 12 dm bo'lsa, uning uzunligini hisoblang.

312. Uzunligi: 1) 157 sm; 2) 12,56 sm ga teng aylananing radiusini hisoblang.

313. Kvadratning tomoni 8 sm ga teng. Shu kvadratga: 1) ichki chizilgan aylananing; 2) tashqi chizilgan aylananing uzunligini hisoblang.

314. Teng tomonli uchburchakning tomoni 6 sm ga teng. Shu uchburchakka: 1) ichki chizilgan aylananing; 2) tashqi chizilgan aylananing uzunligini hisoblang.

315. Agar $R=10$ radiusli aylana yoyining burchak kattaligi: 1) 30°; 2) 40°; 3) $\frac{\pi}{5}$ bo'lsa, shu yoyning uzunligini hisoblang.

316. r radiusli aylanaga muntazam uchburchak, to'rtburchak, oltiburchak, sakkizburchak ichki chizilgan. Ularning perimetrlarini hisoblab, aylananing uzunligi bilan solishtiring.

317. Aylananing radiusi $r = 5, \ 6, \ 8$ sm bo'lganda aylananing uzunligini hisoblang.

318. Aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning tomoni 7 sm bo'lsa, shu aylananing uzunligini toping.

319. $n = 8, \ 12, \ 24, \ 48$ bo'lganda π ning qiymatini toping va solishtiring.

320. R radiusli aylanaga tashqi va ichki chizilgan muntazam 12 burchaklarning perimetrlarini hisoblang va aylananing uzunligi bilan solishtiring.

321. $\alpha=120°, \ 150°, \ 210°$ burchaklarning radian o'lchovlarini toping.

8.6. Doiraning yuzi

Tekislikning aylana bilan chegaralangan bo'lagi doira deb ataladi.

Doiraning yuzini topish uchun doirani chegaralovchi aylanaga ichki muntazam ko‘pburchak chiziladi. Bu muntazam ko‘pburchakning yuzi (115- rasm)

$$S_n = n \cdot S_{\triangle AOB}$$

$\triangle AOB$ tomonlari aylananing radiuslari va muntazam ko‘pburchakning tomonidan iborat uchburchakdir. Muntazam ko‘pburchakning tomonlari soni ortgan sari uchburchak balandligining kattaligi aylana radiusining kattaligiga yaqin bo‘ladi. Shuning uchun

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} a_n h = \frac{1}{2} R \; 2R \sin\frac{180^\circ}{n}$$

Bundan muntazam ko‘pburchakning yuzi

$$S_n = R^2 \cdot n \sin\frac{180^\circ}{n} \approx \pi R^2 .$$

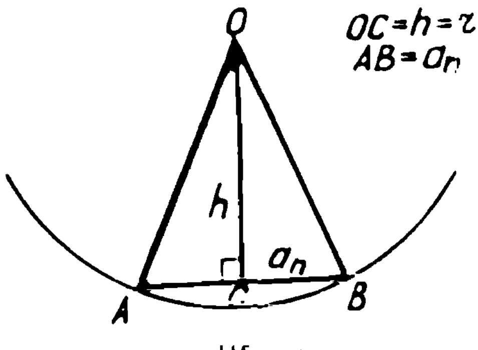
Doiraning yuzi uning aylanasiga ichki chizilgan muntazam ko‘pburchakning tomonlari soni n yetarlicha katta bo‘lganda, uning yuziga teng deb olinadi.

Doiraning yuzi

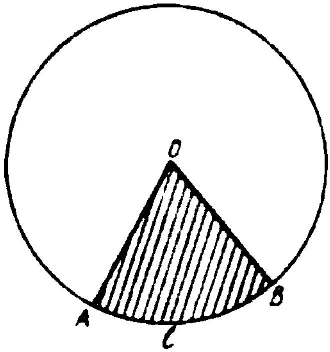
$$S = \pi R^2$$

formula bilan hisoblanadi.

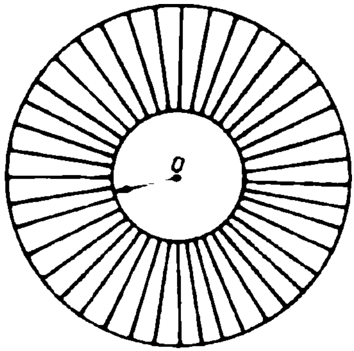
Doiraning aylana yoyi va ikki radiusi bilan chegaralangan bo‘lagi sektor deb ataladi (116- rasm).



115- rasm.



116- rasm.



117- rasm.

Yoyi 1° li sektorning yuzi doira yuzining $\frac{1}{360}$ qismiga teng.

Shuning uchun yoyi $n°$ bo'lgan sektorning yuzi $\frac{\pi R^2 n}{360}$ ga teng.
ya'ni

$$\boxed{S_{\text{sektor}} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2},}$$

bu yerda l – sektor yoyi uzunligi.

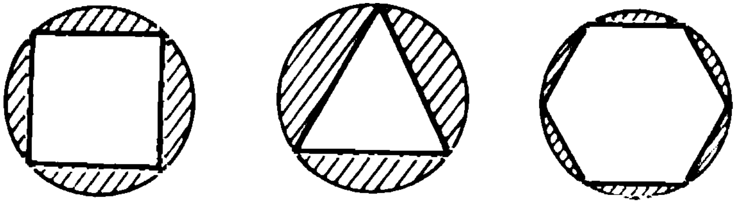
MASALALAR

322. Doira radiusi r = 8 m; 10 m; 13 m bo'lganda uning yuzini toping.

323. R radiusli doiraga ichki chizilgan muntazam 6 burchak, 8 burchak, 12 burchakning yuzlarini hisoblang va doira yuzi bilan solishtiring.

324. Markazlari bir nuqtada bo'lgan r va R radiusli doiralar orasidagi halqa yuzini toping (117- rasm).

325. Doiraga kvadrat, muntazam uchburchak, oltiburchak ichki chizilgan bo'lsa, chizmadagi shtrixlangan yuzlarni hisoblang (118- rasm).



118- rasm.

T a r i x i y m a s a l a (Arximed masalasi). Kvadratga tashqi chizilgan doiraning yuzi unga ichki chizilgan doira yuzidan ikki marta katta bo'lishini isbotlang.

326. 1) Doiraning radiusi R ni: a) bir birlik uzaytirilsa; b) ikki marta qisqartirilsa, doira yuzi qanday o'zgaradi?

R=3, 6, 8 bo'lganda hisoblang.

2) Doiraning yuzi 4 marta ortishi uchun uning radiusi qanday o'zgarishi kerak?

327. Doira aylanasining uzunligi C=25,12 sm bo'lsa, doiraning yuzini toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

328. Radiusi 7 sm bo'lgan doira yuzining chorak qismi yuzini toping.

329. Radiusi 13 sm bo'lgan aylananing 60° li, 120° li, 270° li sektori yuzlarini toping.

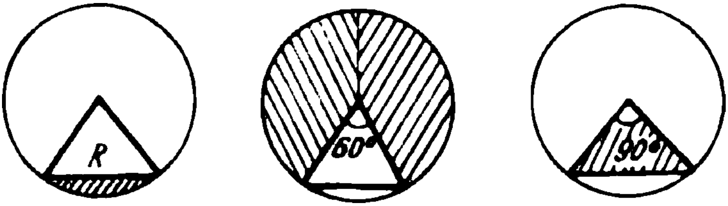
330. R radiusli doiraning $\alpha°$ li sektori uchun (119- rasm) chizmada shtrixlangan yuzlarni toping.

331. Doiraning radiusi 5 m, sektor yoyining uzunligi 3,6 m bo'lsa, sektorning yuzini toping.

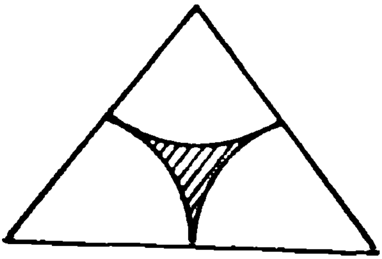
332. Muntazam ko'pburchakning burchagi 140° bo'lsa, uning tomonlari nechta?

333. Sirkul va chizg'ich yordamida muntazam oltiburchak chizing.

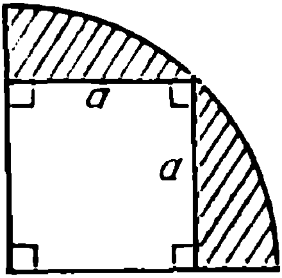
334. Velosiped g'ildiragining diametri 70 sm. G'ildirak bir marta to'la aylanganda velosiped qancha masofa yuradi? (π=3,14 deb hisoblang.)



119- rasm.



120- rasm.



121- rasm.

335. Muntazam ko'pburchakning burchaklari yig'indisi 1080° ekani ma'lum. Uning tomonlari nechta?

336. Tomoni a bo'lgan teng tomonli uchburchakning uchlariga $\frac{a}{2}$ radiusli aylana sektorlari chizilgan (120- rasm). Shtrixlangan yuzni toping.

337. Kvadrat aylananing choragiga ichki chizilgan (121- rasm). Shtrixlangan yuzni toping.

338. Sektor yoyi uzunligi bilan uning markaziy burchagi orasida bog'lanish bormi?

339. Muntazam yettiburchakka ichki chizilgan aylana radiusining tashqi chizilgan aylana radiusiga nisbatini toping.

340. Agar ikki aylananing uzunliklari teng bo'lsa, shu aylanalarning radiuslari teng bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

341. Agar aylananing uzunligi 16,2 m bo'lsa, shu aylananing radiusini toping (π=3,14).

342. Agar aylananing radiusi r bir birlik uzaytirilsa, aylananing uzunligi qanday o'zgaradi? Agar ikki marta uzaytirilsachi?

Tarixiy masala. Doira berilgan bo'lib, uni chegaralovchi aylana ustida A, D, C nuqtalar belgilangan va D nuqta AC yoyning o'rtasi. B nuqta AC yoyda ixtiyoriy olingan bo'lsin. ADC va ABC uchburchaklar yuzlarining ayirmasi BE va DE kesmalar ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ABC} = BE\ DE,$$

bunda E nuqta ABC siniq chiziqning o'rtasi. Shuni isbotlang.

Tarixiy masala. Burchakni uchta teng bo'lakka bo'lish masalasi. Ixtiyoriy burchakning uchdan biriga teng burchak yasang.

9- §. VEKTORLAR

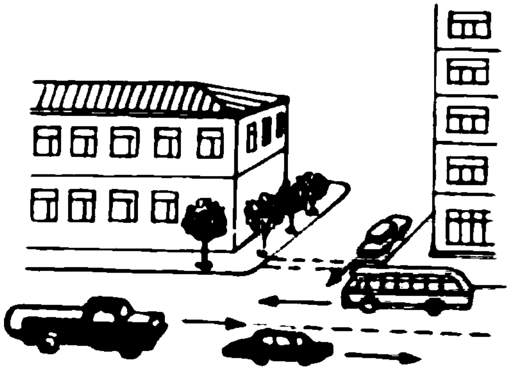
9.1. Vektor kattaliklar. Vektor

1. Vektor tushunchasi. Amaliy masalalarni hal qilayotganimizda bu masalaga bog'liq bo'lgan kattaliklarning son qiymatlaridan foydalanamiz. Masalan, uzunlik, yuz, og'irlik va shunga o'xshash kattaliklar. Bu kattaliklar haqida tasavvurga ega bo'lish uchun ularning son qiymatini bilish yetarli. Bunday kattaliklar *skalyar kattaliklar* deb ataladi.

Ammo shunday kattaliklar borki, ularning faqat son qiymatini bilish yetarli bo'lmaydi. Masalan, ikki avtomobildan biri 50 km/soat tezlik bilan, ikkinchisi 60 km/soat tezlik bilan harakatlanyapti, deylik. Ulardan biri ikkinchisiga qanday yaqinlashyapti?

Bu masalani hal qilish uchun avtomobillar bir-biriga nisbatan qanday yo'nalishda harakat qilayotgani haqida ma'lumotga ega bo'lishimiz kerak (122- rasm).

Umuman aytganda, ular bir-biriga nisbatan turli yo'nalishlarda harakatlanayotgan bo'lishi mumkin. Hattoki, bir to'g'ri yo'lda harakatlanganda ham, ular bir tomonga yoki qarama-qarshi tomonga harakatlanayotgan bo'lishlari mumkin.



122- rasm.

Shunday qilib, ba'zi kattaliklarni to'la bilish uchun bu kattaliklarni ifodalovchi son qiymatlaridan tashqari ularning yo'nalishlarini ham bilish zarur ekan.

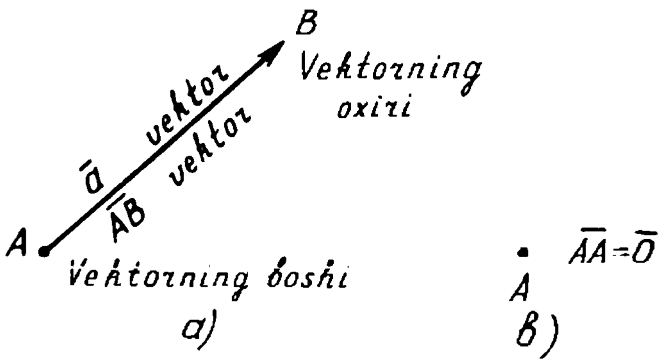
T a ' r i f. *Son qiymati va yo'nalishi bilan beriladigan (tavsiflanadigan) kattalik vektor kattalik deb ataladi.*

Vektor kattalikning son qiymati uning moduli yoki absolyut qiymati deb ataladi.

Vektor kattalikni yo'nalishi ko'rsatilgan kesma sifatida tasvirlanadi (123- *a* rasm). Vektorning yo'nalishi uning boshi va oxirini ko'rsatish bilan aniqlanadi. Chizmada vektorning yo'nalishi strelka bilan ko'rsatiladi.

Vektor kattalik uni tasvirlovchi kesmaning uchlaridagi nuqtalar (lotin alifbosining ikkita bosh harfi) yordamida $\overline{AB}$ yoki $\overline{a}$ (lotin alifbosining kichik harflari) shaklida belgilanadi. O'qilishi: *AB vektor yoki a vektor. AB vektor kattalik A nuqtadan B nuqtaga yo'nalgan vektor kattalik deb ataladi, bunda A vektorning boshi, B vektorning oxiridir.*

Kelgusida maqsadga muvofiq bo'lishini nazarga olgan holda *tekislikdagi istalgan nuqtani ham vektor bo'ladi,* deb kelishiladi. *Bu holda vektorni nol vektor deyiladi.* Nol vektorning boshi uning oxiri bilan ustma-ust tushadi, bunday



123- rasm.

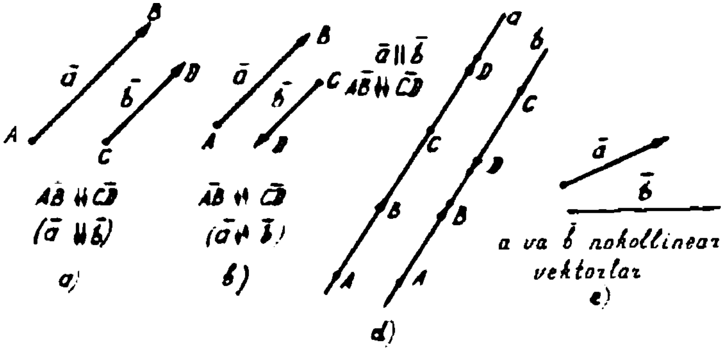
vektorni chizmada bitta nuqta ko‘rinishida tasvirlanadi. Agar, masalan, nol vektorni ifodalovchi nuqta A harfi bilan belgilangan bo‘lsa, u holda berilgan nol vektorni $\overline{AA}$ deb belgilash mumkin (123- *b* rasm). Shuningdek, nol vektor ustiga chiziqcha qo‘yilgan nol ($\bar{0}$) bilan belgilanadi. Nol vektorning yo‘nalishi haqida gapirilmaydi.

Vektorning moduli uni tasvirlovchi kesmaning uzunligiga teng bo‘lgani uchun geometriyada *vektorning modulini uning uzunligi ham deb ataladi* va $|\overline{AB}|$ yoki $|\bar{a}|$ shaklida ifodalanadi. Nol vektorning moduli nolga teng hisoblanadi: $|\bar{0}|=0$.

2. V e k t o r l a r n i n g t e n g l i g i. *Agar AB va CD nurlar yo‘nalishdosh bo‘lsa, AB va CD vektorlar yo‘nalishdosh deyiladi (124- a rasm) va quyidagicha yoziladi:* $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$.

Agar AB va CD nurlar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, u holda AB va CD vektorlar qarama-qarshi yo‘nalgan vektorlar deyiladi (124- b rasm) va $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ *ko‘rinishida yoziladi.*

Nol bo‘lmagan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yo‘nalishlari bir xil yoki qarama-qarshi bo‘lsa, ular *kollinear*, aks holda esa *nokollinear* (124- *e* rasm) vektorlar deyiladi; nol vektor istalgan vektorga kollinear deb hisoblanadi.



124- rasm.

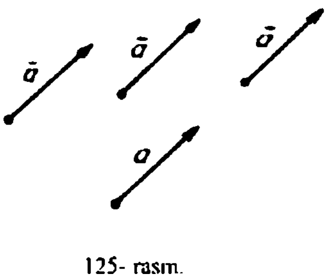
Boshqacha qilib aytganda, kollinear vektorlar yo parallel to‘g‘ri chiziqlarda, yoki bir to‘g‘ri chiziqda yotadi (124- *d* rasm).

T a ' r i f. *Uzunliklari teng va yo'nalishlari bir xil (yo'nalishdosh) vektorlarni o'zaro teng vektorlar deb ataladi,* ya'ni agar $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ va $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ bo‘lsa, u holda $\overline{AB} = \overline{CD}$ bo‘ladi.

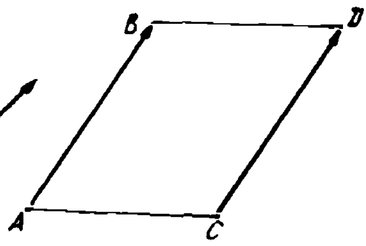
Vektorlarning tengligi tushunchasi ularni parallel ko‘chirish imkoniyatini beradi, ya’ni vektorlarni tasvirlovchi kesmaning boshini ixtiyoriy nuqtaga yo‘nalishini o‘zgartirilmagan holda ko‘chirish mumkin.

125- rasmda o'zaro teng vektorlar tasvirlangan.

Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar o'zaro teng va bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan vektorlar bo‘lsa, u holda *ABCD* parallelogramm bo‘ladi (126- rasm).



125- rasm.



126- rasm.

Bu parallelogramm tomonlarining xossalaridan kelib chiqadi. Buning aksi ham o'rinli, ya'ni parallelogrammning tomonlari bir xil yo'nalishga ega bo'lganda teng vektorlarni ifoda etadi.

MASALALAR

343. $ABCD$ parallelogrammda O nuqta diagonallarning kesishish nuqtasi bo'lsin. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, OB, $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ vektorlar ichidan:

a) $\overline{AB}$ ga kollinear (parallel);

b) $\overline{OB}$ ga teng;

d) $\overline{OA}$ ga qarama-qarshi yo'nalgan;

e) $\overline{BC}$ ga teng;

g) $\overline{AD}$ ga kollinear vektorlarni ko'rsating.

344. Daftaringizga 5 ta vektor chizing va ularning uzunliklarini hisoblang.

345. Uzunliklari teng va yo'nalishlari turli bo'lgan vektorlarni chizing.

346. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak bo'lsin. Shu to'g'ri to'rtburchak tomonlari bilan berilgan vektorlar ichidan:

a) teng vektorlarni;

b) perpendikulyar vektorlarni;

d) parallel vektorlarni;

e) kollinear vektorlarni ko'rsating.

347. $ABCD$ parallelogrammda AB va DC vektorlarning tengligini isbotlang.

348. E va F nuqtalar mos ravishda teng yonli $ABCD$ trapetsiya AB va CD yon tomonlarinnig o'rtalari bo'lsin. Quyidagi vektorlar tengmi:

1) $\overline{BC}$ va $\overline{DC}$; 2) $\overline{AF}$ va $\overline{EB}$; 3) $\overline{AB}$ va $\overline{DC}$; 4) $\overline{FE}$ va $\overline{DF}$?

349. Quyidagi tasdiqlar to'g'rimi:

1) agar $\bar{a} = \bar{b}$ bo'lsa, u holda $\bar{a} \uparrow\uparrow b$ bo'ladi;

2) agar $\bar{a} = \bar{b}$ bo'lsa, u holda a va b vektorlar kollinear bo'ladi;

3) agar $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ bo'lsa, u holda $\bar{a} = \bar{b}$ bo'ladi;

4) agar $\bar{a} = \bar{0}$ bo'lsa, u holda $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ bo'ladi.

350. Agar: 1) $\overline{AB} = \overline{DC}$ va $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$; 2) $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{DC}$, $\overline{AD}$ va $\overline{BC}$ vektorlar esa nokollinear bo'lsa, $ABCD$ to'rtburchakning turini aniqlang.

351. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakda AB=6 sm, BC=8 sm, O nuqta AB tomonning o'rtasi. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{OC}$, $\overline{OA}$, $\overline{CB}$ va $\overline{AC}$ vektorlarning uzunligini toping.

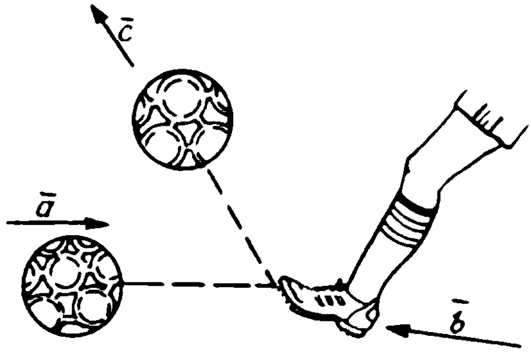
9.2. Vektorlarni qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish

1. V e k t o r l a r n i q o' s h i s h. Xuddi sonlar singari, vektorlar ustida ham qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallarini bajarish mumkin. Faqat bu amallarni bajarishda, vektorning ikki xil kattalikka bog'liq ekanini unutmaslik kerak, ya'ni natija vektorning moduli va yo'nalishi qanday bo'lishini aniq aytish lozim.

Masalan, futbol o'ynayotganingizda to'p tepish jarayonini kuzating. To'p ma'lum bir tezlikda aniq bir yo'nalishda kelayotgan bo'lsin ($\bar{a}$). Siz to'pni tepganingizdan so'ng ($\bar{b}$), u boshqa tezlikda yangi yo'nalishda ($\bar{c}$) harakat qila boshlaydi (127-rasm).

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni boshqacha ($\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{BC}$) yozib, vektorlarning yig'indisini topish qoidasini hosil qilamiz:

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.}$$



127- rasm.

Bu qoida *«uchburchak (uch nuqta) qoidasi»* deyiladi. Bu tenglik istalgan *A*, *B* va *C* nuqtalar, shuningdek, bu nuqtalardan ikkitasi yoki uchtasi ustma-ust tushgan hollarda ham o'rinlidir.

Ikki vektorning yig'indisi ularni ketma-ket qaysi tartibda qo'shishga bog'liq emas, ya'ni istalgan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar uchun

$$\boxed{\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}}$$

(o'rin almashtirish qonuni). Bu qonunning to'g'ri ekanini 128- *a* rasmdan ko'rish mumkin. Odatda, kollinear vektorlarni uchburchak (uch nuqta) qoidasi bo'yicha qo'shish qulaydir (128- *b* rasm).

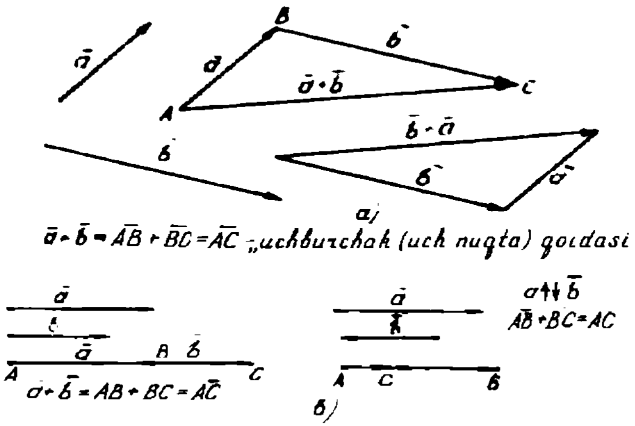
Shuningdek, *istalgan* $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ *vektorlar uchun*

$$\boxed{(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})}$$

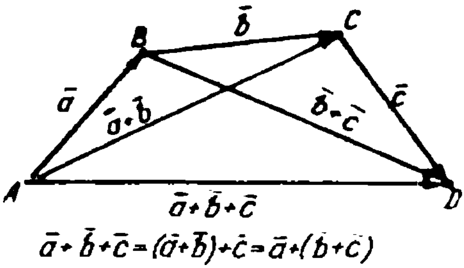
tenglik o'rinli (guruhlash qonuni) (129- rasm).

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlardan tuzilgan *ABCD* parallelogrammda yig'indi vektor qo'shiluvchi vektorlarning umumiy boshidan chiquvchi diagonaldan iborat. Odatda, *bunday qo'shish vektorlarni qo'shishning «parallelogramm qoidasi* (usuli)" *deyiladi* (130- rasm).

Ko'pincha, nokollinear ikki vektorni parallelogramm qoidasi bo'yicha qo'shish qulaydir.

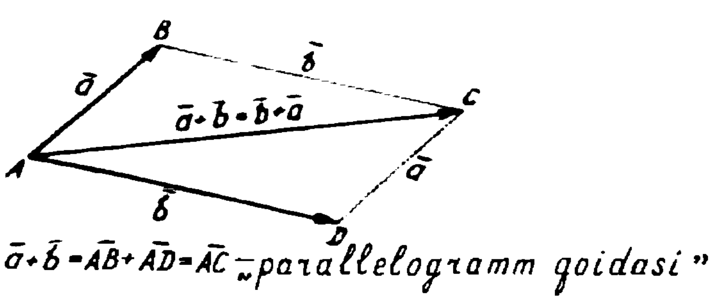


128- rasm.



129- rasm.

Ixtiyoriy a vektor uchun $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ *tenglik o'rinlidir.*

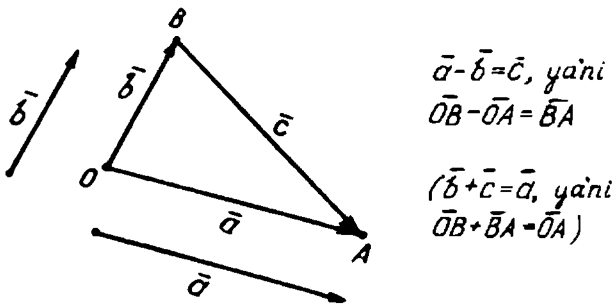


130- rasm.

2. V e k t o r l a r n i a y i r i s h. *Vektorlarni ayirish amali, xuddi sonlarni ayirish kabi qo'shishga teskari amal sifatida aniqlanadi.*

T a ' r i f. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ *vektorlarning ayirmasi deb shunday* c *vektorga aytiladiki, uning* $\bar{b}$ *vektor bilan yig'indisi* $\bar{a}$ *vektorga teng bo'ladi. Bunda* $\bar{c}$ *vektor* $\bar{a}$ *va* b *vektorlarning ayirmasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:*

$$\boxed{\bar{a}-\bar{b}=\bar{c}\cdot}$$



131- rasm.

Ta'rifdan, $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$ kelib chiqadi (131- rasm).

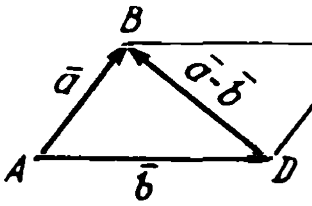
Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bitta O nuqtadan qo'yilgan bo'lsa (131- rasm), u holda $\bar{a}-\bar{b}$ ayirmani topish uchun

$$\boxed{\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}}$$

qoidadan foydalanish qulay. Bunday holda ayirma vektorning yo'nalishi kamayuvchi vektorning oxiriga yo'nalgan bo'ladi.

Ikkinchi tomondan (parallelogramm qoidasidan foydalanadigan bo'lsak), $\bar{a}-\bar{b}$ vektor $\bar{b}$ vektorning uchidan $\bar{a}$ vektorning uchiga yo'nalgan diagonalda yotuvchi vektordir (132- rasm).

Bizga ma'lumki, nuqta nol $(\bar{0})$ vektorni beradi. Agar uzunliklari teng, ammo qarama-qarshi yo'nalgan vektorlarni bir-



$$\bar{a}-\bar{b}=\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{DB}$$

132- rasm.

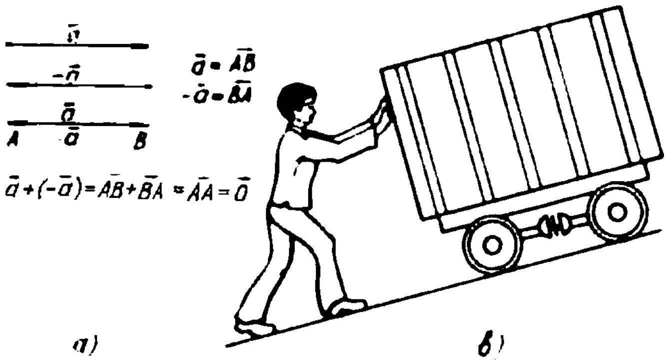
biriga qo'shsak, nol vektor hosil bo'ladi (133- *a* rasm):

$$\boxed{\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}\,.}$$

$\vec{a}$ va $-\vec{a}$ *vektorlar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi.*

Qarama-qarshi vektorlarni tasavvur qilish uchun qiyalikdan tushayotgan aravani to'xtatayotgan odamning harakatini kuzataylik. U aravani to'xtatish uchun aravaning qiyalikdan tushayotgan kuchiga teng kuch bilan qarshi tomonga itarish lozim. Shunda arava to'xtaydi, ya'ni harakat vektori $\bar{0}$ vektor bo'ladi (133- *b* rasm).

Qarama-qarshi vektorlar tushunchasidan foydalanib, vektorlar ayirmasini quyidagicha ta'riflash mumkin.

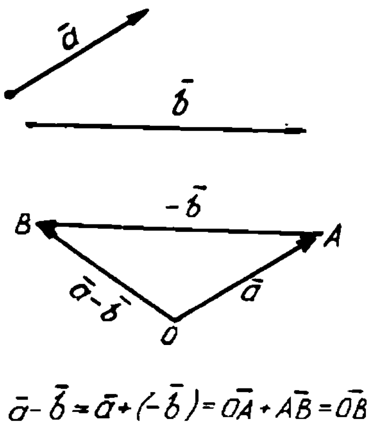


133- rasm.

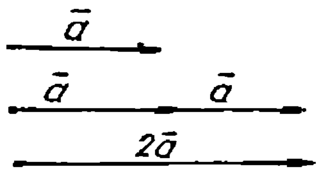
$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi $\bar{a}+(-\bar{b})$ vektorga teng (134- rasm):

$$\boxed{\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b}).}$$

3. V e k t o r n i s o n g a k o' p a y t i r i s h. $\bar{a}$ vektorni $\bar{a}$ vektorga qo'shaylik (135- rasm), bunda $2\bar{a}$ vektor hosil bo'ladi. Bu vektorning yo'nalishi saqlangan holda uzunligi ikki marta ortadi. Mana shu xossani vektorni songa ko'paytirish uchun asos qilib olinadi.



134- rasm.

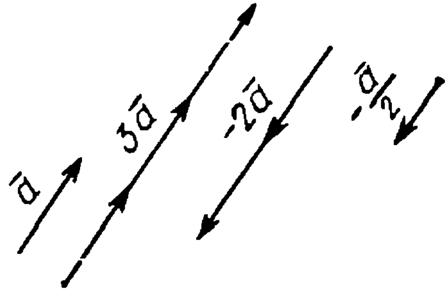


135- rasm.

T a ' r i f. *Nol bo'lmagan $\bar{a}$ vektorning $k\neq 0$ songa ko'paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, uning uzunligi $\bar{a}$ vektor uzunligining k sonning moduliga ko'paytirilganiga teng, yo'nalishi esa $k>0$ bo'lganda $\bar{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $k<0$ bo'lganda $\bar{a}$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi* (136- rasm).

$\bar{a}$ vektorning k songa ko'paytmasi $k\bar{a}$ kabi belgilanadi (son ko'paytiruvchi chap tomonga yoziladi). Ta'rifga ko'ra:

$$\boxed{|k\bar{a}|=|k|\cdot|\bar{a}|}$$



136- rasm.

Nol vektorning istalgan songa ko'paytmasi nol vektor deb hisoblanadi:

$$\boxed{k \cdot \bar{0} = \bar{0}.}$$

MASALALAR

352. ABC uchburchak chizing va a) $\overline{CA} + \overline{AB}$; b) $\overline{BA} + \overline{CB}$; d) $\overline{BA} + \overline{CA}$ vektorlarni tasvirlang.

353. $ABCD$ parallelogrammda: 1) $\overline{BD} + \overline{AB}$; 2) $\overline{AB} + \overline{DC}$; 3) $\overline{AD} + \overline{CB}$ vektorlarni belgilang.

354. A, B, C, D nuqtalarning ixtiyoriy joylashuvida $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlang.

355. X nuqta ixtiyoriy olinganda ham $\overline{AB} = \overline{XB} - \overline{AX}$ tenglik o'rinli bo'lishini isbotlang.

356. ABC uchburchakda: a) $\overline{AC} - \overline{AB}$; b) $\overline{AB} - \overline{AC}$; d) $\overline{BA} - \overline{CB}$; e) $\overline{BA} - \overline{AC}$; g) $\overline{BA} - \overline{CA}$ vektorlarni tasvirlang.

357. 3 ta ixtiyoriy vektor oling va mos ravishda ularni $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ deb belgilang. Shunday $\bar{x}$ vektor chizingki: a) $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{x}$; b) $\bar{a} = \bar{b} - \bar{c} + \bar{x}$; d) $\bar{b} = \bar{a} + \bar{c} + \bar{x}$ bo'lsin.

358. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Quyidagi vektorlar kollinear bo'ladimi:

a) $2\bar{a}$ va $3\bar{b}$; e) $3\bar{a}$ va $\bar{b}$;
b) $5\bar{a}$ va $0{,}3\bar{b}$; f) $-\bar{a}$ va $-2\bar{b}$;

d) $2\bar{a}-\bar{b}$ va $\bar{b}$; g) $2\bar{a}$ va $\bar{a}+3\bar{b}$?

359. AB kesmada shunday X nuqta olinganki, bunda AX : :XB–2 : 1. U holda: a) $\overline{AX}$ ni $\overline{XB}$; b) $\overline{BX}$ ni $\overline{XA}$; d) $\overline{AB}$ ni $\overline{AX}$ orqali ifodalang.

9.3. Vektorning koordinatalari

Tekislikda xOy koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (137- rasm). Bunda tekislikdagi har bir nuqta o'zining (x; y) koordinatalari bilan aniqlanadi.

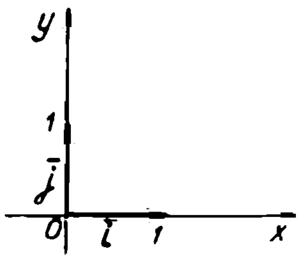
Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallaridan foydalanib, ularning koordinata ifodasini topamiz.

Buning uchun koordinata o'qlari yo'nalishi bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lgan va uzunligi bir birlikka teng bo'lgan vektorlarni qaraymiz. Bunday vektorlar *birlik vektorlar* deb ataladi.

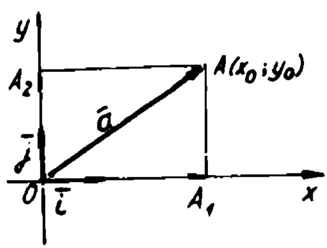
Ox o'qidagi birlik vektorni $\bar{i}$ bilan, Oy o'qidagi birlik vektorni esa $\bar{j}$ bilan belgilaymiz.

Ox o'qi bo'yicha yo'nalgan har qanday $\bar{a}_1$ vektorni $\bar{a}_1 = x_0\bar{i}$ shaklda yozish mumkin. Bu yerda $x_0 = \pm|\bar{a}_1|$ (ya'ni $|\bar{a}_1|$ shu $\bar{a}_1$ vektorning uzunligiga teng). Agar vektorning yo'nalishi Ox o'qi yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, ishora musbat, aks holda ishora manfiy bo'ladi.

Xuddi shuningdek, Oy o'qi bo'yicha yo'nalgan $\bar{a}_2$ vektorni $\bar{a}_2 = y_0\bar{j}$ shaklda yozish mumkin. Bu yerda: $y_0 = \pm|\bar{a}_2|$.



137- rasm.



138- rasm.

Endi boshi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan va oxiri $A(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lgan $\bar{a}$ vektorni qaraylik. Bunda $\bar{a}=\overline{OA}$ (138- rasm). Rasmdan $\overline{OA}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}$ ekanini ko'rish qiyin emas.

Ammo

$$\overline{OA_1}=x_0\bar{i},\ \overline{A_1A}=\overline{OA_2}=y_0\bar{j}$$

bo'lgani uchun

$$\bar{a}=\overline{OA}=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}$$

bo'ladi. *Bu tenglik $\bar{a}$ vektorning koordinata ifodasi, (x_0, y_0) ni esa vektorning koordinatalari yoki o'qdagi proyeksiyalari deb ataladi.* Qisqacha

$$a=\bar{a}(x_0;\ y_0)$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak, *$\bar{a}$ vektorning boshi koordinatalar boshida va oxiri $A(x_0;\ y_0)$ nuqtada bo'lsa*, u vektorni $\bar{a}=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}$ shaklda yozish mumkin ekan. Bu fikrning aksi ham o'rinlidir.

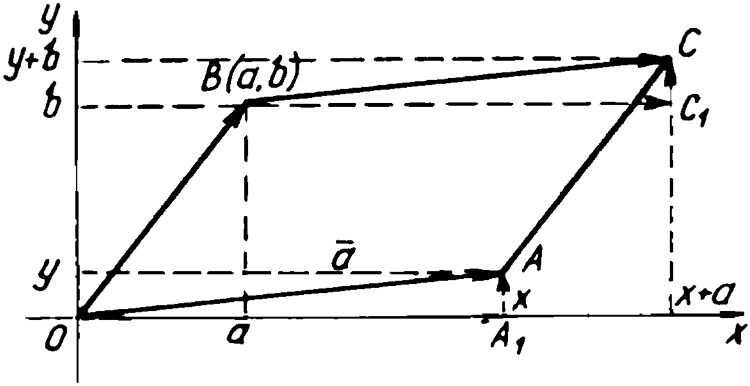
Ma'lumki, vektorlarni parallel ko'chirish mumkin. *Vektorlarni parallel ko'chirganda ularning koordinatalari o'zgarmaydi.*

Haqiqatan ham, 139- rasmdan ko'rish mumkinki, $\bar{a}$ vektorning boshi $B(a, b)$ nuqtaga ko'chirilganda ham uning koordinata o'qlari yo'nalishlaridagi proyeksiyalari o'zgarmaydi. Chunki $\overline{OA_1}=\overline{BC_1}$ va $\overline{A_1A}=\overline{C_1C}$ bo'lganligidan

$$\overline{BC}=\bar{a}=\overline{BC_1}+\overline{C_1C}=x_0\bar{i}+y_0\bar{j}.$$

MASALALAR

360. Dekart koordinatalar sistemasida: a) $\overline{OA}$ vektorni va uning Ox, Oy o'qlardagi tashkil etuvchilarini chizing; b) agar



139- rasm.

vektorning gorizontal tashkil etuvchisi vertikal tashkil etuvchisidan ikki marta uzun, qisqa va teng bo'lsa, vektorning tekislikdagi vaziyati qanday bo'ladi?

361. Vektorning tashkil etuvchilaridan birining uzunligi vektor uzunligidan katta (kichik, teng) bo'lishi mumkinmi?

362. Oxirlari umumiy bo'lgan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni chizing. Agar $\bar{b}$ vektor $\bar{a}$ vektorning tashkil etuvchisi bo'lsa, uning ikkinchi tashkil etuvchisi $\bar{c}$ ni chizing.

363. $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(-1, -1)$, $D(-5, -4)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. a) $\overline{AB}$; b) $\overline{BC}$; d) $\overline{CD}$ vektorlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

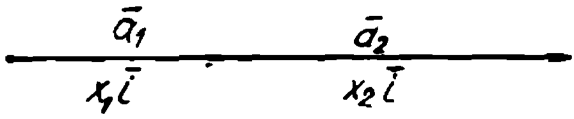
9.4. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar

Vektorlarning koordinata ifodasi ular ustida bajarilishi lozim bo'lgan qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallarini koordinatalar bilan arifmetik amallarni bajarishga o'tkazadi.

Biz avval koordinatalar o'qiga parallel vektorlarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish bilan tanishaylik.

$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ vektorlar Ox o'qiga parallel vektorlar bo'lib, $\bar{a}_1 = x_1\bar{i}$, $\bar{a}_2 = x_2\bar{i}$ bo'lsin.

$\bar{a}_1 + \bar{a}_2$ ni topish uchun bu vektorlarni ketma-ket qo'yamiz. Ularning yo'nalishlari bir xil bo'lgani uchun faqat uzunliklari qo'shiladi: $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = x_1\bar{i} + x_2\bar{i} = (x_1 + x_2)\bar{i}$ (140- rasm).



140- rasm.

Agar vektorlar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, ularning uzunliklari ayiriladi (141- rasm).

Koordinatalari bilan berilgan

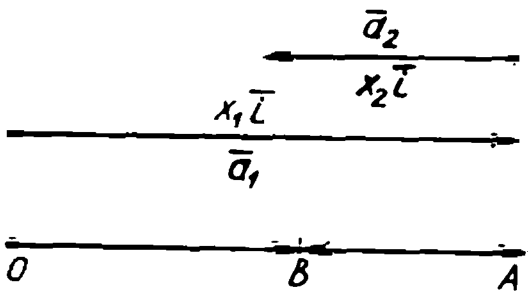
$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} \quad \text{va} \quad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$$

vektorlarni qo'shishni (ayirishni) ko'raylik:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1\bar{i} \pm y_1\bar{j}) + (x_2\bar{i} \pm y_2\bar{j}) = (x_1 \pm x_2)\bar{i} + (y_1 \pm y_2)\bar{j}.$$

Yo'nalishlari bir xil vektorlarni qo'shishdan foydalandik.

N a t i j a. *Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish (ayirish) uchun ularning mos koordinatalarini o'zaro qo'shish (ayirish) kifoya,* ya'ni $\bar{a}\{x_1\ y_1\}$ va $\bar{b}\{x_2,\ y_2\}$ bo'lsa,



$$\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = x_1\bar{i} - x_2\bar{i} = (x_1 - x_2)\bar{i}$$
$$\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \overline{OA} - \overline{AB} = \overline{OB}$$

141- rasm.

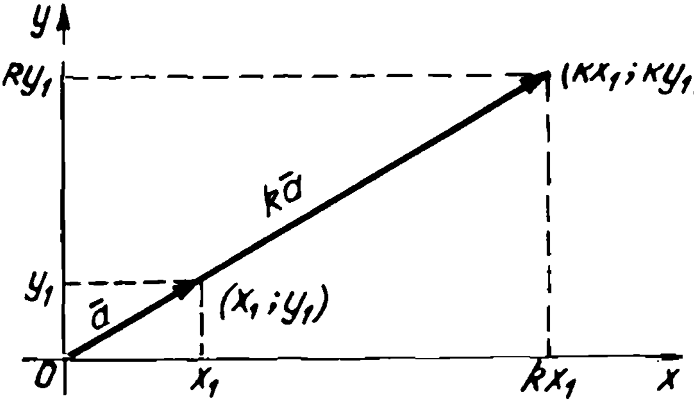
$$\overline{a} \pm \overline{b} = \{x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2\}$$

bo'ladi.

Xuddi shuningdek, *koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko'paytirish uchun uning koordinatalarini shu songa ko'paytirish kifoya,* ya'ni $\overline{a}\{x_1,\ y_1\}$ bo'lsa,

$$k\overline{a} = \{kx_1;\ kx_2\}$$

bo'ladi. Buning isbotini shakldan (142- rasm) va Fales teoremasidan foydalanib ko'rsating.



142- rasm.

MASALALAR

364. 1) $\overline{a}\ \{x,\ y\}$ vektor berilgan bo'lsin, $-\overline{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

2) $\overline{a}=\{1;\ 2\}$, $\overline{b}=\{-3;\ -1\}$ vektorlar berilgan. a) $2\overline{a}$, b) $3\overline{b}$, d) $\overline{a} + \overline{b}$, e) $\overline{b} - \overline{a}$, f) $-\frac{1}{2}\overline{a} - \frac{3}{2}\overline{b}$ vektorlarni toping.

365. a) $\bar{i}+\bar{j}$; b) $-\bar{i}+\bar{j}$; d) $-\bar{i}-\bar{j}$; e) $2\bar{i}+3\bar{j}$; f) $\bar{i}-\bar{j}$ vektorlarning koordinalarini va ularning uzunliklarini toping.

366. Agar:

a) $\bar{a}\{1;\ 4\}$, $\bar{b}\{-4;\ 8\}$; e) $\bar{a}\{10;\ 7\}$, $\bar{b}\{2;\ 2\}$;

b) $\bar{a}\{5;\ 1\}$, $\bar{b}\{7;\ 5\}$; f) $\bar{a}\{-8;\ 5\}$, $\bar{b}\{3;\ 4\}$;

d) $\bar{a}\{7;\ 5\}$, $\bar{b}\{8;\ 1\}$;

bo'lsa, $\bar{a}+\bar{b}$ vektorning modulini toping.

367. $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(-3;\ -1)$, $D(5;\ 5)$ nuqtalar berilgan. Boshi va oxirlari shu nuqtalarda bo'lgan vektorlar orasida tenglari bormi?

368. O nuqta koordinatalar boshi va $\overline{OA}=\{1;\ -2\}$ bo'lsa, A nuqtaning koordinatasini toping.

9.5. Vektorlarni skalyar ko'paytirish

$\bar{a}\{x_1,\ y_1\}$ va $\bar{b}\{x_2,\ y_2\}$ vektorlar berilgan.

T a ' r i f. *Berilgan ikki* $\bar{a}$ *va* $\bar{b}$ *vektorning skalyar ko'paytmasi deb* $x_1x_2+y_1y_2$ *songa aytiladi va* $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2$ *ko'rinishda yoziladi.*

Agar $\bar{a}$ vektorni o'zini o'ziga ko'paytirilsa, vektorning skalyar kvadrati $\bar{a}^2$ hosil bo'ladi va $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$ bo'ladi.

Ikki $\bar{b}\{x_2;\ y_2\}$ va $\bar{c}\{x_3;\ y_3\}$ vektor yig'indi vektorini $\bar{a}\{x_1;\ y_1\}$ vektorga skalyar ko'paytirilsa,

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\bar{b}+\bar{c}$ ning koordinatalari $\{x_2+x_3;\ y_2+y_3\}$ bo'lganligi uchun

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)$$

yoki taqsimot qonuniga ko'ra

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = (x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3).$$

Ta'rifdan foydalansak, tenglikning o'ng tomoni

$$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$$

ga teng ekanini ko'ramiz.

Vektorlar orasidagi burchak deb bu vektorlar umumiy boshlang'ich nuqtasiga ega bo'lganda, shu vektorlar yo'nalishiga mos keluvchi nurlar orasidagi burchak tushuniladi. Agar vektorlar kollinear bo'lsa, ular orasidagi burchak nol gradusga teng bo'ladi.

T e o r e m a. *Vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning absolyut qiymatlari bilan bu vektorlar orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng,* ya'ni

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi\,.}$$

I s b o t. Teoremani isbot qilish uchun $\bar{a}$, $\bar{b}$ va $\bar{a}-\bar{b}$ vektorlarni bir uchburchakning tomonlari shaklida ifoda etish mumkinligidan foydalanamiz.

$\bar{a}-\bar{b}$ vektorning skalyar kvadratini qaraylik:

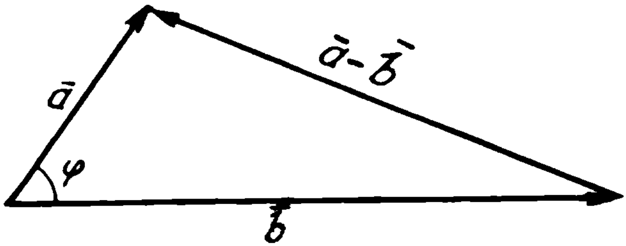
$$(\bar{a}-\bar{b})^2=(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=$$

$$=\bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}=|a|^2+|b|^2-2(\bar{b}\cdot\bar{a}).$$

Qarayotgan uchburchak uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz (143- rasm):

$$(\bar{a}-\bar{b})^2=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2-2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Bunda φ shu $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak. Oxirgi ikki ifodani bir-biriga solishtirsak,



143- rasm.

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi.$$

tenglikni hosil qilamiz.

MASALALAR

369. Skalyar ko'paytirishda $|\bar{a}|\cdot|b| = |\bar{b}|\cdot|a|$ o'rinli ekanini ko'rsating.

370. $\bar{a}\,\{3;\ 2\}$, $b\,\{-1;\ 4\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblang.

371. $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblang. Natijaning geometrik ma'nosini tushuntiring.

372. Noldan farqli ikki sonning ko'paytmasi nolga teng bo'lmaydi. Vektorlarda-chi?

373. $\bar{a}\,\{6,\ 8\}$ vektorga kollinear va u bilan bir xil yo'nalgan 6 birlik vektorni toping.

QO'SHIMCHA MASALALAR

374. $A(0,\ 1)$, $B\ (1,\ 0)$, $C(1,\ 2)$, $D(2,\ 1)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ vektorlarning tengligini isbotlang.

375. $\bar{a}\,\{1;\ 2\}$ va $b\,\{0{,}5;\ 1\}$ vektorlarning bir xil yo'nalganligini, $\bar{c}\{-1;\ 2\}$, $\bar{d}\{0{,}5;\ -1\}$ vektorlarning qarama-qarshi yo'nalganligini ko'rsating.

376. $A(2; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$ nuqtalar berilgan. Shunday $D(x, y)$ nuqtani topingki, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar teng bo'lsin.

377. A va B nuqtalarni oling. Shunday X nuqta topingki:

a) $\overline{AX} = \overline{XB}$; b) $\overline{AX} = \overline{BX}$; d) $\overline{XA} = \overline{XB}$ bo'lsin.

378. $ABCD$ to'rtburchakda:

a) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$;

b) $\overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC}$;

d) $\overline{DA} + \overline{CD} + \overline{AB}$;

e) $AC + \overline{BD} + \overline{CB}$;

f) $\overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$;

g) $\overline{AB} + \overline{DB} + \overline{CD}$;

h) $\overline{AB} + \overline{CA} + \overline{BD} + \overline{DC}$

ni tasvirlang.

379. Ixtiyoriy $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar uchun $|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a} + \bar{b}|$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang. Qaysi holda tenglik bajariladi?

380. Ushbu tengsizliklarni isbotlang:

a) $|\bar{a} - \bar{b}| \le |a + \bar{b}|$; b) $|\bar{a} - b| > |a - b|$.

381. $ABCD$ parallelogramda:

a) $\overline{AB} + \overline{AD}$;

b) $\overline{CB} - \overline{BA}$;

d) $\overline{CB} + \overline{DA}$;

e) $\overline{CB} - \overline{AD}$;

g) $\overline{DB} + \overline{DA}$;

f) $\overline{AC} + \overline{BD}$

vektorlarni tasvirlang.

382. $ABCD$ parallelogramm berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta uchun $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ tenglik o'rinli ekanini isbotlang.

383. b vektorni a vektor orqali ifodalang:

a) $a = 2\bar{b}$; b) $a = 5\bar{b}$; d) $a = 3 : 2b$; e) $a = -2{,}2b$.

384. A va B nuqtalar berilgan. Shunday X nuqtani topingki:

a) $\overline{XA} = 3XB$; b) $\overline{BX} = -2\overline{AX}$; d) $\overline{XA} - \overline{XB} = \overline{AB}$ o'rinli bo'lsin.

385. Koordinatalar sistemasida Ox o'qidagi proyeksiyasi:

a) 1; b) 0; d) –3; e) 3 bo'lgan vektorni chizing. Chizgan vektoringizning Oy o'qidagi proyeksiyasi nimaga teng?

386. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning Ox o'qiga proeksiyalari mos ravishda 2; –3; 4 ga teng bo'lsin. U holda quyidagi vektorlarning Ox o'qiga proyeksiyasini toping:

a) $2a$; b) $\bar{b}-c$; d) $c-\bar{b}$; e) $3a-0{,}5c$; f) $-\bar{a}+2b-2c$.

387. Koordinatalar sistemasini chizing. Quyidagi vektorlarning o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlang:

a) $i+2\bar{j}$; b) $2i+3j$; d) $-\bar{i}+j$; e) $2\bar{i}+3j$;

f) $0{,}5i+4\bar{j}$. $\bar{i}$, $\bar{j}$ lar Ox, Oy o'qlaridagi birlik vektorlar.

388. Quyidagi vektorlarning yig'indisini toping:

a) $a\{1;-2\}$; $\bar{b}\{2;-3\}$; e) $\bar{a}\{-5;4\}$; $\bar{b}\{2;-2\}$;

b) $a\{-3;4\}$; $\bar{b}\{2;-3\}$; f) $\bar{a}\{-1;1\}$; $\bar{b}\{2;4\}$.

d) $a\{3;2\}$; $b\{-2;-1\}$;

389. $\bar{a}-\bar{b}$ ayirmani hisoblang:

a) $\bar{a}\{1;4\}$; $\bar{b}\{1;3\}$; e) $a\{10;3\}$; $\bar{b}\{2;2\}$;

b) $\bar{a}\{-3;3\}$; $\bar{b}\{3;5\}$; f) $\bar{a}\{2;2\}$; $\bar{b}\{1;8\}$;

d) $\bar{a}\{1;-8\}$; $b\{2;2\}$;

390. $k\bar{a}$ vektorning moduli 5 ga teng. Agar: a) $\bar{a}\{-6;8\}$; b) $\bar{a}\{3;-4\}$; d) $\bar{a}\{5;12\}$ bo'lsa, k ni toping.

391. 1) Agar: a) $\bar{a}\{7;-4\}$; b) $\bar{a}\{-7;5\}$; d) $\bar{a}\{2;-2\}$; e) $\bar{a}\{-1;8\}$; f) $\bar{a}\{9;-7\}$ bo'lsa, $2\bar{a}$ vektorning modulini toping.

2) $\bar{a}\{3;2\}$; 2) $\bar{b}\{0;1\}$ vektorlar berilgan. a) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; b) $\bar{a}+2\bar{b}$; d) $3\bar{a}+4\bar{b}$; e) $5\bar{a}+10\bar{b}$; f) $-\bar{a}+2\bar{b}$ vektorlarni toping.

392. A va B nuqtalarning koordinatalari ma'lum bo'lsin. Agar $\overline{AX}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ bo'lsa, X nuqtaning koordinatalarini toping.

393. λ ning qanday qiymatida $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ vektor $\bar{b}$ vektorga va $\bar{a}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi?

394. $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c}+\bar{b}\,\bar{c}$ ekanini isbotlang.

395. $\bar{a}\{1;\ 4\}$, $\bar{b}\{-2;\ 5\}$, $\bar{c}\{4;\ 1\}$ bo'lsa, $(\bar{a}-\bar{b})\bar{c}$ ni hisoblang va uning ma'nosini tushuntiring.

396. $\bar{a}\{3;\ 5\}$ ning $\bar{i}$ va $\bar{j}$ birlik vektorlarga skalyar ko'paytmasini hisoblang.

10- §. SHAKLLARNING O'XSHASHLIGI

10.1. O'xshash shakllar. Ko'pburchaklarning o'xshashligi

1. O'xshash shakllar haqida tushuncha. *Umuman aytganda, kundalik turmushda turli o'lchamli, lekin bir xil ko'rinishli, ya'ni o'xshash shakllar (jismlar, buyumlar) tez-tez uchrab turadi.* Masalan, futbol va tennis to'plari, Yer globusi, O'zbekiston Respublikasining turli masshtabdagi xaritalari va hokazolar. Shuningdek, biror odam suratining o'ziga o'xshagan-o'xshamaganligi haqidagi bahslarni eslang. Agar Siz biror imorat poydevorining tarxini chizmoqchi bo'lsangiz, uni poydevorga aynan teng qilib chizish mushkul ekanini bilasiz. Shuning uchun poydevorni qog'ozga, uning asliga o'xshash qilib chiziladi. Bunda poydevorning asl o'lchamlari bir xil son barobar qisqartirilib olinadi. Ammo tarxda poydevor aslining hamma qismlari qatnashgan, ya'ni har bir bo'lagi o'z aksiga ega bo'ladi. *Bunday aks ettirish geometriyada shaklni shaklga almashtirish deb ataladi.* Odatda, *geometriyada bir xil ko'rinishli shakllarni o'xshash deb aytishga kelishilgan.* Istalgan ikkita kvadrat, ixtiyoriy ikkita doira o'xshash bo'ladi.

Ma'lumki, geometrik shakllar nuqtalardan tashkil topgan bo'ladi.

Agar F_1 va F_2 shakllar berilgan bo'lib, F_1 shaklning har bir nuqtasiga biror usul bilan F_2 shaklning bitta nuq-

tasi mos qo'yilsa, F_1 shakl F_2 shaklga almashtirilgan deb ataladi.

T a ' r i f. *F_1 shaklni F_2 shaklga almashtirishda mos nuqtalar orasidagi masofalar bir xil son marta o'zgarsa, bunday almashtirish o'xshashlik almashtirish deyiladi. Bu shakllar esa o'xshash shakllar deb ataladi va $F_1 \sim F_2$* ko'rinishda belgilanadi, bunda ~ – o'xshashlik belgisi.

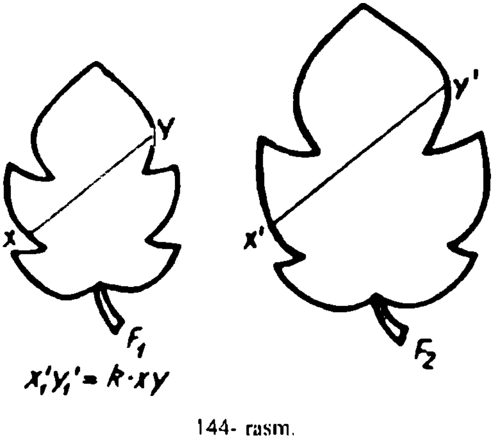
Ta'rifdan ushbuni hosil qilamiz. Agar F_1 shaklning ixtiyoriy X, Y nuqtalari o'xshashlik almashtirish natijasida F_2 shaklning X', Y' nuqtalariga o'tsa, u holda

$$X'Y' = k \cdot XY$$

bo'ladi, bunda k son hamma X, Y nuqtalar uchun o'zgarmas kattalikdir. *k son o'xshashlik koeffisienti deb ataladi* (144-rasm).

2. U c h b u r c h a k l a r n i n g o' x s h a s h l i g i h a q i d a g i d a s t l a b k i m a ' l u m o t l a r. *Ikkita uchburchakdan birining burchaklari ikkinchisining burchaklariga mos ravishda teng bo'lsa, uning teng burchaklari qarshisidagi tomonlar o'xshash tomonlar deyiladi.*

Ikkita ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchakda mos burchaklar teng bo'lsin, ya'ni $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ va $\angle C = \angle C_1$. U holda AB va A_1B_1, BC va B_1C_1 B_1C_1 va C_1A_1 tomonlar o'xshash tomonlardir (145- rasm).



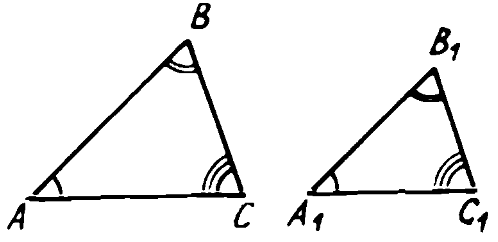
144- rasm.

Ta'rif. *Ikkita uchburchakdan birining burchaklari ikkinchisining burchaklariga mos ravishda teng va ularning o'xshash tomonlari proporsional bo'lsa, bu uchburchaklar o'xshash uchburchaklar deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, agar ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar uchun

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1 \qquad (1)$$

va



145- rasm.

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k \qquad (2)$$

bo'lsa, bu ikki uchburchak o'xshashdir, ya'ni $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. k son uchburchaklar o'xshash tomonlarining nisbati, ya'ni o'xshashlik koeffitsientidir.

(1) va (2) tengliklardan birini tekshirish yordamida uchburchaklarning o'xshashligini aniqlash mumkin ekanligini ko'rish qiyin emas.

3. Ko'pburchaklarning o'xshashligi. $ABCDE$ ko'pburchak berilgan bo'lsin (146- rasm). Ko'pburchak ichida yotuvchi ixtiyoriy S nuqtani olamiz va bu nuqtani ko'pburchakning uchlari bilan tutashtiramiz. Bu kesmalarning o'rtalarini ketma-ket kesmalar bilan tutashtirib, $A'B'C'D'E'$ ko'pburchakni hosil qilamiz.

$ABCDE$ va $A'B'C'D'E'$ ko'pburchaklar o'xshashdir.

Haqiqatan ham, SAB uchburchakda $A'B'$ uning o'rta chizig'i. Demak, $A'B'$ kesma AB kesmaga parallel va uning yarmiga teng. Xuddi shunga o'xshash, $A'B'C'D'E'$ ko'pbuchakning barcha tomonlari $ABCDE$ ko'pburchakning mos (o'xshash) tomonlarining yarmiga tengligini ko'rsatish mumkin.

$ABCDE$ va $A'B'C'D'E'$ ko'pburchaklarning S nuqtadan chiquvchi nur bilan kesishuvchi nuqtalarini o'zaro bir-biriga mos qo'ysak, ixtiyoriy $X'Y'$ nuqtalar uchun

$$XY = 2X'Y' \text{ yoki } X'Y' = \frac{1}{2}XY$$

shart bajariladi. (Buni isbotlang.)

Mos tomonlarning o'zaro parallelligidan foydalanib, bu ko'pburchaklar mos burchaklarining tengligini ko'rsatish mumkin.

Ta'rif. *Burchaklari (tomonlari) ning soni teng bo'lgan ko'pburchaklar bir ismli ko'pburchaklar deyiladi.*

Ta'rif. *Ikkita bir ismli ko'pburchakda birining burchaklari ikkinchisining burchaklariga mos ravishda teng va teng burchaklarni o'z oralariga olgan tomonlari proporsional bo'lsa, bunday ikkita ko'pburchak o'xshash ko'pburchaklar deb ataladi.*

Masalan, ikkita bir ismli $ABCDE$ va $A'B'C'D'E'$ *ko'pburchak o'xshash, ya'ni* $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ bo'lsa, u holda

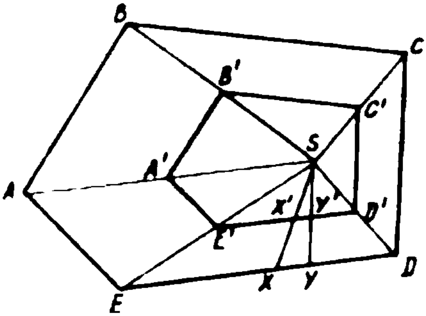
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D'$$
$$\angle E=\angle E', \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CE}{C'E'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k \qquad (2)$$

bo'ladi (146- rasm).

MASALALAR

397. Har qanday uchburchakning biror tomoniga parallel qilib o'tkazilgan kesuvchi to'g'ri chiziq shu uchburchakdan unga o'xshash uchburchak ajratishini isbotlang.



146-rasm.

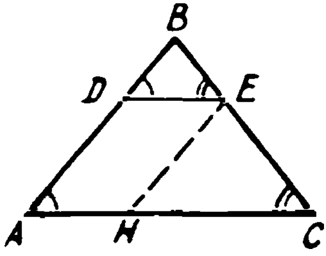
I s b o t. Ixtiyoriy $\triangle ABC$ ning AC tomoniga parallel qilib DE kesma o'tkazamiz (147- rasm). $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ ekanini isbot qilamiz.

DBE va ABC uchburchaklarda: $\angle BDE = \angle A$ va $\angle BED = \angle C$ – mos burchaklar; $\angle B$ – umumiy. E nuqtadan $EH \parallel AB$ ni o'tkazamiz; bundan $EH = AD$. $\angle B$ ning tomonlarini $DE \parallel AC$; $\angle C$ ning tomonlarini $EH \parallel AB$ tomonlar kesib o'tgan deb qaralsa, u holda

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$$

bo'ladi. Demak, $\triangle DBE$ va $\triangle ABC$ larning mos burchaklari teng va o'xshash tomonlari proporsional bo'lgani uchun, ta'rifga ko'ra ular o'xshash uchburchaklardir, ya'ni $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

398. Uchburchakning o'rta chizig'i undan o'ziga o'xshash uchburchak ajratishini isbotlang.



147- rasm.

399. Har qanday bir ismli (tomonlari soni teng) muntazam ko'pburchaklarning o'xshash ekanini isbotlang.

400. Har qanday kvadratlar (muntazam uchburchaklar) o'zaro o'xshash ekanini isbotlang.

401. O'quvchi suratga tushdi va 3×4 hamda 9×12 o'lchamli suratlar oldi. Bu suratlarda o'xshashlik koeffitsienti nechaga tengligini toping.

402. O'xshash ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda AB va A_1B_1, BC va B_1C_1 tomonlar mos tomonlardir. Agar $AB=8$ sm, $BC=10$ sm, $CA=14$ sm hamda $\frac{A_1B_1}{AB}=2{,}1$ bo'lsa, $A_1B_1C_1$ uchburchakning tomonlarini toping.

403. O'xshash ko'pburchaklarning perimetrlari nisbati o'xshashlik koeffitsientiga tengligini isbotlang.

404. Uchburchakning tomonlari 1,6 m, 3,2 m va 4 m ga teng. Bu uchburchakka o'xshash va perimetri 11 m bo'lgan uchburchakning tomonlarini toping.

405. O'xshash uchburchaklardan birining tomonlari nisbati $2:5:6$ kabi, ikkinchi uchburchakning katta tomoni 15 sm. Ikkinchi uchburchakning qolgan tomonlarini toping.

10.2. Uchburchaklar o'xshashligining alomatlari

Ko'pburchakning xususiy holi uchburchak bo'lganda o'xshashlik belgilari ancha sodda bo'ladi. Uchburchaklar o'xshashligining ba'zi alomatlari bilan tanishib chiqamiz.

I. Uchburchaklarning i k k i t a b u r c h a g i bo'yicha o'xshashlik alomati.

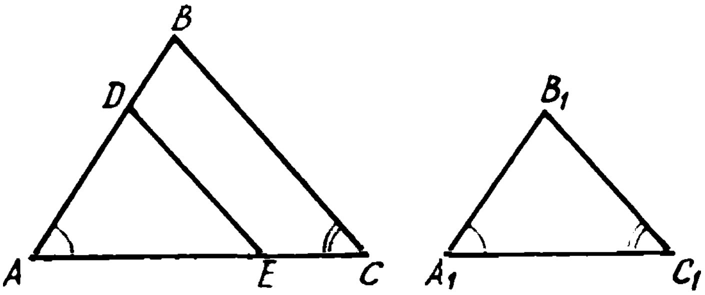
1- t e o r e m a (o'xshashlikning birinchi alomati). *Agar bir uchburchakning ikki burchagi ikkinchi uchburchakning ikki burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir.*

I s b o t i. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle A=\angle A_1$ va $\angle C=\angle C_1$ bo'lsin. $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ ekanini isbotlaymiz (148-rasm).

Ma'lumki, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi $180°$ ga teng, ya'ni

$$\angle A+\angle B+\angle C=180° \text{ va } \angle A_1+\angle B_1+\angle C_1=180°.$$

Biroq $\angle A+\angle C=\angle A_1+\angle C_1$. Demak, $\angle B=\angle B_1$.



148- rasm.

Shunday qilib, ABC uchburchakning burchaklari mos ravishda $A_1B_1C_1$ uchburchakning burchaklariga teng ekan.

Burchaklari mos ravishda teng bo'lgan uchburchaklarning mos tomonlari proporsionalligi haqidagi teoremadan ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar mos tomonlarining proporsionalligi kelib chiqadi.

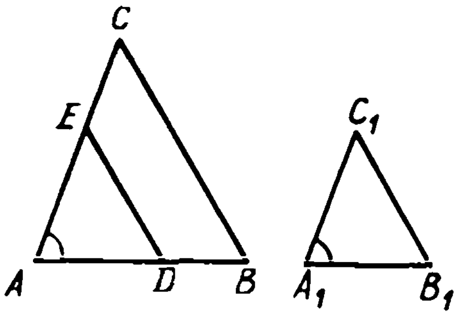
ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning mos burchaklari teng va mos tomonlari proporsional bo'lgani uchun ular (ta'rifga ko'ra) o'xshashdir, ya'ni $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Teorema isbotlandi.

2. Uchburchaklarning i k k i t a t o m o n i va ular orasidagi b u r c h a g i bo'yicha o'xshashligi.

2- t e o r e m a (o'xshashlikning ikkinchi alomati). *Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional va bu tomonlar orasidagi burchaklari teng bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir.*

I s b o t. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (ya'ni $AB=k \cdot A_1B_1$, $AC=kA_1C_1$) va $\angle A = \angle A_1$ bo'lsin. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ekanini isbotlaymiz (149- rasm).

Isbot qilish uchun AB tomonda $AD=A_1B_1$ kesmani ajratamiz. So'ngra D nuqtadan $DE \parallel BC$ o'tkazamiz. Hosil bo'lgan ADE uchburchak berilgan ABC uchburchakka o'xshash (uchburchaklar o'xshashligining 1- alomati), chunki ularning mos burchaklari teng ($\angle A$ — umumiy burchak, DE va BC parallel



149- rasm.

to'g'ri chiziqlarni AB va AC to'g'ri chiziqlar kesganda hosil bo'lgan mos burchaklar teng bo'lgani uchun $\angle ABC=\angle ADE$ va $\angle ACB=\angle AED$). $\triangle ABC\sim\triangle ADE$ dan $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, ya'ni $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{AE}$ (chunki $AD=A_1B_1$).

Shartga ko'ra: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. So'nggi ikki tenglikdan $AE=A_1C_1$ ga bo'lamiz.

Shunday qilib, ADE va A_1B_1C uchburchaklar ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra teng bo'ladi ($\angle A$ – umumiy burchak, $AD=A_1B_1$ – yasashga ko'ra va $AE=A_1C_1$ – isbotga ko'ra).

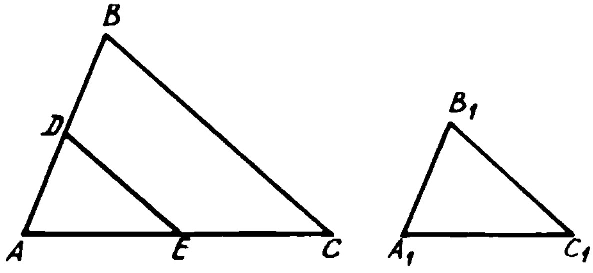
Demak, $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$. Teorema isbotlandi.

3. Uchburchakning uchta tomoniga ko'ra o'xshashlik alomati.

3- teorema. (o'xshashlikning uchinchi alomati). *Agar bir uchburchakning tomonlari ikkinchi uchburchakning tomonlariga proporsional bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir.*

Isbot. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning tomonlari proporsional bo'lsin, ya'ni

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k. \qquad (1)$$



150- rasm.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ekanini isbot qilamiz (150- rasm).

AB da $AD = A_1B_1$ ni olib, $DE \| BC$ ni o'tkazamiz. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (uchburchaklar o'xshashligining I- alomatiga ko'ra)dan:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}. \qquad (2)$$

Endi $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$ ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun (2) tenglikdagi dastlabki ikki nisbatni (1) tenglikdagi (teorema shartidagi) dastlabki ikki nisbat bilan solishtiramiz:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \text{ va } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

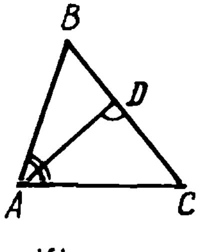
$AD = A_1B_1$ (yasashga ko'ra), demak, $DE = B_1C_1$. Xuddi shu usulga o'xshash ravishda keyingi tengliklarni solishtirib, $AE = A_1C_1$ ni hosil qilamiz. Demak, $AD = A_1B_1$, $DE = B_1C_1$, $AE = A_1C_1$ bo'lgani uchun $\triangle ADE = \triangle A_1B_1C_1$ (uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra). Shunday qilib, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Teorema isbotlandi.

MASALALAR

406. 1) ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle A = \angle A_1$ va $\angle C = \angle C_1$, $BC = 17{,}5$ sm va $B_1C_1 = 7$ sm. Agar $AB = 12{,}5$ sm bo'lsa, A_1B_1 tomonni toping.

2) Tomonlari $AC = 24$ sm va $BC = 32$ sm bo'lgan uchburchakda BC tomon bilan BAC burchakka teng ADC burchak

hosil qiluvchi AD kesma o'tkazilgan (151-rasm). DC kesmaning uzunligini toping.



151- rasm.

407. 1) ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle B=\angle B_1$ va $AB : A_1B_1=BC : B_1C_1=8:6$ berilgan. Agar $AB=32$ sm, $BC=40$ sm va $AC=48$ sm bo'lsa, $A_1B_1C_1$ uchburchak tomonlarining uzunliklarini toping.

2) ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle A=\angle A_1$ va $AB : A_1B_1=AC : A_1C_1=4:5$ ekanligi berilgan. Agar $BC+B_1C_1=90$ sm bo'lsa, ularning uzunliklarini toping.

408. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle A=\angle A_1$ va $BA : A_1B_1=AC : B_1C_1=5:2$ ekanligi berilgan. Agar AC va A_1C_1 kesmalarning ayirmasi 7,8 sm bo'lsa, ularning uzunliklarini toping.

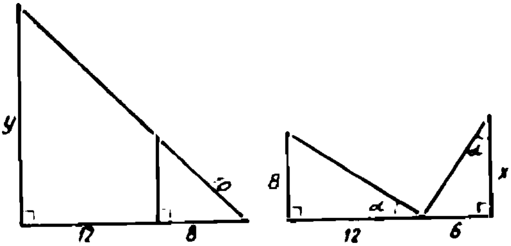
409. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $\angle A=\angle A_1$ va $\angle B=\angle B_1$: 1) $AB=10$ m, $BC=14$ m, $A_1B_1=20$ m, $A_1C_1=16$ m, 2) $AB=8$ sm, $BC=10$ sm, $A_1B_1=6$ sm, $AC-A_1C_1=3$ sm bo'lsa, uchburchakning qolgan tomonlarini toping.

410. 1) Agar bir to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagi ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning o'tkir burchagiga teng bo'lsa, bu uchburchaklar o'xshashdir (to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashligining birinchi alomati). Shuni isbotlang.

2) Bir to'g'ri burchakli uchburchakning katetlari ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning katetlariga proporsional bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir (to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashligining ikkinchi alomati). Shuni isbotlang.

3) Agar bir to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va bir kateti ikkinchi to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va bir katetiga proporsional bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir (to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashligining uchinchi alomati). Shuni isbotlang.

411. 152- rasmda berilgan ma'lumotlardan foydalanib, x va y ni toping.



152- rasm.

412. 1) $ABCD$ parallelogrammning CD tomonida P nuqta belgilangan. AP va BC to'g'ri chiziqlar O nuqtada kesishadi.

1) Agar $DP=86$ sm, $PC=8$ sm, $BC=14$ sm, $AP=20$ sm bo'lsa, PO va DC ni; 2) agar $AB=4$ sm, $AD=2{,}5$ sm, $CO=1$ sm bo'lsa, DP va PC ni toping.

2) AB va CD asosli $ABCD$ trapetsiyaning diagonallari O nuqtada kesishadi: 1) agar $OB=2$ sm, $OD=6$ sm, $DC=12{,}5$ sm bo'lsa, AB ni; 2) $AB=a$, $DC=b$ bo'lsa, $\frac{AO}{OC}$ va $\frac{BO}{OD}$ ni; 3) agar $AB=19{,}2$ dm, $DC=48$ sm, $AC=30$ sm bo'lsa, AO ni toping.

413. O'xshash uchburchaklarning yuzlari nisbati qanday bo'ladi? (Geron formulasidan foydalaning.)

414. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $AB=5$ sm, $BC=7$ sm, $A_1B_1=10$ sm, $A_1C_1=8$ sm. Uchburchaklarning qolgan tomonlarini toping.

415. Trapetsiyaning diagonallari va parallel asoslaridan hosil bo'lgan uchburchaklarning o'xshashligini isbotlang.

416. A, B, C nuqtalar aylanada yotadi. Agar $\angle ABC=30°$ va aylana diametri 10 sm ga teng bo'lsa, AC vatar nimaga teng?

417. To'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashlik alomatlarini ta'riflang.

QO'SHIMCHA MASALALAR

418. Uchburchak to'rtburchakka o'xshash bo'ladimi? Javobingizni tushuntiring.

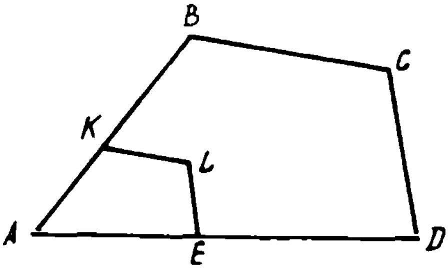
419. Tomonlari 3, 7, 8, 10 bo'lgan to'rtburchakka o'xshash to'rtburchakning perimetri 140. Shu to'rtburchakning tomonlarini toping.

420. Kontsentrik aylanalar bir-biriga o'xshash ekanini isbotlang.

421. Ixtiyoriy ikki aylana bir-biriga o'xshash ekanini isbotlang.

422. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakda AB, CD tomonlar BC tomonga parallel EK kesma bilan tutashtirilgan. Hosil bo'lgan $AEKD$ to'g'ri to'rtburchak $ABCD$ ga o'xshash. O'xshashlik koeffitsientini toping.

423. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagidan gipotenuzaga perpendikulyar o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchaklar o'zaro o'xshash ekanini ko'rsating.



153- rasm.

424. Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga urinma va kesuvchi o'tkazilib, urinish nuqtasini kesishish nuqtalari bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan uchburchaklardan qaysi biri o'xshash?

425. ABC uchburchakning A uchidan BC tomonda yotuvchi D nuqtaga AD kesma o'tkazilgan. Qanday shart bajarilganda $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ bo'ladi?

426. Ixtiyoriy $ABCD$ to'rtburchak berilgan (153- rasm). Agar $KL \parallel BC$, $EL \parallel DC$ bo'lib, $\frac{AK}{KB} = \frac{AE}{ED}$ bo'lsa, $AKLE \sim ABCD$ ekanini isbotlang.

8- SINF GEOMETRIYA KURSINI TAKRORLASH

S a v o l l a r

1. Ko'pburchakning yuzi deganda nimani tushunasiz?
2. Sodda shakl deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Yuz aksiomalarini ayting. Nima uchun yuz aksiomalari birinchi guruh aksiomalariga kiritilgan?
4. Yuzni o'lchash deganda nimani tushunasiz?
5. Birlik kvadratning tomoni ikki marta orttirildi. Bunda shakl yuzining miqdori qanday o'zgaradi? Shu savolni umumiy hol uchun ayting va unga javob bering.
6. Ikkita F_1 va F_2 shaklning yuzlari o'lchandi va natijada $S(F_1)$ va $S(F_2)$ qiymatlarga ega bo'lindi. Ularning nisbati tanlab olingan birlik kvadratga bog'liqmi?
7. Tengdosh shakllar deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
8. To'g'ri to'rtburchakning yuzi asosi bilan balandligining ko'paytmasiga tengligini isbotlang.
9. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi uning katetlari ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang. Uning yuzini boshqacha yana qanday hisoblash mumkin?
10. Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.
11. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzini uchburchakning yuzi formulasi bilan hisoblash mumkin-mi?
12. Trapetsiyaning yuzi qanday formula yordamida hisoblanadi?
13. Uchburchakning yuzini trapetsiyaning yuzini topish for-

mulasi orqali hisoblash mumkinmi? To'g'ri to'rtburchakning yuzini-chi?

14. Uchburchakning va trapetsiyaning yuzini $S=mh$ formula bilan hisoblash mumkin-mi? Bunda m – o'rta chiziq, h esa mos ravishda uchburchakning yoki trapetsiyaning balandligi.

15. Uchburchakning yuzi uning istalgan ikki tomoni ko'paytmasining yarmi bilan shu tomonlar orasidagi burchak sinusi ko'paytmasiga tengligini isbotlang.

16. Trapetsiyaning yuzi uning asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng ekanini isbotlang. Trapetsiyaning yuzini topishning boshqacha usulini bilasizmi?

17. To'g'ri to'rtburchakdan farqli parallelogramm yasang va uning bo'laklaridan to'g'ri to'rtburchak yasash mumkin bo'ladigan qilib bo'laklarga qanday qirqish mumkinligini ko'rsating.

18. Ixtiyoriy ko'pburchak chizing. Uning yuzini hisoblash usulini ayting. Bunda hisoblash jarayonidagi hisoblashlar sonini yanada kamaytirish mumkinmi?

19. Parallelogrammning yuzini hisoblash formulasini yozing.

20. Parallelogrammning yuzini trapetsiyaning yuzini topish formulasi yordamida hisoblash mumkinmi?

21. Uchburchakning, trapetsiyaning va parallelogrammning yuzlarini barchasi uchun umumiy bo'lgan qanday formula bilan hisoblash mumkin?

22. Rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang. Rombning yuzini hisoblashning boshqa formulalarini ayting.

23. Pifagor teoremasini isbotlang.

24. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini bilgan holda uning diagonalini qanday hisoblash mumkin?

25. Pifagor teoremasidan foydalanib, to'g'ri to'rtburchakning diagonallari tengligini isbotlang.

26. Pifagor teoremasiga teskari teoremani ifodalang va uni isbot qiling.

27. Qanday uchburchaklar pifagor uchburchaklari deyiladi? Pifagor uchburchaklariga misollar keltiring.

28. Nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar deganda nimani tushunasiz? Perpendikulyarning asosi nima?

29. Og'ma deb nimaga aytiladi? Og'maning asosi nima? Proyeksiyasi-chi?

30. Uchburchak tengsizligini isbotlang.

31. Uchburchakda har bir tomon qolgan ikki tomon yig'indisidan kichik ekanini isbotlang.

32. Ikki kesmaning nisbati deb nimaga aytiladi?

33. Qanday holda AB va CD kesmalar A_1B_1 va C_1D_1 kesmalarga proporsional deyiladi?

34. O'tkir burchak sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi deb nimaga aytiladi?

35. Perpendikulyarning og'maga nisbati nimaga bog'liq? Nimaga bog'liq emas?

36. Istalgan α o'tkir burchak uchun $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$, $\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$ va $\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$ bo'lishini isbotlang.

37. 30° li, 45° li va 60° li burchaklarning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi qiymatlari nimaga teng?

38. Qanday tengliklar asosiy trigonometrik ayniyatlar deyiladi?

39. Sinuslar teoremasini isbotlang.

40. Kosinuslar teoremasini isbotlang.

41. Markaziy burchak nima?

42. Qanday burchak aylanaga ichki chizilgan deyiladi?

43. Aylanaga ichki chizilgan burchak mos markaziy burchakning yarmiga teng bo'lishini isbotlang.

44. Kesishuvchi vatarlar kesmalarining va kesuvchilar kesmalarining xossalarini isbotlang.

45. Doiraning yuzi qanday formula bilan hisoblanadi?

46. Sektorning yuzi qanday formula bilan hisoblanadi?

47. Qavariq ko'pburchak burchaklari yig'indisi uchun formula chiqaring.

48. Qavariq ko'pburchakning tashqi burchagi nima?

49. Muntazam ko'pburchak aylanaga ichki chizilgan ham, tashqi chizilgan ham bo'lishi mumkinmi?

50. Muntazam n burchakka tashqi chizilgan va ichki chizilgan aylanalar radiuslari uchun formulalar chiqaring.

51. Muntazam uchburchakka, to'rtburchakka (kvadratga), muntazam oltiburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning radiuslarini toping.

52. Muntazam qavariq n burchaklar o'xshash ekanini isbotlang. Xususan, agar ularning tomonlari soni bir xil va teng bo'lsa, ular teng bo'lishini isbotlang.

53. Aylana uzunligining diametrga nisbati aylanaga bog'liq emasligini, ya'ni barcha aylanalar uchun bir xil ekanini isbotlang.

54. Aylana uzunligi qanday formula bo'yicha hisoblanadi?

55. Aylana yoyining uzunligi qanday formula bo'yicha hisoblanadi?

56. Burchakning radian o'lchovi nima?

57. $180°$ va $90°$ li burchaklarning radian o'lchovi nimaga teng?

58. Vektor kattalikning skalyar kattalikdan farqi nima? Skalyar va vektor kattaliklarga misollar keltiring.

59. Vektor nima? Vektorlar qanday belgilanadi?

60. Nol-vektor haqida nimalarni bilasiz?

61. Qanday holda vektorlar uchburchak qoidasi bo'yicha qo'shiladi? Parallelogramm qoidasi bo'yicha-chi?

62. Siz vektorlarni qo'shishning qanday qonunlarini bilasiz?

63. Ikki vektorning ayirmasi deb nimaga aytiladi?

64. Qanday ikki vektor qarama-qarshi vektorlar deyiladi?

65. Ikki vektor ayirmasini qanday usullar bilan topish mumkin?

66. Noldan farqli vektorni 0 ga teng bo'lmagan songa qanday ko'paytiriladi?

67. Noldan farqli ikki vektor qachon bir-biriga teng bo'ladi?

68. Teng vektorlarning yo'nalishlari bir xil va ular absolyut qiymatlari bo'yicha teng bo'lishini isbotlang.

69. Vektorni songa ko'paytirish ta'rifini ayting.

70. Vektorning koordinatalari nima? Vektorning koordinatasi qanday topiladi?

71. Vektorlar skalyar ko'paytmasining ta'rifini ayting.

72. Qanday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi?

73. Ixtiyoriy $\bar{a}$, $\bar{b}$, va $\bar{c}$ vektorlar uchun $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$ ekanini isbotlang.

74. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi qanday shart bajarilganda nolga teng bo'ladi?

75. Vektorlarning skalyar ko'paytmasini ularning koordinatalari orqali ifodalovchi formulani yozing.

76. O'xshashlik almashtirishi nima?

77. Qanday shakllar o'xshash shakllar deyiladi?

78. Shakllarning o'xshashligi qanday belgi bilan belgilanadi? Uchburchaklarning o'xshashligi qanday yoziladi?

79. Uchburchaklarning ikkita burchagi bo'yicha o'xshashlik alomatini ifodalang va isbotlang.

80. Uchburchaklarning ikkita tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha o'xshashlik alomatini ifodalang va isbotlang.

81. Uchburchaklarning uchta tomoni bo'yicha o'xshashlik alomatini ifodalang va isbotlang.

MASALALAR

1. 1) To'g'ri to'rtburchakning asosini o'zgartirmasdan, balandligi 3 marta uzaytirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

2) Balandligini o'zgartirmasdan, asosini 4 marta kamaytirganda-chi?

3) Asosini 4 marta, balandligini 3 marta uzaytirganda-chi?

4) Asosini 4 marta qisqartirib, balandligini 3 marta uzaytirganda-chi?

2. To'g'ri to'rtburchak tomonlarining nisbati 5 : 11 kabi, yuzi esa 55 dm^2 ga teng. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini toping.

3. Yuzlari 24 sm^2 dan, asoslarining uzunligi 6 sm, 4 sm, 8 sm bo'lgan uchta to'g'ri to'rtburchak chizing.

4. Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning katetiga yasalgan kvadrat yuzi gipotenuzaga o'tkazilgan balandlikka yasalgan kvadrat yuzidan ikki marta katta ekanini isbot qiling.

5. Parallelogrammning tomonlaridan biriga o'tkazilgan balandligi shu tomondan 3 marta kichik. Parallelogrammning yuzi 96 sm^2. Shu tomonni va balandlikni toping.

6. Parallelogrammning diagonallari uni to'rtta tengdosh uchburchakka ajratishini isbot qiling.

7. Tomonlari a va b bo'lgan uchburchakning yuzi eng katta bo'lishi uchun u qanday ko'rinishga ega bo'lishi kerak? Bunday uchburchakning yuzini hisoblang.

8. Diagonallari 8 sm va 16 sm bo'lgan barcha parallelogrammlardan qaysi biri eng katta yuzga ega bo'ladi? Uni hisoblang.

9. Trapetsiya asoslarining o'rtalari to'g'ri chiziq kesmasi bilan tutashtirilgan. Shu yo'sinda hosil qilingan ikkita trapetsiya tengdosh ekanini isbot qiling.

10. Parallelogrammning tomonlari 15 sm va 12 sm. Diagonallaridan biri uning tomoniga perpendikulyar. Diagonallarning uzunligini hisoblang.

11. Teng yonli trapetsiyaning diagonallari o'zaro perpendikulyar, asoslarining yig'indisi esa $2a$ ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

12. To'g'ri burchakli uchburchak barcha tomonlarining uzunliklari toq son bilan ifodalanishi mumkinmi?

13*. Parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning hamma tomonlari kvadratlarining yig'indisiga tengligini isbotlang.

14. 1) Teng yonli uchburchakning yon tomoni 36 sm, asosi esa 32 sm. Asosiga tushirilgan balandlikni toping. 2) Tomoni a bo'lgan teng tomonli uchburchakning balandligini toping.

15. Gipotenuzasi a ga, o'tkir burchagi 60° ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning shu o'tkir burchak qarshisidagi katetini toping.

16. 1) To'g'ri to'rtburchakning diagonali uning bir to-

monidan ikki marta katta. Uning diagonallari orasidagi burchaklarini toping.

2) Rombning diagonallari a va $a\sqrt{3}$ ga teng. Rombning burchaklarini toping.

17. Uchburchak burchaklaridan birining sinusi qolgan ikkita burchak yig'indisining sinusiga tengligini isbotlang.

18. Teng yonli uchburchakning asosi uchta teng bo'lakka bo'lingan. Ulardan qaysi biri katta burchak ostida ko'rinadi?

19*. Parallelogrammning m uzunlikdagi diagonali uning tomonlari bilan α va β burchaklar tashkil etadi. Parallelogramm tomonlarining uzunliklarini m, α va β orqali ifodalang.

20. To'rtburchakning yuzi uning diagonallari bilan ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.

21. 1) To'g'ri to'rtburchakning diagonali m ga, diagonallari orasidagi burchak α ga teng. α ning qanday qiymatida to'g'ri to'rtburchakning yuzi eng katta bo'ladi?

2) Parallelogrammning diagonallari m va n, ular orasidagi burchak α ga teng. α ning qanday qiymatida shu parallelogrammning yuzi eng katta bo'ladi? Bu holda parallelogramm qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

22*. ABC uchburchakda $\angle A=60°$, $AB+AC=1$, $\angle ABC=4°$. BC nimaga teng?

23*. Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $120°$ ga teng. 1) Uning yon tomoni 1 dm ga teng bo'lsin. Asosini hisoblang. 2) Uning asosi 1 dm ga teng bo'lsin. Yon tomonini hisoblang.

24. Parallelogrammda katta burchak qarshisida katta diagonal yotishini isbotlang. Teskari tasdiqni ham isbotlang.

25. To'g'ri burchakli uchburchakda o'tkir burchaklarning tangenslari ko'paytmasi birga tengligini isbotlang.

26. 1) Agar to'g'ri to'rtburchakning tomoni a ga hamda u tomon bilan diagonal orasidagi burchak α ga teng bo'lsa, to'g'ri to'rtburchakning yuzini toping; 2) agar to'g'ri to'rtburchakning tomoni a ga hamda diagonallari orasidagi burchak α ga teng bo'lsa, to'g'ri to'rtburchakning yuzini toping.

3) Agar rombning o'tkir burchagi α ga va diagonallaridan biri a ga teng bo'lsa, rombning yuzini toping.

4) Agar teng yonli trapetsiyaning asoslari a va b ga hamda o'tkir burchagi α ga teng bo'lsa, trapetsiyaning yuzini toping.

27*. Aylanaga bir nuqtadan o'tkazilgan ikki urinma orasidagi burchakning kattaligi shu burchak tomonlari orasidagi yoy burchak kattaligining yarmiga teng ekanligini isbotlang.

28. Aylanada umumiy nuqtaga ega bo'lgan urinma bilan vatardan yasalgan burchakning kattaligi bu burchak ichida yotgan yoy burchak kattaligining yarmiga tengligini isbotlang.

29. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari 24 sm va 32 sm ga teng: 1) shu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini hisoblang; 2) shu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusini hisoblang.

30. To'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan va ichki chizilgan aylanalar diametrlarining yig'indisi uchburchakning katetlari yig'indisiga tengligini isbotlang.

31. Aylana tashqarisidagi nuqtadan o'tkazilgan ikkita kesuvchining uzunliklari 90 mm va 75 mm, ikkinchi kesuvchining tashqi bo'lagi 48 mm. Birinchi kesuvchining tashqi bo'lagini toping.

32. Aylanada o'zaro kesishuvchi ikki vatar o'tkazilgan. Bulardan biri kesishish nuqtasida 24 sm va 6 sm li bo'laklarga, ikkinchisi teng ikkiga bo'lingan. Ikkinchi vatarning uzunligini toping.

33. Aylanadan tashqaridagi nuqtadan kesuvchi va urinma o'tkazilgan. Kesuvchi aylana bilan kesishish nuqtasida ikki kesmaga bo'linadi: ichki kesma 18 dm va tashqi kesma 6 dm. Urinmaning uzunligini toping.

34. Doiradagi vatarning uzunligi 24 sm. Bu vatarning bir uchidan urinma o'tkazilgan, bu urinmadan vatarning ikkinchi uchigacha bo'lgan masofa 16 sm. Doiraning radiusini toping.

35. Teng tomonli uchburchakning tomoni 12 sm ga teng. Shu uchburchakka: 1) ichki chizilgan aylananing uzunligini; 2) tashqi chizilgan aylananing uzunligini hisoblang.

36. Kvadratning tomoni 20 sm ga teng. Shu kvadratga: 1) ichki chizilgan aylananing; 2) tashqi chizilgan aylananing uzunligini hisoblang.

37*. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlarini diametr qilib yasalgan yarim doiralar yuzlarining yig'indisi gipotenuzasini diametr qilib yasalgan yarim doiraning yuziga teng ekanini isbotlang.

38. Agar $\overline{AC}=2\overline{AB}$ bo'lsa, $\overline{AC}$ va $\overline{BA}$ vektorlarning qarama-qarshi yo'nalganligini isbot qiling $(A \neq B)$.

39. Agar: 1) $\overline{AD}=\overline{BC}$; 2) $\overline{AD}$ va $\overline{BC}$ vektorlar kollinear ekanligi ma'lum bo'lsa, $ABCD$ to'rtburchak qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

40. Isbot qiling: 1) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{0}$; 2) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DA}=\overline{DC}$; 3) $\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{BC}+\overline{DB}=\overline{AC}$.

41. Teng tomonli uchburchakning tomoni a ga teng. Toping: 1) $|\overline{AB}+\overline{BC}|$; 2) $|\overline{AB}+\overline{AC}|$; 3) $|\overline{AB}+\overline{CB}|$; 4) $|\overline{BA}-\overline{BC}|$; 5) $|\overline{AB}-\overline{AC}|$;

42. Agar: 1) $\overline{a}\{2; -8\}$, $\overline{b}\{-8; 16\}$; 2) $\overline{a}\{-1; 3,5\}$, $\overline{b}\{2; -0,5\}$ bo'lsa, $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ vektorni va uning absolyut qiymatini toping.

43. Rombning diagonallari perpendikulyar ekanini vektorlar yordamida isbotlang.

44. 1) $\overline{a}\{x; y\}$ va $\overline{b}\{-y; x\}$ vektorlarning perpendikulyar ekanini isbotlang.

2) Quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $(\overline{a}+\overline{b})\ (\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}^2-\overline{b}^2$;

b) $(\overline{a}-\overline{b})^2=\overline{a}^2-2\overline{a}\cdot b+\overline{b}^2$.

45. To'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzaga tushirilgan balandligi uni o'ziga o'xshash ikkita uchburchakka bo'lishini isbotlang.

46. Teng tomonli ikkita uchburchak o'xshash bo'ladimi?

47. O'xshash uchburchaklarning mos balandliklari nisbati mos tomonlarining nisbati kabi bo'lishini isbotlang.

48. O'xshash ko'pburchaklar yuzlarining nisbati shu ko'pburchaklar mos tomonlari kvadratlarining nisbatiga yoki o'xshashlik koeffitsientining kvadratiga tengligini isbotlang.

49. Agar bir uchburchakning burchagi ikkinchi uchburchakning burchagiga teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklarning yuzlari shu burchaklarni o'z ichiga olgan tomonlarning ko'paytmasi kabi nisbatda bo'lishini isbotlang.

50. Trapetsiya diagonallari o'rtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi uning asoslariga parallel va asoslari ayirmasining yarmiga tengligini isbotlang.

GEOMETRIYA TARIXIDAN LAVHALAR

Geometriya fani qadimiy tarixga ega bo'lib, unga oid boshlang'ich tushunchalar bundan 4000 yil muqaddam Misr va Bobilda (Vavilon) vujudga kelgan. Misr va Bobildan so'ng geometriyaning fan sifatida rivojlanishiga Yunoniston (Qadimgi Gretsiya) olimlarining ta'siri katta bo'ldi. Bulardan Fales (miloddan avvalgi 640 – 548 yy.) yunon geometriya fanining asoschisi hisoblanadi.

Miloddan oldingi VII asr o'rtalarida Kichik Osiyoning g'arbiy chegaralari Yunonistonga qarar edi. Uning o'rta qismi Ioniya deb atalar, Ioniyada boshqa mamlakatlar bilan savdo-sotiq ishlarini olib boruvchi katta-katta shaharlar juda ko'p edi. Shunday shaharlardan biri Miletda Fales yashagan. U Misrga sayohat qilgan va u yerda turli fanlar bilan tanishgan. Falesni ko'proq geometriya qiziqtirgan. U geometriyaga tegishli juda ko'p kashfiyotlar qilgan. Fales maktabi faqat matematika fanlarini sistemalashtiribgina qolmay, balki yunon fanining rivojlanishida ham katta o'rin tutadi. Miloddan avvalgi XI asrda matematik ijodlar markazi Ioniyadan janubiy Italiyaga ko'chdi va mashhur Pifagor maktabi vujudga keldi (miloddan avvalgi 570 — 500 yy). Pifagor maktabida nazariy arifmetika, algebra hamda geometriya bilan shug'ullanishar edi. Miloddan avvalgi V asrda xioslik Gippokrat geometriyadan to'plangan barcha dalillarni bitta kitobda bayon etishga urinib ko'rdi. Uning bu asari bizgacha yetib kelmagan. Gippokratning ana shunday asar yozganligi haqidagi ma'lumotlar undan keyin yashagan qadimgi yunon olimlari Arxit, Platon, Yevdoks va Menexmning geometriyaga oid asarlarida mavjud.

Gippokratdan ikki asr keyin, miloddan avvalgi III asrda Evklid geometriyaga oid barcha bilimlarni to'plab, uni mustaqil fan sifatida bayon etdi. U o'z asarini "Negizlar" deb atadi. Evkliddan so'ng yashagan olimlar uning "Negizlar"iga ba'zi mavzularni qo'shdilar, aniqliklar kiritdilar. Ammo asosiy matn o'zgarishsiz qoldi. Shu sababli ham biz o'rta maktabda o'rganadigan geometriya *Evklid geometriyasi* deb ataladi.

Geometriya fanining tarixi alohida o'rganishni talab qiladigan fan bo'limlaridan biridir. Biz bu yerda 8- sinf geometriya kursiga kirgan asosiy tushunchalar va muhim teoremalarga oid tarixiy ma'lumotlarnigina ko'rib chiqamiz.

Y u z   h a q i d a

Shakllarning yuzlarini hisoblash haqidagi bilimlar juda qadim zamonlarda vujudga kelgan. Bundan 4 — 5 ming yil ilgari misrliklar to'g'ri to'rtburchak va trapetsiya yuzini kvadrat birliklarda hisoblashni bilishgan. Kvadratning tomonlari va burchaklari teng bo'lgani uchun ham uni yuz o'lchov birligi sifatida ishlatish qulay bo'lgan.

Misrliklar uchburchak, to'g'ri to'rtburchak va trapetsiyaning yuzlarini hisoblashda hozir biz ishlatadigan qoidalarni qo'llashgan.

Evklid "Negizlar" asarining 33 — 48- jumlalarida yuzlari bo'yicha tengdosh parallelogrammlar, kvadratlar va uchburchaklarning yuzlarini solishtirish bilan shug'ullanadi.

Boshqa matematiklar singari Evklid ham bir shaklni unga tengdosh shaklga almashtirish bilan shug'ullangan. Masalan, "Negizlar"da berilgan ixtiyoriy ko'pburchakka tengdosh bo'lgan kvadrat yasashga doir masala hal qilindi. Bunda u yuzlarni ifodalagan sonlar ustida emas, balki yuzlar ustida amallar bajaradi. Hozir algebraik usulda hosil qilinadigan narsani Evklid geometriya yordamida hosil qilgan.

Geronning geometriyaga taalluqli asosiy asari "Metrika" deb ataladi. U uchta kitobdan iborat bo'lib, birinchi kitobda yuzlar va sirtlarni hisoblash nazariyasi bayon etilgan. Tomonlari uzunligidan foydalanib uchburchak yuzini hisoblash birinchi kitobda keltirilgan. Geron taklif etgan bu formula Arximedga ham ma'lum bo'lgan.

O'rta Osiyolik buyuk allomalardan Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning (783 — 850) "Al-jabr va al-muqobala amallaridan qisqacha kitob" nomli asarining anchagina qismini hisoblashga doir geometrik masalalar va ularni yechish usullari tashkil etadi. Shu masalalardan biri tomonlari ma'lum bo'lganda uchburchak yuzini hisoblash masalasidir.

O'rta asrlarda O'rta Osiyodan chiqqan matematiklarning asarlarida yuzlarni hisoblashga doir masalalar juda ko'p. Avvallari bizda yuz o'lchovi sifatida "tanob" birligi ishlatilgan.

To'g'ri burchakli uchburchak haqida

Geometriyada ko'p masalalar uchburchaklarning xususiy holi bo'lgan teng yonli uchburchak va to'g'ri burchakli uchburchak bilan bog'liq. Bu uchburchaklar o'zlariga xos xossalarga ega.

To'g'ri burchakli uchburchak, uning xossalariga bog'liq teoremalar O'rta osiyolik olimlar Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sinoning asarlarida ham uchraydi.

Uchburchakning to'g'ri burchak hosil qiluvchi tomonlari katet deb ataladi. "Katet" grekcha so'z bo'lib, "tushirilgan perpendikulyar" yoki "shoqul" degan ma'noni bildiradi. Gipotenuza ham grekcha so'z bo'lib, "tortmoq", "tortilgan" degan ma'noni beradi.

Pifagor teoremasining Evklid geometriyasidagi o'rni beqiyosdir. Ammo bu teorema Evklid geometriyasidan farqli bo'lgan "noevklid" geometriyalarda o'rinli emas. Bu haqida biz yuqori sinflarda batafsil to'xtalamiz.

Trigonometrik atamalar haqida

O'rta Osiyolik buyuk olimlar al-Xorazmiy, Beruniy, ibn Sino, Abdurahmon al-Xaziniy (XIII asr) sinus uchun "al-jayb" atamasini ishlatishgan.

Sinus haqidagi ma'lumot dastlab IV–V asrlardagi hind astronomlarning asarlarida uchraydi.

Hozirgi sinus belgisini Simpson (1737, 1750), Eyler (1748, 1753), Dalamber (1754), Lagranj (1774) va boshqalar ishlatishgan. Zamonaviy trigonometriya atamalarining qo'llanilishida

Eylerning xizmatlari katta. Bu belgilashlarni u I. Bernullidan olgan.

Tangensni birinchi marotaba Abul Vafo Buzmoniy (940–998) devorga vertikal holda o'rnatilgan tayoqning devordagi soyasi sifatida aniqlagan. Kotangens, sekans va kosekanslarni ham birinchi bo'lib Abul Vafo ta'riflagan. Kotangens chizig'i "to'g'ri soya" ("az-zill al-mustav", tangens chizig'i "teskari soya" (az-zill al-ma'nus) deb atalgan. "Zill" o'zbek tilida "soya" ma'nosini beruvchi arabcha so'z. Abul Vafo tangens va kotangens jadvalini tuzgan. Uning ishlaridan Yevropa olimlari xabarsiz bo'lgan va tangenslarni avval T. Bradvardan (1290–1349), keyin esa Regiomontan (1467) qayta kashf qilishgan. Tarixdan tangensning omadi kelmaganini ko'ramiz, chunki uni Regiomantan kashf etgandan 100 yil keyin ham Kopernik bilmagan.

Vektorlar haqida

Vektor tushunchasi matematikaga, jumladan geometriyaga yaqinda kirgan. XIX asrning o'rtalarida vektor tushunchasi bir vaqtda bir nechta matematikning ishlarida uchraydi. Tekislikda vektorlar bilan ish ko'rishni ilk bor Italiya olimi Bellivitis (1835) boshlab berdi. Bundan tashqari, K. Gauss (1777–1855) 1831 yili "Bikvadratik solishtirishlar nazariyasi" nomli asari hamda Ya. Argon (1768–1822) va K. Vessellarning (1745–1818) kompleks sonlarni geometrik tasvirlashga doir ishlari nashr etildi. Nihoyat, B. Gamilton (1805–1865) va R. Grassman (1854–1901) larning vektorlar ustida amallar bajarishga doir ishlari vujudga keldi. Birinchi bo'lib, Gamilton vektor va skalyar kattaliklarni farq qilishni tushuntirdi. Gamiltonning o'sha ishida "skalyar" va "vektor" atamalari yuzaga keldi. "Vektor" atamasining Gamilton lotincha vehere– "tashimoq", "sudramoq" so'zidan hosil qilgan (1845), ya'ni "tashuvchi", "eltuvchi" demakdir.

Vektor uzunligini $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilashni 1905 yili

R. Pans kiritgan. "Modul" so'zi ancha oldin paydo bo'lgan. Uni 1814 yili lotincha modulus – "o'lchov" so'zidan Argon hosil qilgan. Keyinchalik uni O. Koshi (1789 – 1857) ishlatgan.

Aylana uzunligi va doira yuzi haqida

Aylana uzunligini hisoblash juda qadimdan dolzarb muammolardan biri bo'lgan. Aylana uzunligini unga ichki chizilgan ko'pburchak perimetri bilan almashtirish usuli keng tarqalgan. Shuning uchun ham aylanaga ichki muntazam ko'pburchak chizish masalasi qadimgi olimlarning e'tiborida bo'lgan.

O'rta Osiyolik matematiklar ham doiraga ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklarni yasash, ularning tomonlarini doiraning radiusi orqali ifodalash masalalari bilan shug'ullanganlar, Abu Rayhon Beruniy "Qonuni Mas'udiy" asarining o'ninchi kitobida doiraga ichki chizilgan ko'pburchaklarning tomonini aniqlash bilan shug'ullanadi. Xususan, ichki chizilgan beshburchak, oltiburchak, yettiburchak, ..., o'nburchak tomonlarini aniqlash usulini ko'rsatadi.

Beruniy o'z asarida boshqa muntazam ko'pburchaklar tomonini hisoblashlarni keltirmaydi. Ehtimol, uning davrida hayot ehtiyojlari uchun shuning o'zi yetarli bo'lgandir. Bu hisoblash natijasida u $\pi \approx 3,14$ qiymatga ega bo'ladi.

Qadimgi Bobil va Misr qo'lyozmalari va mixxatlarida π ni uchga teng deb olingan. Bunda aylana uzunligi o'zining diametridan uch barobar katta ekani kelib chiqadi. Bu o'sha davr aniqlik talabi uchun yetarli bo'lgandir. Keyinchalik rimliklar π uchun 3,12 ni ishlatishgan. π soni uchun Arximed bergan qiymat 3,14 bo'lib, bu amaliy masalalarni hal qilishda juda ma'qul.

Matematika adabiyotlarida π soni uchun turli qiymatlar uchraydi. Masalan, xitoy matematiklarida $\pi \approx 3,155$ ... va 22/7. Hindlarning "Sulva Sutra" ("Arqon qoidasi") asarida π uchun 3,008 va 3,1416 ... va $\sqrt{10} \approx 3,162$ ... qiymatlar uchraydi.

Mirzo Ulug'bekning "Astronomiya maktabi" namoyandalaridan biri Jamshid G'iyosiddin al-Koshiy 1424 yili yozgan "Aylana uzunligi haqida kitob" nomli risolasida aylanaga ichki va tashqi chizilgan muntazam ko'pburchak tomonlari sonini cheksiz ikkilantirish yo'li bilan $3 \cdot 2^{28} = 800335168$ tomonli muntazam ko'pburchaklar perimetrini hisoblab, 2π uchun o'nli sanoq sistemasida 6,2831853071795865 qiymatni hosil qilgan. Demak, π=3,1415826535897932, bunda 16 ta o'nli ishora aniqdir.

Ammo al-Koshiyning asari uzoq vaqtgacha Yevropada noma'lum bo'lgan. Yevropaliklardan belgiyalik Van Romen 1597 yili 2^{30} tomonli muntazam ko'pburchakka Arximed usulini tatbiq etib, π uchun 17 ta o'nli ishorasi aniq bo'lgan qiymat topgan. Gollandiyalik Rudolf van Seylon (1540–1610) bu aniqlikni 35 ta o'nli ishoraga olib borgan.

Hozirgi davrda elektron hisoblash mashinalari yordamida π uchun 2000 dan ortiq o'nli ishorasi aniq bo'lgan qiymatlar topilgan. Albatta π sonining aniqligi aylana uzunligi va doira yuziga oid masalalarni aniq yechish imkonini beradi.

Ammo kundalik hisoblashlar va matematik ehtiyoj uchun 3,1416 qiymat yetarlidir.

JAVOBLAR

13. 30 sm^2. **16.** 1) 5 sm, 5 sm va 1 sm, 9 sm. **17.** 1) 10 dm, 14 dm. **18.** 2) 14 sm va 24 sm. **20.** 1) 15 sm. Qiziqarli masala: Shakllarni qirqib yasab ko'ring. **25.** 2) 24 sm^2. **26.** 12 sm va 8 sm. **27.** 72 sm^2. **38.** 1) 40 sm^2. **40.** 1) 12 sm^2; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sm^2. **51.** 5 sm. **54.** 6 sm, 8 sm. **55.** 12 sm, 15 sm. **58.** 3,2 sm, 3,84 sm^2. **62.** 4 sm. **82.** 2 sm<a<10 sm. **83.** Yo'q. **94.** 2:21. **109.** 0,6 va 21. **111.** 2,4 sm. **121.** Yo'q. **125.** 33 sm^2. **127.** 4 sm. **135.** 60° va 120°. **138.** 11,5. **143.** $\frac{a\cdot b}{a+b}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **153.** 24 sm. **164.** 13 sm. **178.** 60°. **187.** $\frac{13}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{33}{65}$. **207.** $2\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{24}}{5}$, $\frac{12\sqrt{6}}{19}$. **217.** 24 sm^2. **220.** 16 sm. **226.** 20 sm. **233.** 17°30'. **238.** $15\sqrt{3}$. **247.** 4,5 sm. **266.** $8\sqrt{2}$ sm. **269.** a) 5 sm; b) 18 sm. **277.** 12 sm. **280.** 108°, 252°. **289.** Rombga. **295.** 4 sm. **307.** 5 sm. **320.** $6\sqrt{2-\sqrt{3}}<\pi<12\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. **332.** 9 ta. **335.** 8 ta. **367.** $\overline{AB}-\overline{BD}$. **373.** 1{0,6; 0,8}. **395.** 11. **404.** 2 m, 4 m, 5m. **414.** AC=4 sm, B_1C_1=14 sm. **419.** 15, 35, 40, 50.

TUSHUNCHALAR KO‘RSATKICHI

MUNDARIJA

NAIM RAHIMOVICH G'AYBULLAYEV
ABDULLAAZIZ ORTIQBOYEV

GEOMETRIYA

Umumta'lim maktablarining 8-sinfi uchun
o'quv qo'llanma

6-nashri

Toshkent «Mehnat» 2004

Tahririyat mudiri **A. Madrahimov**
Muharrir **O'. Husanov**
Rasmlar muharrirlari **H. Qutluqov, M. Kudryashova**
Tex. muharrir **T. Greshnikova**
Musahhiha **S. Badalboyeva**

Diapozitivdan bosishga ruxsat etildi 20.04.2004. Bichimi $84\times108^1/_{32}$. Kegli 11,5 shponsiz. «Times» harfida ofset usulida bosildi. Shartli b.t. 9,24. Shartli kr.-ott. 9,66. Nashr t 9,5. Nusxasi 53000. Buyurtma № 13. Bahosi 816 so'm.

«Mehnat» nashriyoti. 700129 Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30.
Shartnoma № 5-2004.

OAJ «Yangiyul Poligraph Service». Yangiyo'l sh. Samarqand ko'-chasi, 44.