O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT TEMIR YO‘L MUHANDISLARI INSTITUTI

I.G‘. G‘aniyev, X.T. Mansurov,
R.N. G‘anixo‘jayev, O.I. Egamberdiyev,
R.Sh. Isanov

OLIY MATEMATIKA

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent
«TURON-IQBOL»
2013

UO‘K: 517.98
KBK 22.1ya73
O-45

Taqrizchilar:
Raximov Abdugafur Abdumajidovich – fizika-matematika fanlari doktori, professor
Berdiqulov Musirmonqul Abdullayevich – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Oliy matematika: o‘quv qo‘llanma / I.G‘. G‘aniyev, X.T. Mansurov, R.N. G‘anixo‘jayev, O.I. Egamberdiyev, R.Sh. Isanov; O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, Toshkent temir yo‘l muhandislari instituti. - Toshkent: Turon-Iqbol, 2013. -576 b.

UO‘K: 517.98
KBK 22.1ya73

Ushbu o‘quv qo‘llanma texnik oliy o‘quv yurtlari bakalavriat talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, «Oliy matematika» kursining asosiy bo‘limlarini o‘z ichiga olgan. Shu bilan birga Oliy o‘quv yurtlarining barcha texnik yo‘nalishda tahsil olayotgan talabalari foydalanishlari uchun tavsiya etiladi.

O‘quv qo‘llanmani yozishda mualliflar bir necha yillar davomida Toshkent temir yo‘l muhandislari institutida mazkur fanni o‘qitish jarayonida orttirgan tajribalaridan foydalanganlar.

ISBN 978-9943-14-272-5

Kirish

Oliy matematika kursi litsey va kollejlar talabalari uchun algebra va geometriya fanlarining uzviy davomidir. Funksiya va uning differensial hamda integral hisobi, chiziqli algebra, analitik geometriya masalalari amaliy masalalarni hal etishda ko‘p foydalaniladi. Ayniqsa, oliy matematikaning differensial tenglamalar va qatorlar bo‘limi tatbiq doirasi keng. Ularning iqtisod va texnik masalalarni yechishdagi ahamiyati katta.

Ushbu o‘quv qollanma texnik oliy o‘quv yurtlari uchun oliy matematika fanining na‘munaviy dasturi asosida yozilgan bo‘lib, boshqa oquv yurtlarida ham foydalanish mumkin. O‘quv qo‘llanmada nazariy ma’lumotlarni bayon etish bilan bir qatorda misol va masalalarni yechish namunalari ham berilgan.

O‘quv qo‘llanma texnik oliy o‘quv yurtlari talabalariga mo‘ljallangan bo‘lib, oliy matematikaning asosiy bo‘limlarini o‘z ichiga olgan hamda mualliflarning ko‘p yillik ma’ruzalari asosida yozilgan. Respublikamiz oliy o‘quv yurtlarida yangi pedagogik texnologiyalarga o‘tish boshlanganini hisobga olib, qo‘llanmani yozishda ma’ruzalarni talaba mustaqil tushuna oladigan, soddaroq ko‘rinishda berishga harakat qilindi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma texnik oliy o‘quv yurtlari talabalariga mo‘ljallangan bo‘lib, oliy matematika kursining asosiy bo‘limlarini o‘z ichiga olgan va mualliflarning ko‘p yillik tajribalari asosida yozilgan. Qo‘llanmada kamchiliklar va ba‘zi xatolarga yo‘l qo‘yilgan bo‘lishi tabiiy. Qo‘llanmadagi o‘z tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan kishilarga mualliflar oldindan minnatdorchiliklarini bildiradilar hamda ulardan qo‘llanmaning navbatdagi nashrida foydalanadilar.

Mualliflar.

I qism. Analitik geometriya, algebra va matematik analiz

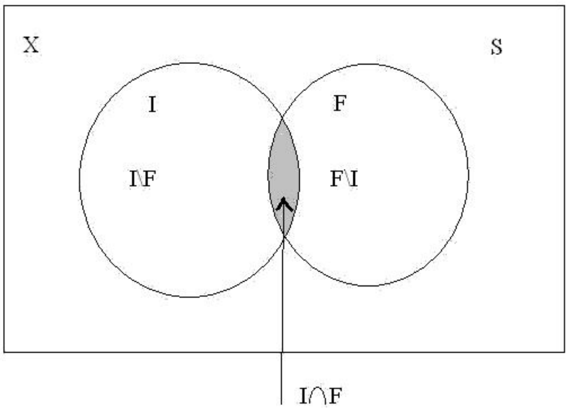
I bob. Dastlabki ma'lumotlar

Turli sohalarda, amalda uchraydigan aksariyat masalalarni yechish uchun ularni matematik belgilar va tushunchalar yordamida matematik masalaga keltirish, ya'ni dastlabki masalaning matematik modelini yaratish, deyarli barcha hollarda masalani oydinlashtirish va chuqurroq tushuntirish imkonini beradi. Natijada asrlar davomida ishlab chiqilgan ishonchli matematik usullar yordamida mazkur masalani yechish yo'llari (algoritmlari) osonlikcha hal qilinishi mumkin. Albatta, buning uchun bo'lajak mutaxassis o'z sohasida matematik belgilashlar, tushunchalar va usullardan erkin foydalana olishi zarur. Asosiy matematik tushunchalar: to'plam, son, koordinata, funksiya, grafik, hosila, integral, matritsa, vektor, tasodifiy miqdor, differensial tenglama va hokazolar amalda uchraydigan turli masalalardan kelib chiqqan.

1-§. To'plamlar va kombinatorika elementlari

Masala. Samarqandga kelgan 160 ta sayohatchidan 75 tasi ingliz tilida, 55 tasi fransus tilida, 20 tasi esa ikkala tilda ham gaplasha oladi. Shu sayohatchilarning nechtasi ingliz tilida ham, fransus tilida ham gaplasha olmaydi?

Ushbu masalani yechish uchun ba'zi belgilashlar kiritaylik: ingliz tilida gaplasha oladigan barcha sayohatchilarni I harfi bilan, ularning sonini esa $|I|$ orqali belgilaylik. Xuddi shunday F va $|F|$ orqali fransus tilida gaplasha oladigan barcha sayohatchilar va ularning sonini belgilaymiz. Ikkala tilda gaplasha oladiganlar va ularning soni mos ravishda $I \cap F$ va $|I \cap F|$ bo'lsin. Inglizchani biladiganlar ichidan fransuzchani ham biladiganlarini chiqarib tashlaylik va qolgan sayohatchilarni $I \setminus F$ ko'rinishda, ularning sonini esa $|I \setminus F|$ kabi ifodalaylik. Demak, $I \setminus F$ − faqat inglizcha gaplasha oladigan sayohatchilar. Xuddi shunday $F\backslash I$ va $|F\backslash I|$ mos ravishda faqat fransuzcha biladigan sayoxatchilar va ular soni bo‘lsin. Nihoyat, S barcha sayoxatchilar, X esa ikkala tilni ham bilmaydigan sayoxatchilar bo‘lsin. Kiritilgan belgilashlarni diagramma deb ataluvchi quyidagi chizmada tasavvur qilish mumkin:



1-chizma.

Chizmada S – to‘g‘ri to‘rtburchak, I – katta doira, F – kichik doira, $I \cup F$ – ikkala doiraning umumiy qismi, $F \setminus I$ – kichik doiraning katta doiraga kirmagan qismi, nihoyat X esa to‘g‘ri to‘rtburchakning ikkala doira tashqarisidagi qismi.

Endi barcha sayohatchilarni 4 ta guruhga ajratamiz: X – ikkala tilni bilmaydiganlar, $I \setminus F$ – faqat inglizcha, $F \setminus I$ – faqat fransuzcha, $I \cap F$ – ikkala tilda gaplasha oladiganlar. Ravshanki, ixtiyoriy sayohatchi bu guruhlardan bitta va faqat bittasiga kiradi.

Demak, iqtisodchilar tili bilan aytganda balans tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$|S| = |X| + |I \setminus F| + |I \cap F| + |F \setminus I.$$

Ravshanki,

$$|I \setminus F| = |I| - |I \cap F| \quad \text{va} \quad |F \setminus I| = |F| - |I \cap F|.$$

U holda

$$|S| = |X| + |I| + |F| - |I \cap F|$$

tenglikni hosil qilamiz. Masala shartlariga ko‘ra $|S| = 160$; $|I| = 75$; $|F| = 55$; $|I \cap F| = 20$. Demak, $|X| = 160 - 75 - 55 + 20 = 50$, ya’ni sayohatchilarning 50 tasi inglizcha ham, fransuzcha ham so‘zlasha olmaydi.

Aslida biz masalani yechishda matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan **to‘plam** tushunchasidan foydalandik. To‘plam boshlang‘ich matematik tushunchalardan bo‘lib biz uni ta’rifsiz qabul qilamiz. To‘plamni biror belgi yoki xossasiga ko‘ra ajratib olingan barcha predmetlar sifatida tasavvur qilish mumkin. Masalan:

1) “Neksiya” avtomashinasining qismlari to‘plami;

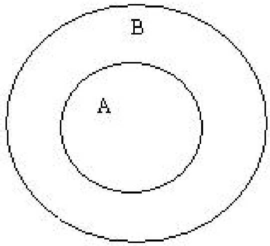
2) insonning ichki a’zolari to‘plami;

3) ikkita tub sonning yig‘indisi ko‘rinishida yozish mumkin bo‘lmagan barcha juft sonlar to‘plami;

4) kimyoviy elementlar to‘plami;

5) $2^{2^{2008}} + 1$ sonning barcha bo‘luvchilari to‘plami.

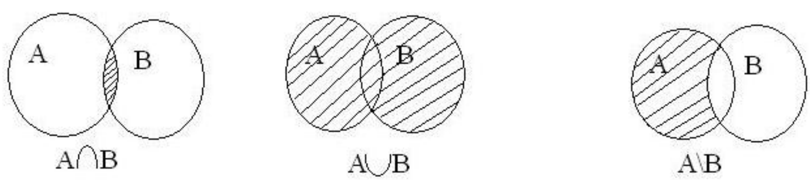
To‘plamlar elementlardan tashkil topgan bo‘lib, to‘plamlar $A, B, \ldots$ harflar orqali, elementlar esa $a, b, c, \ldots$ harflar orqali ifodalanadi. Biror a element A to‘plamga tegishli bo‘lsa, $a \in A$ ko‘rinishda, tegishli bo‘lmasa $a \notin A$ ko‘rinishda yozamiz. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi va $\emptyset$ orqali belgilanadi. Agar A to‘plamning ixtiyoriy elementi B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa, A to‘plam B ning qism to‘plami deyiladi va $A \subset B$ ko‘rinishda yoziladi (2-chizma).



2-chizma.

$A \subset B$ va $B \supset A$ munosabatlarning ikkalasi ham o‘rinli bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi: $A = B$. $A \cap B$ belgi A va B to‘plamlarning kesishmasi deyiladi va u ikkala to‘plamga ham tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan. $A \cup B$ belgi A va B to‘plamlarning birlashmasi (ba’zan yig‘indisi) deyilib, shu to‘plamlardan aqalli bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan iborat.

A va B to‘plamlar ayirmasi deb, A to‘plamning B ga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan iborat to‘plamga aytiladi va u $A \setminus B$ ko‘rinishda yoziladi.



3-chizma.

Misol. A to‘plam 2 ga karrali, B esa 3 ga karrali sonlar to‘plami bo‘lsin, u holda $A \cap B$ – 6 ga karrali sonlar, $A \cup B$ – yoki 2 ga yoki 3 ga karrali barcha sonlar, $A \setminus B$ – 3 ga bo‘linmaydigan juft sonlar, $B \setminus A$ – 3 ga karrali toq sonlar to‘plami. Shunday qilib, $A \cup B = \{x : x \in A$ yoki $x \in B\}, A \cap B = \{x : x \in A$ va $x \in B\}, A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.

A to‘plamning elementlari sonini $|A|$ orqali ifodalaymiz. Masalan, $|\emptyset| = 0$. Elementlarning soniga qarab to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajraladi. Chekli to‘plamlar uchun ushbu tasdiqlar o‘rinli.

1°. $A \cap B = \emptyset$ bo‘lsa, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

2°. $A \subset B$ bolsa, $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

3°. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.

4°. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Ixtiyoriy A to‘plam uchun $\emptyset \subset A$ va $A \subset A$ munosabatlar o‘rinli. Shuni hisobga olgan holda 2^A orqali A to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan to‘plamni belgilaylik. Masalan, $A = \{a, b, c\}$ bo‘lsa, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Ushbu misolda $|A| = 3, |2^A| = 2^3 = 8$ ekanligi ravshan.

Umuman, A chekli to‘plam bo‘lsa,

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu to‘plamni quyidagicha asoslash mumkin. Aytaylik, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ bo‘lsin. Uning biror $X \subset A$ qism to‘plamini olib unga 0 va 1 lardan iborat n ta sonni ushbu usulda mos qo‘yamiz: agar $a_1 \in X$ bo‘lsa, birinchi raqami 1 deb, aks holda 0 deb olamiz, agar $a_2 \in X$ bo‘lsa, ikkinchi raqami 1 deb, aks holda 0 deb olamiz va hokazo. Masalan, ϕ bo‘sh to‘plamga $\{0, 0, \ldots, 0\}$ mos qo‘yiladi, A ga esa $\{1, 1, \ldots, 1\}$ mos qo‘yiladi. Natijada n ta o‘rinning har birida yoki 0 yoki 1 yozilgan ifodalar hosil bo‘ladi. Har bir o‘rinda ikkita imkoniyatdan (0 yoki 1) birini tiklash mumkin. Demak, barcha n ta o‘rinda hamma tiklash imkoniyatlari soni, ya’ni A ning barcha qism to‘plamlari soni $\underbrace{2 \cdots 2}_{n-ta} = 2^n$ ga teng. To‘plamni yozilishida uning elementlarini kelish tartibi muhim emas, ya’ni $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$, yoki $\{x, y\} = \{y, x\}$. Ammo, elementlarning yozilish tartibi muhim bo‘lgan holda to‘plam tartiblangan to‘plam deyiladi va bu holda oddiy qavsdan foydalanib, $A = (a, b, c, \dots)$ ko‘rinishda yoziladi. Xususan, (a, b) tartiblangan juftlik deyiladi.

Ta‘rif. A va B to‘plamlarning **Dekart ko‘paytmasi** deb, barcha (a, b), $a \in A$, $b \in B$ ko‘rinishdagi tartiblangan juftliklar to‘plamiga aytiladi. Masalan, $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ bo‘lsa,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

bo‘lib, $A \times B \neq B \times A$. Agar A va B chekli to‘plamlar bo‘lsa,

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$$

tenglik o‘rinli. Haqiqatdan, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ bo‘lsa,

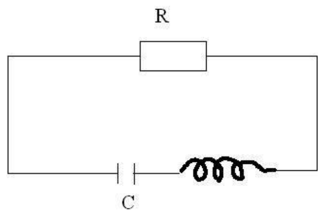
$$A \times B = \begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_2, b_1) & ... & (a_n, b_2) \\ (a_1, b_2) & (a_2, b_2) & ... & (a_n, b_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_1, b_m) & (a_2, b_m) & ... & (a_n, b_m) \end{pmatrix}$$

barcha juftliklar $n \times m$ jadval shaklida yozilib undagi elementlar soni $n \cdot m$ ga teng, ya’ni

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Masala. O‘zgarmas tok manbaiga qarshilik (R), kondensator (C) va induktivlik (L) ni necha xil usulda ulash mumkin.

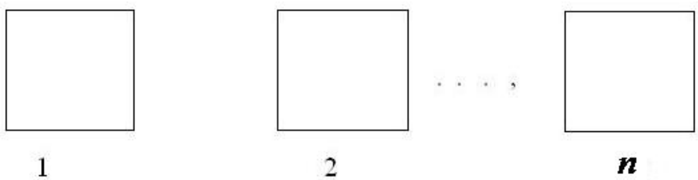
$\lhd$ Manbaning musbat qutbi chapda, manfiysi o‘ngda deb olsak, barcha ulanishlar: RCL, RLC, CRL, CLR, LRC va LCR bo‘lib ularning soni 6 ta. Misol uchun:



4-chizma.

Endi umumiyroq masalani ko‘raylik: $A = \{a_1, ..., a_n\}$ – to‘plam n ta elementdan tashkil topgan bo‘lsin. Shu elementlardan iborat nechta n elementli tartiblangan to‘plamlar mavjud?

Masalani yechish uchun n ta kartochka olib,



5-chizma.

1-kartochkaga $a_1, a_2, ..., a_n$ elementlardan ixtiyoriy bittasini, ya’ni n ta imkoniyatdan birini yozamiz, 2-kartochkaga esa qolgan $n-1$ ta elementdan bittasini, ya’ni $n-1$ ta imkoniyatdan birini va hokazo yozib boraylik. Demak, oxirgi qolgan bitta elementni n-kartochkaga yozamiz. Shunday qilib, 1-qadamda tanlash imkoniyatlarimiz n ta, 2-qadamda $n-1$ ta, 3-qadamda $n-2$ va hokazo. Barcha imkoniyatlar soni esa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ ga teng.

Umuman n ta elementlardan tartiblangan to‘plamlar hosil qilish **o‘rin almashtirish** deyiladi va barcha o‘rin almashtirishlar soni P_n orqali belgilanadi. Demak, $P_n = n!$

Masalan, $P_3 = 6$; $P_5 = 120$; $P_{10} = 3628800$.

Yanada umumiyroq masalani ko‘raylik. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – n elementli to‘plam bo‘lsin va $k \leq n$ ixtiyoriy natural son bo‘lsin. A to‘plamning elementlaridan nechta k elementli tartiblangan to‘plamlarni hosil qilish mumkin? Albatta, endi kartochkalar soni k ta bo‘lib barcha imkoniyatlar soni esa

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

ta bo‘ladi (ko‘paytmada nechta ko‘paytuvchi bor?).

Odatda n ta elementdan k elementli $(1 < k < n)$ tartiblangan to‘plamlarni barcha tuzish usullari n ta elementni k tadan **o‘rinlashtirish** deyiladi va A_n^k orqali belgilanadi.

Shunday qilib, $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$. Ammo bu ifodani qulayroq ko‘rinishda yozish mumkin:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Misol uchun: $A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

Ba’zi masalalarda tartibning ahamiyati yo‘q: ushbu ikkita masalani taqqoslang: 1) 30 ta xodimdan 5 kishilik komissiyani necha xil usulda tanlab olish mumkin? Bu yerda komissiya a’zolarining mavqelari teng; 2) 30 ta xodimdan 5 kishilik komissiyani necha xil usulda tanlash mumkin? Bu yerda komissiya tarkibi: rais, muovin, kotib, mutaxassis va ma’naviyat bo‘yicha tekshiruvchi.

Yana $A = \{a_1, ...a_n\}$ $-$ n ta elementli to‘plam bo‘lsin. Shu elementlardan nechta k elementli $(1 < k < n)$ to‘plamlar hosil qilish mumkin?

Yuqorida n ta elementdan k ta elementli barcha tartiblangan to‘plamlar soni $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ekanligini ko‘rgan edik. Ikkinchi tomondan $a_1, ..., a_n$ lardan ajratib olingan va tayinlangan k ta elementdan $k!$ ta tartiblangan to‘plam tuzish mumkin. Endi ularning barchasining farqiga bormasdan barchasini bitta deb hisoblaymiz. Demak, har $k!$ ta vakildan faqat bittasini tanlab olamiz. Shunday qilib, n ta elementdan barcha k ta elementli to‘plamlar (tartiblanmagan!) sonini topish uchun A_n^k sonni $k!$ songa bo‘lish kifoya $\dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Xulosa qilib, n ta elementdan k tasini tanlash imkoniyatlar soni odatda **n ta elementdan k tadan kombinatsyalar soni** deyilib, u C_n^k orqali belgilanadi. Demak,

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Masalan, $C_7^3 = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Qulaylik uchun $0! = 1$, $P_0 = 1$, $A_n^0 = 1$, $C_n^0 = 1$ deb hisoblanadi va $k > n$ bo‘lganda $A_n^k = 0$, $C_n^k = 0$ deb olamiz.

O‘quvchiga maktabdan ma’lumki $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ va $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Umuman, ixtiyoriy n natural son uchun $(a+b)^n$ ifoda qanday yoyiladi?

Agar $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b)}_{n-ta \quad qavs}$ ifodada qavslarni ochsak, bir nechta bir xil hadlar yig‘indisi hosil bo‘ladi. Ko‘paytmada n ta qavs bo‘lib, ularning k tasidan $(0 \leq k \leq n)$ a harfini olib, qolgan $n-k$ ta qavsdan esa b harfini olib ko‘paytirib chiqsak, $a^k \cdot b^{n-k}$ bir had hosil bo‘ladi. Unga o‘xshash bir hadlar soni nechta? Ravshanki, ularning soni n ta qavsdan k tasini tanlab olishlar soni, ya’ni C_n^k ga teng. Demak, o‘xshash hadlarni ixchamlashdan so‘ng $(a+b)^n$ ning yoyilmasida $a^k \cdot b^{n-k}$ had C_n^k

koeffitsiyent bilan qatnashadi. Shunday qilib,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 \cdot b^n + C_n^1 a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^2 a^2 \cdot b^{n-2} + C_n^3 a^3 \cdot b^{n-3} + ... + C_n^n a^n \cdot b^0$$

formulani hosil qilamiz.

Matematikada yig‘indi (summa) deb ataluvchi ushbu $\sum$ belgidan ko‘p foydalaniladi. Uning ma’nosi: nomerlangan bir nechta son yig‘indisi, masalan, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda k nomer ketma-ket $1, 2, 3, \ldots, n$ gacha o‘zgarib boradi.

U holda yuqoridagi

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 \cdot b^n + C_n^1 a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^2 a^2 \cdot b^{n-2} + C_n^3 a^3 \cdot b^{n-3} + ... + C_n^n a^n \cdot b^0$$

formula ushbu

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot b^{(n-k)}$$

ko‘rinishga keladi (eslatib o‘tamiz $a^0 = b^0 = 1$).

Hosil bo‘lgan formula **Nyuton binomi** (ikki hadi) deyiladi. Aslida bu formula buyuk alloma Umar Hayyomning asarlarida uchraydi.

Xususan Nyuton binomi formulasida $a = b = 1$ deb olsak,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik yuqorida aytilgan n ta elementli to‘plamning barcha qism to‘plamlari soni 2^n ga teng ekanligiga mos keladi.

2-§. Cheksiz to‘plamlar. Sonli to‘plamlar

Matematikaning xususiyatlaridan biri u cheksiz obyektlar bilan shug‘ullanadi. Biz cheksizlikni faqat tasavvur orqali qabul qilishimiz mumkin. Masalan, barcha butun sonlar to‘plami

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

cheksiz to‘plam, chunki eng katta hamda eng kichik butun sonlar mavjud emas.

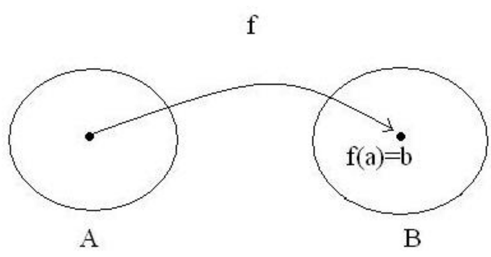
Ikkita chekli to‘plamni bir-biri bilan elementlarining soniga qarab taqqoslash mumkin.

Ya’ni A va B chekli to‘plam uchun, $|A| > |B|$ bo‘lsa, A to‘plamning elementlari soni B to‘plamning elementlari sonidan ko‘proq deb aytish tabiiy. Ravshanki, A va B chekli to‘plamlar uchun $|A| > |B|$, $|A| = |B|$, $|A| < |B|$ munosabatlardan albatta bittasi va faqat bittasi to‘g‘ri bo‘ladi.

Xullas, cheksiz to‘plamlarni ham taqqoslash mumkinmi va ular uchun ham yuqoridagi munosabatlardan albatta bittasi to‘g‘ri bo‘ladimi? Masalan, 3 ga karrali butun sonlar ko‘pmi yoki 5 ga karrali butun sonlar ko‘pmi?

Quyida biz shu savollarga javob topishga harakat qilamiz.

Ta’rif. A va B to‘plamlar berilgan bo‘lib, A ning har bir elementiga biror qoida asosida B ning yagona elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, bu moslik akslantirish deb ataladi va $f : A \to B$ ko‘rinishda yoziladi. Bu holda A to‘plam uning aniqlanish sohasi deyiladi va $a \in A$ elementga mos qo‘yilgan $f(a) = b \in B$ element a ning **tasviri (obrazi)** deyiladi (6-chizma).



6-chizma.

Agar $C \subset A$ bo‘lsa, $f(C) = \{f(a) : a \in C\}$ tenglik bilan aniqlanadi. Masalan, A – tekislikdagi barcha uchburchaklar to‘plami, B esa barcha haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. f akslantirish sifatida har bir uchburchakka uning yuzasini mos qo‘oyaylik. U holda $f : A \to B$. Ravshanki, $f(A) = (0; +\infty) \neq B$ bo‘ladi.

Ta’rif. $f : A \to B$ akslantirish ushbu ikkita shartni, ya’ni

1)$f(A) = B$;

2) $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ bo‘lganda $f(a_1) \neq f(a_2)$ shartni (bu shart bajarilganda akslantirish o‘zaro bir qiymatli deyiladi) qanoatlantirsa, akslantirish biyektiv akslantirish, A va B to‘plamlar esa ekvivalent (teng quvvatli) deb ataladi.

Masalan, sonlar to‘plamida $f(x) = x^2$ akslantirish : $[0, \infty) \to [0, \infty)$ biyektiv akslantirish, ammo $f : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$ biyektiv akslantirish emas, chunki $f(-2) = (-2)^2 = f(2) = 2^2 = 4$ bo‘lib, bu holda o‘zaro bir qiymatlilik sharti buziladi.

Biz asosan elementlari sonlardan iborat bo‘lgan to‘plamlarni o‘rganamiz. Shuning uchun ba’zi belgilashlarni eslatib o‘tamiz.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – natural sonlar to‘plami,

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ – butun sonlar to‘plami,

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ – ratsional (ya’ni oddiy kasrlar) to‘plami,

$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ – haqiqiy sonlar to‘plami,

$\mathbb{C}$ – kompleks sonlar to‘plami.

Ravshanki, $\mathbb{N} \subset Q \subset R \subset C$. Bundan tashqari haqiqiy sonlarning ba’zi qism to‘plamlari uchun ham maxsus belgilashlardan foydalanamiz:

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ – segment (yopiq oraliq);

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$ – interval (ochiq oraliq);

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}; (a, b] = \{x : a < x \leq b\}$;

$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}, (-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$.

Endi ekvivalent to‘plamlarga misollar keltiramiz.

1°. Chekli A va B to‘plamlar ekvivalent bo‘lishi uchun ularning elementlarining soni teng bo'lishi, ya'ni $|A| = |B|$ shart bajarilishi zarur hamda yetarli.

$2°$. $A = [0,1]$ va $B = [a,b]$ to'plamlar ekvivalent (bu yerda $b > a$ bo'lgan ixtiyoriy haqiqiy sonlar). Haqiqatdan

$$f(x) = a + (b-a)x, \quad x \in [0,1]$$

funksiya A to'plamni B ga biyektiv akslantiradi, chunki, $f(0) = a$, $f(1) = b$ va $x_1 \neq x_2$ ekanligidan $f(x_1) \neq f(x_2)$ kelib chiqadi (tekshirib ko'ring).

3^0. $A = 3 \cdot \mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ ya'ni 3 ga karrali butun sonlar, $B = 5 \cdot \mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$ ya'ni 5 ga karrali butun sonlar bo'lsin. U holda A va B to'plamlar ekvivalent. Haqiqatdan,

$$f(x) = \frac{5}{3}x, \ x \in A$$

funksiya A to'plamni B ga biyektiv akslantiradi (tekshirib ko'ring).

4^0. $\mathbb{N}$ va $\mathbb{Z}$ to'plamlar o'zaro ekvivalent. Buni tasdiqlash uchun $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ biyektiv akslantirishni ko'rsata olish zarur. Ma'lumki, juft natural sonni $2 \cdot k$ ko'rinishda, toq natural sonni $2k - 1$ ko'rinishda yozish mumkin. Endi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ akslantirishni $f(2k) = k$ va $f(2k-1) = 1 - k$ tengliklar bilan aniqlasak biyektiv akslantirish hosil bo'ladi. U holda $f(1) = 0$; $f(2) = 1$; $f(3) = -1$; $f(4) = 2$; $f(5) = -2$; ...

Cheksiz to'plamlarning ichida eng soddasi sanoqli deb ataluvchi to'plamlardir.

Ta'rif. Natural sonlar to'plamiga ekvivalent to'plamlar **sanoqli to'plamlar** deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, sanoqli to'plamning elementlarini nomerlab chiqish mumkin. Ixtiyoriy cheksiz to'plamdan sanoqli qism to'plam ajratib olish mumkin. Bu jumlani tasdiqlash uchun A cheksiz to'plamdan ketma-ket $a_1, a_2, a_3, \ldots$ elementlarni olib ulardan A to'plamning $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots\}$ qism to'plamini ajratib olamiz. A cheksiz bo'lgani uchun har qadamda

a_1, a_2, ... elementlar topiladi. Agar A_0 to'plamining har bir $a_n \in A_0$ elementiga uning nomeri bo'lgan $n \in \mathbb{N}$ elementni mos qo'ysak, A_0 va $\mathbb{N}$ to'plamlar orasida biyektiv akslantirish hosil bo'ladi. Demak, $A_0 \subset A$ sanoqli to'plam.

Sanoqli to'plamlarning xossalari:

1°. A va B sanoqli bo'lsa, $A \cup B$ to'plam ham sanoqli. Haqiqatdan, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ bo'lsin. U holda $A \cup B$ to'plamning barcha elementlarini ushbu usulda nomerlab chiqish mumkin
$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots\}$. Demak, $A \cup B$ sanoqli.

2°. A cheksiz to'plam, B esa sanoqli bo'lib, $A \subset B$ o'rinli bo'lsa, A to'plam ham sanoqli. Haqiqatdan, B sanoqli bo'lgani uchun uning elementlarini nomerlab chiqish mumkin. U holda cheksiz bo'lgan $A \subset B$ to'plamning elementlarini ham qaytadan $1, 2, 3, \dots$ sonlar bilan nomerlab chiqish mumkin.

3°. A va B sanoqli bo'lib, $A \cap B$ (yoki $A \backslash B$) to'plam cheksiz bo'lsa, u ham sanoqli bo'ladi, chunki $A \cap B \subset A \cup B$ (yoki $A \backslash B \subset A \cup B$) munosabatlardan 1° va 2° ga ko'ra $A \cap B$ (yoki $A \backslash B$) to'plamning sanoqli ekanligi kelib chiqadi.

4°. Agar $A_1, A_2, A_3, \dots$ to'plamlarning har biri sanoqli bo'lsa, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plam ham sanoqli. $A_1, A_2, A_3, \dots$ to'plamlarning har birining elementlarini nomerlab chiqish mumkin:

$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$,

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$,

$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}$.

Bu yerda a_{ij} element A_i to'plamning j-o'rindagi elementi. Endi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plamning barcha elementlarini qanday nomerlab chiqish mumkin? Buning uchun diagonal usul deb ataluvchi usuldan foydalanamiz: 1-element – a_{11}, 2-element – a_{12}, 3-element – a_{21}, 4-element – a_{13}, 5-element –

a_{22}, va hokazo. Ravshanki bu usulda barcha elementlar ertami-kechmi biror nomerga ega bo'ladi. Demak, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plam sanoqli.

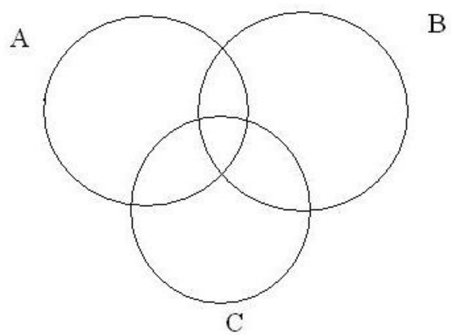
Yuqorida barcha butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning natural sonlar to'plamiga ekvivalentligini ko'rgan edik. Demak, $\mathbb{Z}$ sanoqli to'plam. U holda $n \in N$ uchun

$$A_n = \left\{ \ldots, \frac{-2}{n}, \frac{-1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \right\}$$

to'plam, ya'ni maxraji n bo'lgan barcha oddiy kasrlar to'plami ham sanoqli to'plam. U holda 4° ga asosan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ – barcha ratsional sonlar (= oddiy kasrlar) to'plami ham sanoqli to'plam bo'ladi. Shunday qilib, sonli to'plamlardan $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ larning har biri sanoqli.

Mashq uchun masalalar.

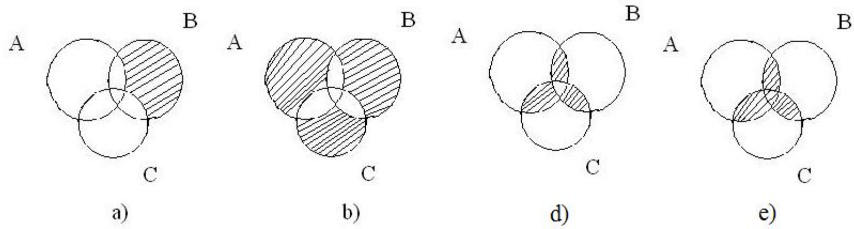
1. Ushbu diagrammadan



7-chizma.

$A \backslash B$; $(A \cup B) \backslash C$; $(A \cap B) \cup C$; $C \backslash (A \cap B)$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \backslash B) \backslash C$; $(A \cap B) \backslash (B \cap C)$ to'plamlarni ko'rsating.

2. Quyidagi diagrammalarda shtrixlab ko'rsatilgan to'plamlarni A, B, C to'plamlar ustidagi amallar sifatida ifodalang



8-chizma.

3. Uch xonali natural sonlar ichida 3 ga ham, 5 ga ham va 7 ga ham bo‘linmaydiganlari nechta?

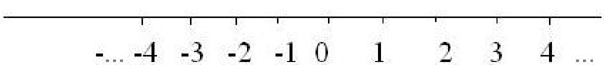
4. Chekli A, B, C to‘plamlar uchun
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap b \cap C|$ tenglikni isbotlang.

5. Haftaning uch kunini necha xil usulda tanlash mumkin?

6. $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglikni isbotlang.

3-§. Haqiqiy sonlar va ular ustida amallar

Gorizontal to‘g‘ri chiziq chizib, unda biror nuqtasini belgilaylik hamda andoza sifatida biror kesma olib, uni belgilangan nuqtadan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab o‘ngga va chapga ketma-ket qo‘yib chiqaylik. Kesma uchlariga mos keluvchi nuqtalarga 9-chizmada ko‘rsatilgandek barcha butun sonlarni yozib chiqamiz



9-chizma.

Demak, butun sonlarga mos keluvchi nuqtalar to‘g‘ri chiziqda belgilanadi. Natural n soni uchun andoza kesmani teng n ta bo‘lakka bo‘lamiz. Bo‘laklardan birini 0 nuqtadan boshlab m marta ($m \in \mathbb{Z}$) ketma-ket qo‘yib, oxirgi nuqtaga $\frac{m}{n}$ sonni mos qo‘yaylik. Natijada barcha ratsional sonlar ham to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar sifatida ifodalanadi.

Ratsional sonlar (= oddiy kasrlar) arifmetikasi o‘quvchilarga yaxshi ma’lum. Shunday bo‘lsada, ratsional sonlarning biz uchun muhim bo‘lgan asosiy xossalarini eslatib o‘tamiz.

1^o. Ikkita ratsional sonning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi (bo‘luvchi noldan farqli bo‘lsa) yana ratsional son bo‘ladi ya’ni: $x, y \in Q \Rightarrow x + y \in Q$, $x - y \in Q$, $x \cdot y \in Q$, $\frac{x}{y} \in Q$ $(y \neq 0)$.

2^o. Ratsional sonlar uchun tartib tushunchasi mavjud.

Ixtiyoriy ikkita $x, y \in Q$ ratsional son uchun $x < y$, $x = y$, $x > y$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli.

Agar $x < z < y$ bo‘lsa, z son x va y sonlar orasida joylashgan deb aytamiz.

3^o. $x, y \in Q$ va $x < y$ bo‘lsin. U holda $z = \frac{x+y}{2}$ son ratsional bo‘lib, x va y orasida joylashgan:

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Demak, ixtiyoriy ikkita ratsional son orasida kamida bitta ratsional son joylashgan. Bundan esa ixtiyoriy ikkita ratsional son orasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar mavjudligini tushunib olish qiyin emas.

O‘nli kasr tushunchasi o‘quvchiga ma’lum. Shuningdek cheksiz davriy o‘nli kasrni oddiy kasr ko‘rinishida ham yozish mumkinligi kitobxonga tanish.

Ta’rif. Ixtiyoriy chekli yoki cheksiz o‘nli kasr **haqiqiy son** deyiladi.

Masalan, $0,5$; $0,4999...$; $1,414213562...$; $3,1459....$ Barcha haqiqiy sonlar to‘plamini $\mathbb{R}$ yoki $(-\infty; \infty)$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Ba'zi o'nli kasrlarni ikki xil usulda yozish mumkin. Masalan,
$0,5 = 0,499....$

Aniqlik uchun bu ikki yozuvdan cheksiz ko'rinishdagisini tanlab olamiz. Demak, ixtiyoriy haqiqiy son yagona usulda cheksiz o'nli kasr sifatida ifodalanadi.

Teorema. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ sanoqli emas, ya'ni barcha haqiqiy sonlarni nomerlab chiqish mumkin emas.

$\triangleleft$ 1) Biz $[0,1]$ segmentning sanoqli emasligini ko'rsata olsak bas. Chunki $[0,1] \subset \mathbb{R}$ bo'lgani uchun $[0,1]$ ning sanoqli emasligidan $\mathbb{R}$ ning ham sanoqli emasligini kelib chiqadi.

2) $x, y \in [0,1]$ sonlar cheksiz o'nli kasr ko'rinishda yozilgan bo'lsin $x = 0, a_1\, a_2\, a_3.....$; $y = 0,\, b_1\, b_2\, b_3...$ Agar biror $n \in \mathbb{N}$ uchun $a_n \neq b_n$ bo'lsa $x \neq y$ deb hisoblaymiz. Masalan, $x = 0,2223222....$ va $y = 0,22222.....$ sonlar teng emas, chunki $a_4 \neq b_4$.

3) Faraz qilaylik, $[0,1]$ segment sanoqli bo'lsin. U holda uning barcha elementlarini nomerlab chiqish mumkin: $[0,1] = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, ...\right\}$.

Endi $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ sonlarning barchasi cheksiz o'nli kasrga yoyilgan bo'lsin. $y = 0, a_1 a_2 a_3.....$ sonni quyidagicha tanlaymiz: a_1 raqam $x^{(1)}$ sonning yoyilmasidagi verguldan keyingi birinchi raqamdan farqli bo'lgan ixtiyoriy raqam bo'lsin. Demak, $y \neq x^{(1)}$. So'ngra a_2 raqam $x^{(2)}$ sonning yoyilmasidagi verguldan keyingi ikkinchi raqamdan farqli bo'lgan ixtiyoriy raqam bo'lsin. U holda $y \neq x^{(2)}$. Umuman, a_n raqamni shunday tanlash mumkinki, $y \neq x^{(n)}$ bo'ladi. Demak, bir tomondan $y = 0, a_1 a_2...$, $y \in [0,1]$, ikkinchi tomondan $y \neq x^{(n)}$ barcha $n \in \mathbb{N}$ bo'lgani uchun $y \notin [0,1]$. Natijada ziddiyat hosil bo'ldi. Ziddiyatning sababi farazimiz, ya'ni $[0,1]$ sanoqli to'plam ekanligi noto'g'riligidan iborat. Natija $R = (-\infty, \infty)$, $[a,b]$ segment $(b > a)$, (a,b) interval $(b > a)$ sanoqli to'plam emas. Yuqorida bir-biridan farqli ikki ratsional son orasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar mavjudligini ko‘rgan edik. Teoremadan esa ikki ratsional sonlar $z_1, z_2 \in Q$ va $z_1 \neq z_2$ orasida cheksiz ko‘p irratsional (ratsional bo‘lmagan) sonlar ham mavjudligi kelib chiqadi, chunki $[z_1, z_2]$ segment sanoqli emas, Q esa sanoqli to‘plam. Ratsional va irratsional sonlar birgalikda 9-chizmadagi to‘g‘ri chiziqni to‘ldirdi. Demak, to‘g‘ri chiziqdagi har nuqta yagona haqiqiy sonni ifodalaydi. 9-chizmadagi to‘g‘ri chiziq sonlar o‘qi deb ataladi. Haqiqiy sonning absolyut qiymati (= moduli) ushbu $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ tenglik orqali aniqlanadi. Kiritilgan tushuncha ushbu xossalarga ega:

1^o. $|x| \geq 0$;

2^o. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

3^o. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Haqiqiy $x, y \in R$ sonlar orasidagi **masofa** deb $|x - y|$ soni aytiladi. Ravshanki,

1^o. $|x - y| \geq 0$;

2^o. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3^o. $|x - y| = |y - x|$;

4^o. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Masalan, 3^o xossa $|x - y| = |-(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x|$ tengliklardan, 4^o xossa esa $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$ tengsizlikdan kelib chiqadi.

1-misol. Sonlar o‘qida $-2,3$ sondan $5,6$ masofada joylashgan sonlarni toping.

$\lhd$[1] Izlanayotgan son x bo‘lsin. U holda $-2,3$ dan x gacha masofa, ya’ni $|-2,3 - x| = 5,6$ bo‘ladi. Demak, $-2,3 - x = \pm 5,6$. Bundan esa $x_1 = 3,3$ va $x_2 = -7,9$, ya’ni 2 ta yechimga ega bo‘lamiz.$\rhd$[2]

2-misol. $\sqrt{2}$ songa eng yaqin butun sonni toping.

[1] $\lhd$ – yechim yoki isbotning boshlanishi
[2] $\rhd$ – yechim yoki isbotning tugashi

$\lhd$ Ravshanki, $1 < \sqrt{2} < 2$. Demak, javob 1 va 2 sonlardan biri bo‘lishi mumkin. Endi $\left|\sqrt{2} - 1\right|$ va $\left|2 - \sqrt{2}\right|$ masofalarni taqqoslaylik:
$\sqrt{2} - 1 < 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 < 3^2 \Leftrightarrow 8 < 9.$

Demak, $\sqrt{2}$ ga eng yaqin butun son 1 ekan.$\rhd$

Haqiqiy sonlar to‘plami tartiblangan. Demak, ixtiyoriy $x, y \in R$ uchun $x < y$, $x = y$, $y < x$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli $\{x : x > 0\}$ shartni qanoatlantiruvchi sonlar musbat, $\{x : x < 0\}$ shartni qiymatlantiruvchi sonlar manfiy sonlar deyiladi. Tartib munosabati ushbu xossalarga ega:

1^o. $x < y \Leftrightarrow y > x$;

2^o. $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$, $z \in \mathbb{R}$;

3^o. $x < y$ va $y < z \ \Rightarrow x < z$;

4^o. agar $z > 0$ bo‘lsa, $x < y \Rightarrow x \cdot z < yz$ hamda $\dfrac{x}{z} < \dfrac{y}{z}$;

5^o. agar $z < 0$ bo‘lsa, $x < y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$ hamda $\dfrac{x}{z} > \dfrac{y}{z}$;

6^o. agar $x > 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy tayinlangan $y \in \mathbb{R}$ uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ topiladiki, $n \cdot x > y$ tengsizlik bajariladi. Bu xossa **Arximed aksiomasi** deyiladi.

Xususan “ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ mavjudki, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli” degan jumla bevosita Arximed aksiomasidan kelib chiqadi. Arximed aksiomasi $\frac{1}{n} < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi $n \in \mathbb{N}$ sonining mavjudligiga kafolat bersa ham, aslida bunday n lar cheksiz ko‘p, chunki biror n tengsizlikni qanoatlantirsa, $n+1$, $n+2, ...$ sonlar ham tengsizlikni qanoatlantiradi. Ravshanki $x \leq y$ munosabat, $x = y$ yoki $x < y$ munosabatlardan birining bajarilishini anglatadi. Endi $X \subset R$ ixtiyoriy qism to‘plam bo‘lsin. Agar X to‘plamda shunday $a \in X$ son mavjud bo‘lsaki, X to‘plamning qolgan ixtiyoriy x elementi uchun $x \leq a$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, a son X to‘plamning eng katta ($=$ maksimal) elementi deyiladi va

$$\max X = \max_{x \in X}(x) = \max\{x : x \in X\} = a$$

ko‘rinishlardan biri shaklida yoziladi. Masalan, $\max\{x : x^2 \leq 5\} = \sqrt{5}$; $\max\limits_{y\in[0,1]} y = 1$; X – ikki xonali natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $\max X = 99$. Ikkinchi tomondan esa, $\max\emptyset$, $\max\mathbb{N}$, $\max\mathbb{R}$, $\max\{x : x \in (0,1)\}$, $\max Q$ ifodalar mavjud emas. Misol uchun $(0,1)$ to‘plamda eng katta element mavjud emas, chunki teskarisini faraz qilib, eng katta elementni q deb belgilasak, $\frac{q+1}{2} > q$ ziddiyat kelib chiqadi. Sonli to‘plamning eng kichik (minimal) elementi ham shunday kiritiladi. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $a \leq x$ shartni qanoatlantiruvchi $a \in X$ son topilsa, a son X to‘plamning eng kichik elementi deyiladi va $\min X$, $\min\limits_{x\in X}(x)$, $\min\{x : x \in X\}$ ko‘rinishlaridan biri orqali ifodalanadi. Yana $X \subset \mathbb{R}$ sonli to‘plam bo‘lsin. Agar barcha $x \in X$ uchun $x \leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $b \in \mathbb{R}$ (diqqat: $b \in X$ bo‘lishi shart emas!) son mavjud bo‘lsa, u X to‘plam uchun **yuqori chegara** deyiladi. Aksincha, barcha $x \in X$ uchun $a \leq x$ shartni qanoatlantiruvchi $a \in \mathbb{R}$ son mavjud bo‘lsa, X to‘plam quyidan chegaralangan, $a \in \mathbb{R}$ son esa X to‘plamning **quyi chegarasi** deyiladi. Ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan to‘plam **chegaralangan** deyiladi. Ravshanki, b son X uchun yuqori chegara bo‘lsa, ixtiyoriy $c > 0$ bo‘lganda, $a + c$ son ham X to‘plam uchun yuqori chegara bo‘ladi.

Teorema. X sonli to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning yuqori chegaralarning ichida eng kichigi mavjud.

X to‘plamning yuqori chegaralari ichida eng kichigi $\sup X$ orqali ifodalanadi. Xuddi shunday quyidan chegaralangan to‘plamning quyi chegaralari ichida eng kattasi mavjud, uni $\inf X$ orqali belgilanadi. Aniqlanishiga ko‘ra $X \subset [\inf X; \sup X]$ bo‘lib, $[\inf X; \sup X]$ segment X to‘plamni o‘z ichiga olgan barcha segmentlar ichida eng kichigi. Ushbu $+\infty$; $-\infty$; ∞ belgilashlardan biz ko‘p foydalanamiz. Aniqlanishiga ko‘ra ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $-\infty < a < +\infty$.

X sonli to‘plam yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, $\sup X = +\infty$, quyidan chegaralanmagan bo‘lsa, $\inf X = -\infty$ deb olamiz. Masalan, $\sup \mathbb{N} = \sup \mathbb{R} = +\infty$; $\inf \mathbb{N} = 1$; $\inf \mathbb{R} = -\infty$; $\sup\{(0,1)\} = 1$; $\inf\{(0,1)\} = 0$.

$[a_1, b_1]$ va $[a_2, b_2]$ segmentlar uchun $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ shart bajarilsa, $[a_2, b_2]$ segment $[a_1, b_1]$ ning ichida joylashgan deymiz. Sanoqli $[a_n, b_n]$, $n \in N$ segmentlar uchun $[a_1, b_1] \supset [a_2 b_2] \supset [a_3, b_3] \supset ....$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, segmentlar **ichma-ich joylashgan** deyiladi.

Teorema (ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi). Ichma-ich joylashgan segmentlar kamida bitta umumiy (barchasiga tegishli) nuqtaga ega.

$\lhd$ $X = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ va $Y = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$ sonli to‘plamlar chegaralangan, chunki ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_1 \le a_n \le b_n \le b_1$ tengsizliklar o‘rinli. Demak, avvalgi teoremaga ko‘ra $\sup X = \alpha$ va $\inf Y = \beta$ mavjud. U holda sup va inf larning ta’rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $n \in N$ uchun $a_n \le \alpha \le \beta \le b_n$, ya’ni $[\alpha, \beta] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ kelib chiqadi.$\rhd$

4-§. Funksiyalar va grafiklar

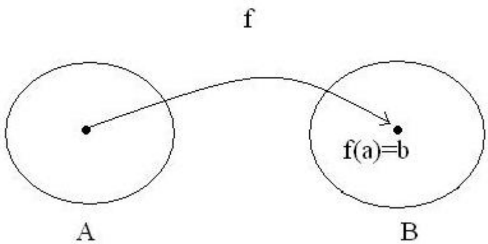
X va Y sonli to‘plamlar bo‘lsin.

Ta’rif. Agar X to‘plamdan olingan ixtiyoriy $x \in X$ uchun biror qoidaga ko‘ra Y to‘plamning yagona $y \in Y$ elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda aniqlangan va qiymatlari Y to‘plamga tegishli **funksiya** berilgan deyiladi va $f : X \to Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Demak, $x \in X$ ga mos qo‘yilayotgan element $y \in Y$ ushbu $y = f(x)$ kabi ifodalanadi. Bu holda y element x ning tasviri (=obrazi), x element esa y ning asli deyilib, $f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yoziladi. Agar $A \subset X$, $B \subset Y$ bo‘lsa,

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists y \in B : f(x) = y\}$$

to‘plamlar mos ravishda A ning tasviri va B ning asli deyiladi. Kiritilgan tushunchani quyidagicha tasavvur qilish mumkin:



Funksiyalar jadval, diagramma, grafik matematik ifoda ko‘rinishida berilishi mumkin. Masalan, korxonaning yil davomida oylar bo‘yicha ishlab chiqargan mahsuloti miqdori ushbu jadval ko‘rinishida berilgan:

oylar	chiqarilgan mahsulot miqdori
yanvar	1700
fevral	1500
mart	1800
aprel	1600
may	1300
iyun	1850
	va hokazo

Nihoyat,

$$y = \sin x;\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x};,\ \ g(x) = x^2 - 2x + 3,$$

$$y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ agar } & x > 0 \\ |5 - 3x|, \text{ agar } & x \leq 0 \end{cases}$$

kabi ifodalar funksiyaning matematik belgilar orqali ifodalanishga misol bo‘ladi.

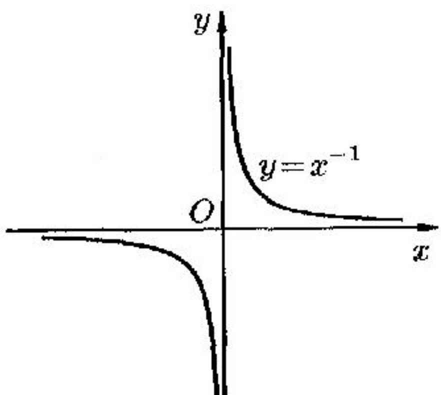
5-§. Funksiyalarning asosiy turlari

1. Chiziqli funksiya

$y = kx+b$ ko‘rinishdagi funksiya **chiziqli funksiya** deyiladi. Ma’lumki, uning grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat. Xususan, $b = 0$ bo‘lsa, funksiyani to‘g‘ri **proporsionallik funksiyasi** deyiladi. Masalan, $S = V \cdot t$ tekis harakatda S – masofa, t – vaqtning to‘g‘ri proporsionallik funksiyasi bo‘ladi. Xususan, $V = 50$ km/s tezlik bilan harakatlanayotgan avtomobil $t = 5$ soatda qancha yo‘l bosishini aniqlash uchun $s = 50$ km/s $\cdot 5$ s $= 250$ km natijani hosil qilamiz.

2. Teskari proporsionallik funksiyasi

$y = \dfrac{k}{x}$ bog‘lanish teskari proporsionallik funksiyasi deyiladi, bu yerda k – teskari proporsionallik koeffitsiyenti. Funksiyaning grafigi



Ravshanki, $y = \dfrac{k}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan.

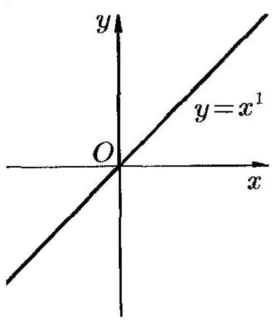
Misol. Ma'lum ishni a ta ishchi b kunda bajaradi. Shu ishni x ta ishchi necha kunida bajaradi? Ravshanki, ishni bajarilish vaqti bilan ishchilar soni orasida teskari proporsional bog'lanish mavjud. Demak, ishni bajarilish vaqti y bo'lsa, $y = \dfrac{k}{x}$ ko'rinishga ega. k ni topish uchun masala shartiga ko'ra $b = \dfrac{k}{a}$, ya'ni $k = a \cdot b$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $y = \dfrac{a \cdot b}{x}$ masalaning yechimi.

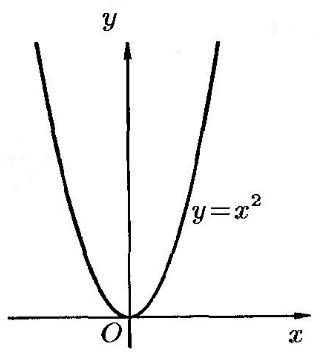
3. Kvadratik funksiya

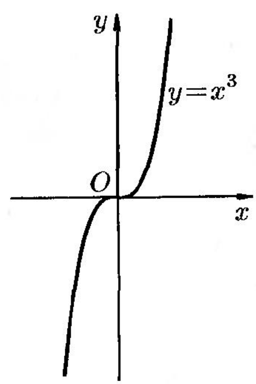
$f(x) = ax^2 + bx + c \,(a \neq 0)$ ko'rinishdagi bog'lanish kvadratik funksiya deyiladi va u o'rta maktabda yetarlicha o'rganiladi. Uning grafigi paraboladan iborat. Kvadratik funksiyaga misol: $S(t) = V_0 \cdot t + \dfrac{at^2}{2}$ – tekis tezlanuvchan harakat qonuni.

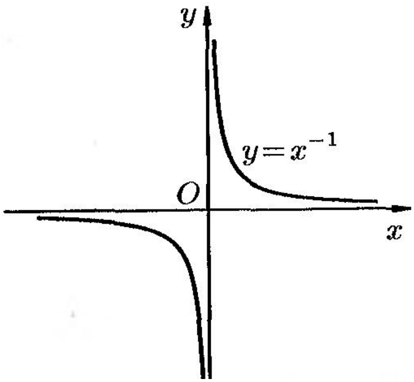
4. Darajali, ko'rsatkichli, logarifmik funksiyalar

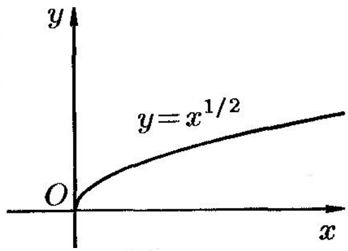
$y = x^a$ bog'lanish darajali, $y = a^x \,(a > 0, a \neq 1)$ ifoda ko'rsatkichli va $y = \log\ x \,(a > 0;\ a \neq 1)$ ifoda logarifmik funksiya deyiladi. Ular ham o'rta maktabda atroflicha o'rganiladi.

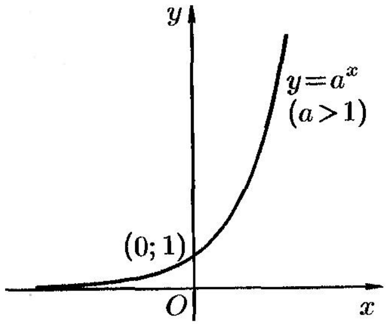


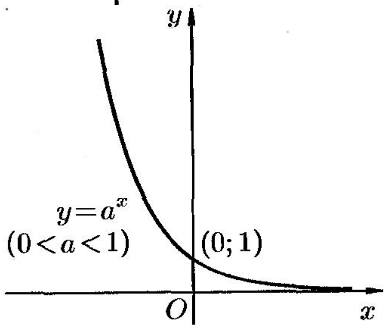


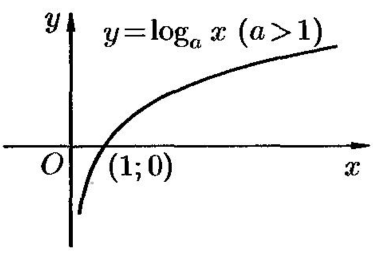


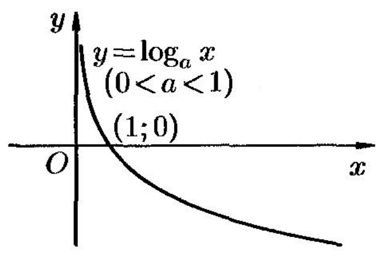






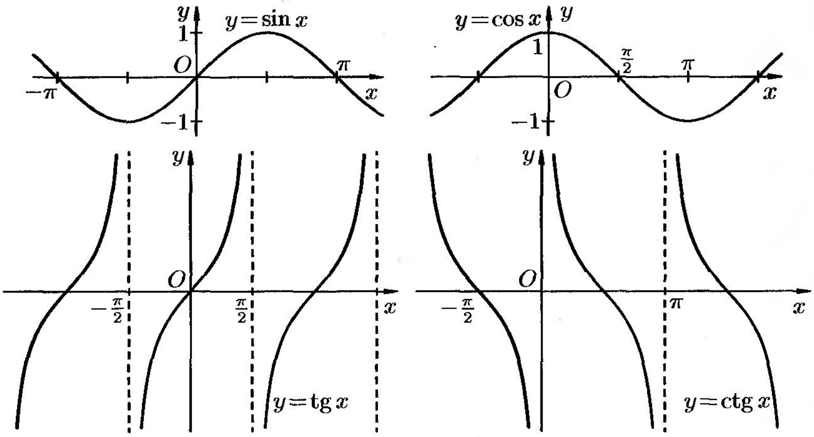






5. Trigonometrik funksiyalar

Ma'lumki burchaklar ikki xil usulda: gradus va radian o'lchovlarida ifodalanadi. Mazkur kursda biz asosan radian o'lchovdan foydalanamiz. Demak, x burchakning qiymati $(-\infty, +\infty)$ oraliqdagi ixtiyoriy sondagi radian bilan ifodalanishi mumkin. Asosiy trigonometrik funksiyalar: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$ bo'lib, ulardan tashqari $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (o'qilishi: sekans) va $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ (o'qilishi: kosekans) funksiyalar ham keng ishlatiladi. Bu funksiyalarning ba'zi grafiklari quyidagicha:

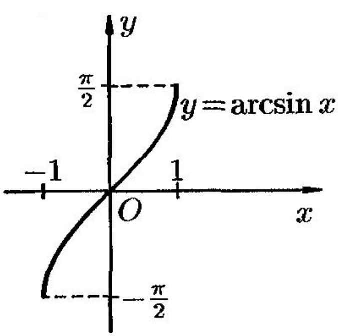


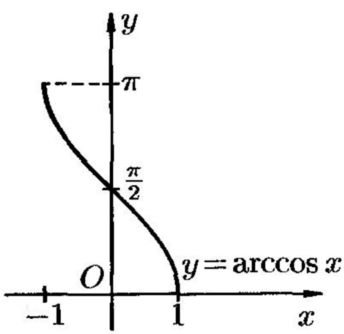
6. Teskari trigonometrik funksiyalar

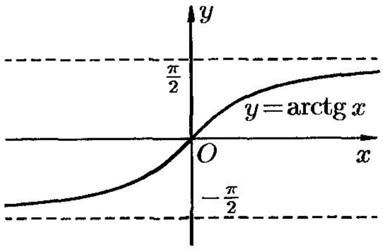
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$;

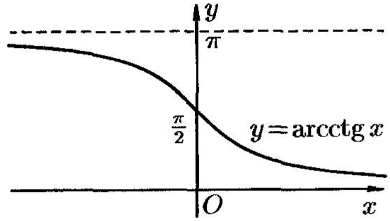
$y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$

funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi. Quyida ularning ba'zi grafiklari tasvirlangan:









7. Giperbolik va teskari giperbolik funksiyalar

Matematikada $e \approx 2,71828......$ soni (aniq ta'rifi keyinroq keltiriladi) muhim ahamiyatga ega. Bu son bilan bog'liq bo'lgan bir qator funksiyalar mavjud. Ulardan ba'zilari giperbolik funksiyalar deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\ \mathrm{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

hamda ular mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens va giperbolik kotangens deb ataladi. Giperbolik funksiyalar uchun ham trigonometrik formulalar kabi bog'lanishlar va ayniyatlar mavjud. Masalan,

a) $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$, $\mathrm{th}(-x) = -\mathrm{thx}$, $\mathrm{cth}(-x) = -\mathrm{cth}x$;

b) $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$, $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$, $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$;

c) $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$, $\mathrm{th}2x = \dfrac{2\mathrm{th}x}{1 + \mathrm{th}^2x}$.

Giperbolik funksiyalarga teskari funksiyalar quyidagicha:

$$\mathrm{arsh}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ \ \mathrm{arch}x = \ln(x \pm \sqrt{x^2}),\ \ x \geq 1,$$

$$\mathrm{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ \ |x| < 1,\ \ \ \mathrm{arcth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ \ |x| > 1.$$

Sonlar ustida bajariladigan barcha arifmetik va algebraik amallar, ya'ni qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish darajaga oshirish, ildiz chiqarish, logarifmlash funksiyalar ustida ham bajarish mumkin. Masalan,

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \left(\sqrt{f}\right)(x) = \sqrt{f(x)}$$

tengliklar ta'rif bo'lib, ular mos ravishda ikki funksiya yig'indisi, ko'paytmasi, funksiyadan ildizni qanday tushunish kerakligini anglatadi. Funksiyalar uchun bu amallardan tashqari **murakkab funksiya** tushunchasi ham mavjud.

Ta'rif. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Agar $f(g(x))$ ifoda ma'noga ega bo'lsa, y f va g funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiya, yoki f va g funksiyalarning **kompozitsiyasi** deyiladi. Masalan, $\ln\sin x$ ifoda $f(x) = \ln x$ va $g(x) = \sin x$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiya. Agar funksiyalar tartibning almashtirsak, ya'ni $f(x) = \sin x$, $g(x) = \ln x$ bo'lsa, $y = \sin\ln x$ murakkab funksiyani hosil qilamiz. Ravshanki, $\ln\sin x \neq \sin\ln x$, ya'ni umuman aytganda $f(g(x)) \neq g(f(x))$. Murakkab funksiyani tuzish mumkin bo'lmaydigan hollar bo'lishi mumkin. Masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ va $g(x) = \sin x - 2$ funksiyalar uchun

$$f(g(x)) = \sqrt{\sin x - 2}$$

murakkab funksiya mavjud emas, chunki $\sin x - 2 < 0$ bo'lib, u $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga kirmaydi. Aksincha, $g(f(x)) = \sin\sqrt{x - 2}$ murakkab funksiya barcha $x \geq 2$ uchun mavjud. Yuqorida keltirilgan funksiyalar ustida arifmetik va algebraik amallar bajarish va ulardan murakkab funksiyalar tuzish natijasida hosil bo'lgan funksiyalar **elementar funksiyalar** deyiladi. Masalan, $\sqrt[3]{\sin^5\sqrt{2^x - 3}}$, $\ln\ln\dfrac{x^2-1}{5x+3}$ va hokazo. Funksiya tushunchasi nihoyatda keng tushuncha bo'lib, elementar funksiyalar uning kichik bir bo'lagini tashkil etadi. Mashqlarda va hisoblashlarda biz elementar funksiyalardan keng foydalansak ham tasdiq va iboralar ba'zi qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar haqida bo'ladi. Elementar bo'lmagan ushbu $f(x) = [x]$ va $g(x) = \{x\}$ funksiyalar biz uchun kerak bo'ladi. $f(x) = [x]$ funksiya x **sonning butun qismi** deb o'qiladi va qiymati $n \leq x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng katta butun songa teng. Masalan, $[2,3] = 2$, $[\pi] = 3$, $\left[\sqrt{23}\right] = 4$,

$[-2,7]=-3$. Aksincha $g(x)=\{x\}$ funksiya x **sonning kasr qismi** deyiladi va u $\{x\}=x-[x]$ tenglik bilan aniqlanadi. Masalan, $\{0,7\}=0,7$; $\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$; $\left\{-\dfrac{3}{7}\right\}=\dfrac{4}{7}$.

Mashq uchun misollar

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ funksiya uchun $f(0)$, $f(1)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f(2x)$, $f(x+1)$, $f(f(x))$, $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ifodalarni toping.

2. $g(x)=a^x$, $(a>0,\ \ a\neq 1)$ funksiya uchun $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$ va $g(1)=a$ shartlar bajarilishini tekshiring.

3. $f(x)=\dfrac{3x-5}{5x+3}$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

4. $\sin x+\cos y=1$ tenglikdan a) y ni x qiymatning funksiyasi koʻrinishida ifodalang, b) x oʻzgaruvchini y qiymatning funksiyasi sifatida ifodalang.

5. $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x$ va $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$ formulalarni keltirib chiqaring.

6. $\mathrm{sh}(x+y)$ va $\mathrm{ch}(x+y)$ ifodalar uchun formula keltirib chiqaring.

7. $y=\arcsin\dfrac{5-3x}{2x-7}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

8. $f(0)=1$; $f(1)=2$; $f(2)=1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $f(x)=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiyani toping.

6-§. Tekislikda toʻgʻri chiziq va uning tenglamalari

1. Ikki nuqta orasidagi masofa

Tekislikda toʻgʻri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan boʻlib, unda ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan (10-chizma).

U holda bu nuqtalar orasidagi masofa AB ushbu

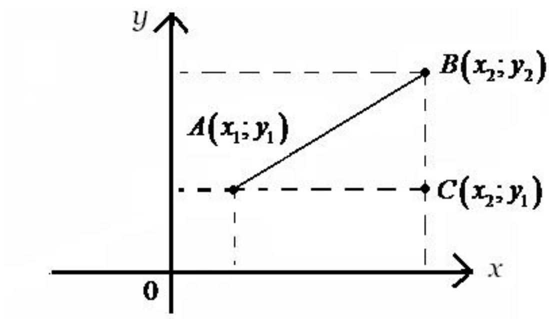
$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

formuladan topiladi.

Haqiqatdan, koordinatalari (x_1, y_2) bo'lgan $C(x_2, y_1)$ nuqtani olib, ABC to'g'ri burchakli uchburchakda BC katet uzunligi $|y_1 - y_2|$ songa (sonlar o'qidagi masofaga ko'ra) va AC katet uzunligi esa $|x_1 - x_2|$ songa teng. U holda Pifagor teoremasiga ko'ra $AB = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$. Agar $|a|^2 = a^2$ ni hisobga olsak,

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

kelib chiqadi.



10-chizma.

Misol. I va III choraklar bissektrisasida joylashgan va $A(3;5)$ va $B(-2;7)$ nuqtalardan teng masofada bo'lgan nuqtani toping.

$\lhd$. Nuqtani topish iborasi shu nuqta koordinatalarini ko'rsatishni anglatadi. Izlanayotgan nuqta C bo'lsin. I va III chorak bissektrisasidagi nuqtalarning abssissa va ordinatasi teng bo'lishi zarur. Demak, $C\,(x, x)$ bo'lib, masala shartiga ko'ra $CA = CB$, ya'ni

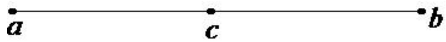
$$\sqrt{(x-3)^2 + (x-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (x-7)^2}.$$

Bundan esa, tenglamani yechib $C\left(-\dfrac{19}{9}, -\dfrac{19}{9}\right)$ javobni hosil qilamiz.

2. Tekislikda kesma

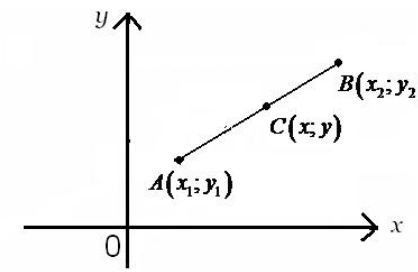
Uchlari $A(x_1;y_1)$ va $B\,(x_2;y_2)$ bo'lgan AB kesmada biror $C(x;y)$ nuqta olaylik. Agar $AC : CB = \lambda$ songa teng bo'lsa, C nuqta AB kesmani λ **nisbatda bo'ladi** deyiladi. Masala A va B nuqtalar hamda λ son berilgan holda C nuqtaning koordinatalarini topishdan iborat.

Masalani avval sonlar o'qidagi $a < c < b$ nuqtalar (11-chizma) uchun ko'raylik.



11-chizma.

Shartga ko'ra $(c-a) : (b-c) = \lambda$, ya'ni $c - a = \lambda b - \lambda c$, bu yerdan $c + \lambda c = a + \lambda b$ yoki $c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$ javobini hosil qilamiz. Endi $A\,(x_1;y_1)$, $B\,(x_2;y_2)$ tekislikda bo'lib, $C\,(x;y)$ nuqta AB kesmani λ nisbatda bo'lsa, (12-chizma) uchburchaklarning o'xshashligiga asosan C nuqtaning biror koordinata o'qidagi proyeksiya AB kesmaning shu o'qdagi proyeksiyasini ham λ nisbatda bo'ladi.



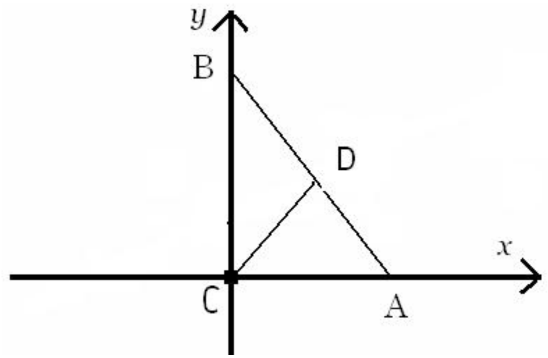
12-chizma.

Demak, C nuqtaning koordinatalari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Xususan $\lambda = 1$, ya'ni $AC : CB = 1$ bo'lsa, $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'ladi.

Misol. $A(5; 0)$; $B(0; 7)$; $C(0; 0)$ nuqtalar tashkil qilgan ABC uchburchakning CD bissektrisasi uzunligini toping.



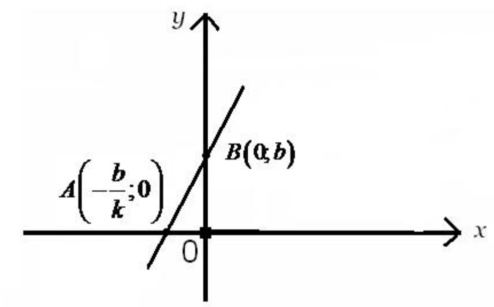
13-chizma.

$\triangleleft$ Ma'lumki, uchburchak bissektrisasi qarshi tomonni yon tomonlar uzunliklariga proporsional nisbatda kesadi. Demak, $D\,(x; y)$ nuqta AB kesmani $\lambda = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{5}{7}$ nisbatda bo'ladi. U holda $x = \dfrac{5 + \frac{5}{7} \cdot 0}{1 + \frac{5}{7}} = \dfrac{35}{12}$; $y = \dfrac{0 + \frac{5}{7} \cdot 7}{1 + \frac{5}{7}} = \dfrac{35}{12}$, ya'ni $C\left(\dfrac{35}{12}; \dfrac{35}{12}\right)$ bo'lib, CD bissektrisa uzunligi $\dfrac{35\sqrt{2}}{12}$. $\triangleright$

3. To‘g‘ri chiziq tenglamalari

1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

Tekislikdagi $M(x;y)$ nuqtalarning koordinatalari o‘zgaruvchi bo‘lib, ular faqat $y = kx + b$ shartni qanoatlantirsin (bu yerda, k va b sonlar tayinlangan bo‘lib, k – **burchak koeffitsiyenti** deb ataladi). Ma’lumki, bu shartni qanoatlantiruvchi barcha $M(x;y)$ nuqtalar to‘plami to‘g‘ri chiziqni tashkil etadi. Masalan, $y = -x$ (bu yerda $k = -1$, $b = 0$) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar II va IV choraklar bissektrisasini hosil qiladi. Aksincha, ordinata o‘qiga parallel bo‘lmagan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdagi barcha nuqtalarning koordinatalari biror k va b sonlar uchun $y = kx + b$ shartni qanoatlantiradi. Bu holda $y = kx + b$ tenglik shu **to‘g‘ri chiziqning tenglamasi** deyiladi. Xususan, to‘g‘ri chiziq abssissa o‘qiga parallel bo‘lsa, undagi barcha nuqtalarning ordinatalari o‘zaro teng, ya’ni o‘zgarmas bo‘ladi. Bu holda $k = 0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = b$ ko‘rinishda bo‘ladi. Agar to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa parallel bo‘lmasa, $k \neq 0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq Ox o‘qini $A\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ nuqtada, Oy o‘qini $B(0, b)$ nuqtada kesib o‘tadi (14 -chizma).



14-chizma.

AB to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi φ va $C(0,0)$ koordinatalar boshi bo‘lsin. U holda ABC to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{CA} = \frac{b}{\frac{b}{k}} = k$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchagi $\varphi = \operatorname{arctg} k$ $(k > 0)$ bo‘lib, $k < 0$ holda $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}(-k)$ tenglikdan topiladi. Agar $k < 0$ bo‘lsa, $\varphi-$ o‘tmas burchak. Ma’lumki, ikki to‘g‘ri chiziq ularni kesib o‘tuvchi uchini to‘g‘ri chiziq bilan teng burchaklar hosil qilsa, dastlabki ikki to‘g‘ri chiziqlar parallel. Bu jumlaning teskarisi ham o‘rinli (parallellik aksiomasi). Demak, $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, ular Ox o‘qi bilan teng burchaklarni tashkil etadi $\varphi_1 = \varphi_2$. U holda $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, ya’ni to‘g‘ri chiziqlarning parallellik sharti $k_1 = k_2$ tenglikdan iborat.

Misol. $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va $A(-3;5)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

$\lhd$ Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = kx + b$ bo‘lsin. U $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgani uchun $k = 3$, ya’ni $y = 3x + b$ ko‘rinishga ega. $A(-3;5)$ nuqta shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun:
$5 = 3 \cdot (-3) + b$. Bu yerdan $b = 14$ bo‘lib, $y = 3x + 14$ bo‘ladi.$\rhd$

Shunday qilib, $M(x_1;y_1)$ nuqta $y = kx+b$ to‘g‘ri chiziqda yotishi uchun M ning koordinatalari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi shart:

$$y_1 = kx_1 + b.$$

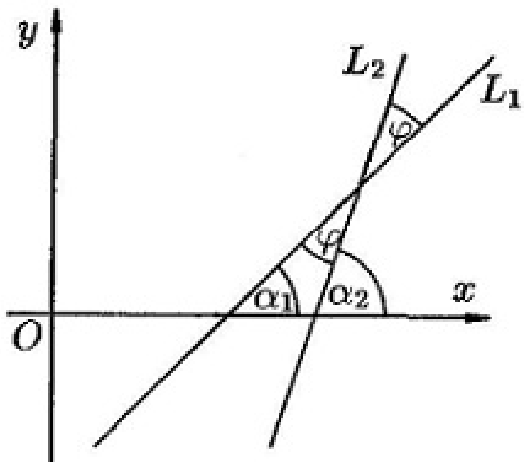
Endi ikkita to‘g‘ri chiziq tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin: $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x+b_2$. Shu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi qanday topiladi? Agar ularning kesishish nuqtasi $M(x_0, y_0)$ bo‘lsa, u ikkala to‘g‘ri chiziqqa ham tegishli bo‘lishi shart. Demak, izlanayotgan x_0, y_0 sonlar ikkala to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi zarur: $\begin{cases} y_0 = k_1x_0 + b_1, \\ y_0 = k_2x_0 + b_2, \end{cases}$ ya’ni ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemadan

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \quad y_0 = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{k_1 - k_2}$$

ekanligini osonlikcha topamiz. Shunday qilib, $k_1 = k_2$ bo'lganda sistemaning yechimi yo'q $(b_1 \neq b_2)$, bu holda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lib, ular kesishmaydi. Agar $k_1 \neq k_2$ bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega $x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$, $y_0 = \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{k_1 - k_2}$, bu holda to'g'ri chiziqlar yagona kesishish nuqtasi $M(x_0, y_0)$ ga ega. Nihoyat $k_1 = k_2$ va $b_1 = b_2$ bo'lsa, sistema, cheksiz ko'p yechimga ega, to'g'ri chiziqlar esa ustma-ust tushadi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, ular kesishishidan hosil bo'lgan o'tkir yoki to'g'ri burchakka aytiladi.

Tenglamalari $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ burchak $tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, ya'ni $\varphi = \text{arctg}\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ formuladan topiladi. Haqiqatdan, bu to'g'ri chiziqlarning Ox o'qi bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda α_1 va α_2 bo'lsin (15-chizma). To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak φ bo'lsin



15-chizma.

Chizmadan ravshanki, to'g'ri chiziqlar va abssissa o'qi tashkil qilgan uchburchakda α_2 tashqi burchak. Ma'lumki, $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, ya'ni $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. U holda $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1}$ va $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$ ekanligini va aniqlanishiga ko'ra φ — o'tkir burchak ekanligini hisobga olsak, $tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$ tenglik kelib chiqadi. Agar $1 + k_1 k_2 = 0$, ya'ni $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ bo'lsa, $\operatorname{tg}\varphi$ mavjud emas. Bu esa $\alpha = \frac{\pi}{2}$ burchakka mos keladi. Demak, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti $k_1 \cdot k_2 = -1$ tenglikdan iborat.

Misol. Uchlari $A(5;0)$; $B(0;7)$; $C(0;0)$ bo'lgan uchburchakning CH balandligi yotgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

$\lhd$ Avval AB to'g'ri chiziq tenglamasini $y = kx + b$ ko'rinishda izlab, $A(5;0)$ va $B(0;7)$ nuqtalar shu to'g'ri chiziqda yotgani uchun $\begin{cases} 0 = 5k + b \\ 7 = 0 \cdot k + b \end{cases}$ tengliklar sistemasidan $k = -\frac{7}{5}$ burchak koeffitsiyentini topamiz. CH balandlik AB to'g'ri chiziqqa perpendikulyar. Perpendikulyarlik sharti $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ dan CH to'g'ri chiziq burchak koeffitsiyenti $k = \frac{5}{7}$ ekanligi, tenglamasi esa $y = \frac{5}{7}x + b$ ko'rinishda bo'lishini topamiz. Nihoyat $C(0;0)$ nuqta CH to'g'ri chiziqda yotishidan $b = 0$ kelib chiqadi. Demak, CH tenglamasi $y = \frac{5}{7}x$ ekan.

Endi $M(x_0; y_0)$ biror tayinlangan nuqta bo'lsin. Ravshanki, ixtiyoriy k uchun:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0),$$

ya'ni $y = kx + y_0 - kx_0$ tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi va u albatta $M(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadi. Yuqoridagi $y - y_0 = k(x - x_0)$ tenglama $M(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi **to'g'ri chiziqlar dastasining** tenglamasi deyiladi.

2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Ravshanki, abssissasi $x = a$ bo'lgan barcha $M(a; y)$ nuqtalar ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqni tashkil etadi, ammo bu to'g'ri chiziq tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishda ifodalanishi mumkin emas. Barcha to'g'ri chiziqlar tenglamalarini o'z ichiga oluvchi tenglama $ax + by + c = 0$ ko'rinishga ega bo'lib, u to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu yerda a, b, , c sonlar tayinlangan sonlardir. Xususan, $a = b = c = 0$ bo'lganda to'g'ri chiziq emas, balki butun tekislik hosil bo'ladi. Agar $a = b = 0$, ammo $c \neq 0$ bo'lsa ham to'g'ri chiziq emas, balki bo'sh to'plam hosil bo'ladi. Bundan keyin biz bu ikki notabiy holatni chiqarib tashlab, $a^2 + b^2 \neq 0$, ya'ni a va b sonlardan kamida biri noldan farqli deb hisoblaymiz. Agar $b = 0$ bo'lsa, $x = -\frac{c}{a}$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'ladi. Nihoyat $b \neq 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq tenglamasini bizga tanish bo'lgan burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirish mumkin: $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$, bu yerda $k = -\dfrac{a}{b}$ – burchak koeffitsiyenti. $A\,(x_0; y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|ax_o + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

formuladan topiladi. Haqiqatdan, $ax+by+c = 0$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{a}{b}\,(b \neq 0)$ bo'lib, $A\,(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar tenglamasi $y-y_0 = k\,(x - x_0)$ musbatda perpendikulyarlik shartga ko'ra $k = \dfrac{b}{a}$, ya'ni $y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$ yoki $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$ kelib chiqadi. Endi $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini x va y noma'lumlarga nisbatan yechib $A\,(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqa tushirilgan, AH perpendikulyarning H asosi koordinatalari topiladi. Nihoyat $d = AH$ masofa ikki $A\,(x_0, y_0)$ va $H\,(x_1 y)$ nuqtalar orasidagi masofa formulasidan topiladi (bu hisobotlarni bajarishni o'quvchiga havola qilamiz). Yana ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini topish masalasiga qaytaylik. E'tirof etilganga ko'ra $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ va $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining $M(x; y)$ koordinatalari – $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasidan topiladi. Bu sistemani yo‘qotish usuli deb ataluvchi usuldan foydalanib yechamiz. Buning uchun avval 1-tenglamani b_2 ga, 2-tenglamani b_1 ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tengliklarni birinchisidan ikkinchisini ayirsak,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x + c_1b_2 - c_2b_1 = 0,$$

bundan esa

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

yechimni hosil qilamiz. Agar berilgan sistemalarning birinchisini a_2 ga, ikkinchisini b_1 ga ko‘paytirib so‘ngra ayirsak,

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

yechimni hosil qilamiz. Endi a, b, c, d ixtiyoriy 4 ta son bo‘lsin. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ko‘rinishdagi va qiymati

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

songa teng bo‘lgan ifoda **ikkinchi tartibli determinant** deyiladi. Bu holda

$$a,\, b$$

sonlar 1-satr,

$$c,\ d$$

sonlar 2-satr,

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

sonlar mos ravishda 1-va 2-ustunlar deyiladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 2\cdot(-5) = 22; \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Kiritilgan determinant tushunchasidan foydalanib, yuqoridagi tenglamalar sistemasining yechimini ushbu

$$x = \frac{-\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Natija. 1) agar

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

va

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar yagona nuqtada kesishadi.

2) agar

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ammo

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

va

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

determinantlardan kamida biri noldan farqli bo‘lsa, berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishmaydi va parallel bo‘ladi.

3) agar uchala determinant ham nolga teng bo‘lsa to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

Determinant tushunchasidan foydalanib

$$A(x_1; y_1)$$

va

$$B(x_2; y_2)$$

nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x - x_2 \\ y - y_1 & y - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini tekshirish qiyin emas.

$$ax + by + c = 0$$

to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasida

$$a \cdot b \cdot c$$

ko‘paytma noldan farqli bo‘lsin. U holda tenglamani $-c$ songa bo‘lib

$$\frac{ax}{-c} - \frac{by}{c} = 1,$$

yoki

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

ko‘rinishga keltirish mumkin, bu yerda

$$m = -\frac{c}{a}; \;\; n = -\frac{c}{b}.$$

Ta’rif.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ko‘rinishdagi tenglama to‘g‘ri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deyiladi. Bu nom to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlarini kesib o‘tganda uzunliklari $|a|$, $|b|$ bo‘lgan kesmalar hosil qilishi bilan bog‘liq.

Nihoyat,

$$y = kx + b$$

tenglamada

$$k = \operatorname{tg} \alpha$$

ekanligini hisobga olsak

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b$$

yoki

$$y = \frac{\sin \alpha \cdot x}{\cos \alpha} + b$$

Bundan esa

$$x \cdot \sin \alpha - y \cos \alpha + b \cos \alpha = 0$$

ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘ladi.

Ta’rif.

$$x \cdot \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0$$

tenglama to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Mashq uchun misollar

1. Uchlari $A(-3; 7)$, $B(4; -8)$ bo‘lgan kesmani teng beshta bo‘lakka bo‘ling (ya’ni bo‘lish nuqtalarning koordinatalarini toping).

2. $A(-2; 5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $y = -3x + 7$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

3. Uchlari $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $C(x_3; y_3)$ nuqtalardan bo‘lgan ABC uchburchakning medianalari kesishish nuqtasini toping (bu nuqta mexanikada uchburchak shaklidagi plastinaning og‘irlik markazi deyiladi).

4. $A(2,-1)$; $B(-3;5)$; $C(0;7)$ uchburchakka ichki va tashqi chizilgan aylanalarning markazlarini toping.

5. $2x+3y=7$, $5x-2y=4$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan $x-y=5$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

6. $A(1;2)$; $B(-2;3)$; $C(0,1)$ uchburchakning burchaklarini toping.

7. $x+y-1=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal ko‘rinishda yozing.

8. $3x-5y-7=0$ to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan uchburchakning yuzasini hisoblang.

7-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Umumiy ko‘rinishi

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

bo‘lgan tenglama x, y o‘zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi tartibli tenglama deyiladi (bu yerda koeffitsiyentlar orasidagi 2 ko‘paytuvchi faqat qulaylik uchun qo‘yilgan). Shu tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $M(x,y)$ nuqtalarning geometrik o‘rni **ikkinchi tartibli egri chiziq** deb ataladi. Bu ta’rifga notabiiy hollar ham kiradi. Masalan, butun tekislik $a=b=c=d=e=f=0$, bo‘sh to‘plam $x^2+1=0$ ($a=1$, $f=1$, $b,c,d,e=0$). Ikkinchi tartibli egri chiziqlar orasida bizga tanish chiziqlar ham bor. Masalan , to‘g‘ri chiziq ($a=b=c=0$), aylana ($a=c; b=0$), parabola ($b=c=0$), giperbola ($a=c=0$). Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni o‘rganishni xususiy hollardan boshlaymiz.

1. Aylana

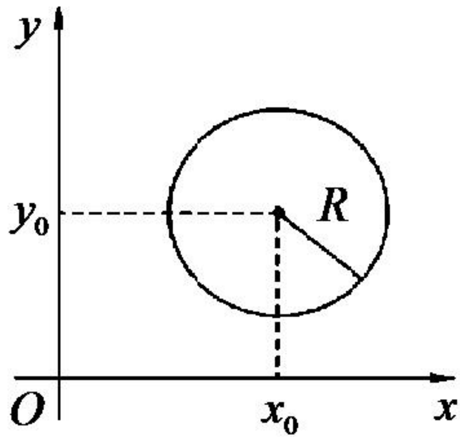
Biror $C(x_0,y_0)$ nuqta va $R>0$ musbat son berilgan bo‘lsin. Shu $C(x_0,y_0)$ nuqtadan R masofada joylashgan barcha nuqtalar to‘plami markazi $C(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lgan R radiusli aylana deyiladi. Demak, $MC = R$, ya'ni

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

yoki

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

aylana tenglamasi kelib chiqadi.



16-chizma.

Misol. $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ aylana markazi va radiusini toping.

$\lhd$ $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ ifodani to'la kvadrat shaklga keltirib,

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5^2$$

tenglamani va demak, $C(3, -4)$, $R = 4$ javobni hosil qilamiz.$\rhd$

Tekislikda aylana va to'gri chiziq uch xil holatda bo'lishi mumkin: a) ular kesishmaydi; b) ikkita nuqtada kesishadi; d) ular faqat 1 ta umumiy nuqtaga ega (bu holda to'g'ri chiziq aylanaga urinma deyiladi). Agar ularning tenglamalari berilgan bo'lsa,

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan ularning kesishish nuqtalarining koordinatalari topiladi. Ma'lumki, bu sistemaning yechimi kvadrat tenglamaga keltiriladi. Hosil bo'lgan kvadrat tenglamaning diskriminanti $\mathcal{D}$ bo'lsin. Demak, $\mathcal{D} > 0$ bo'lsa, to'g'ri ciziq aylanani 2 ta nuqtada kesib o'tadi, $\mathcal{D} = 0$ bo'lganda, to'g'ri chiziq aylanaga urinadi va nihoyat, $\mathcal{D} < 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq va aylana kesishmaydi. Agar $M(x_1, y_1)$ nuqta aylanadagi biror nuqta bo'lsa, shu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasi:

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = R^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. Ellips va uning tenglamasi

Tekislikda F_1 va F_2 tayinlangan nuqtalar bo'lib, o'zgaruvchi M nuqtadan ulargacha bo'lgan masofalar yig'indisi biror o'zgarmas songa teng barcha M nuqtalar to'plami **ellips** deyiladi. Ravshanki, uchburchak tengsizligiga ko'ra

$$MF_1 + MF_2 > F_1F_2$$

munosabat o'rinli. Shuning uchun

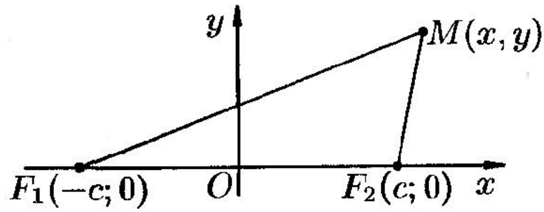
$$MF_1 + MF_2 < F_1F_2$$

shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami bo'sh to'plam bo'ladi. Xuddi shunday,

$$MF_1 + MF_2 = F_1F_2$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha M nuqtalar to'plami F_1F_2 kesmadan iboratligi ham tushunarli.

Endi $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$ shart berilgan deb, ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Qulaylik maqsadida Ox abssissalar o'qini F_1F_2 to'g'ri chiziqqa, Oy ordinatalar o‘qini esa F_1F_2 kesmaga o‘rta perpendikulyar to‘g‘ri chiziqqa joylashtiramiz.



17-chizma.

Endi $F_1(-c;0), F_2(c;0), M(x;y)$ va $MF_1+MF_2=2a$ belgilash kiritib, ushbu

$$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa

$$\sqrt{(x+c)^2=2a+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglikni ikki tomonini kvadratga oshirib,

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

ifodani ixchamlab,

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc$$

yoki

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

munosabatni hosil qilamiz. Uni yana kvadratga oshirib,

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

tenglikni va undan esa

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

tenglamani hosil qilamiz. $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$ shartga ko'ra $a > c$. U holda oxirgi tenglamani $a^4 - a^2c^2$ ga bo'lsak,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Nihoyat $a^2 - c^2 = b^2$ belgilash kiritsak, ellips tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

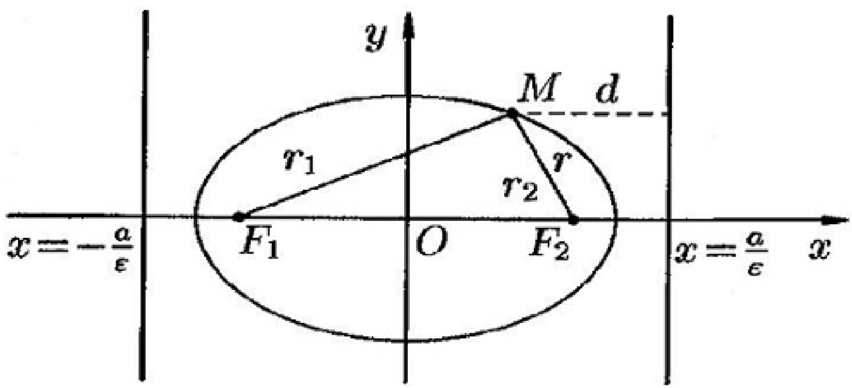
ko'rinishga keladi. Xususan, $a = b$ bo'lganda,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ya' ni $x^2 + y^2 = a^2$ bo'lib, markazi koordinatalar boshi $O(0;0)$ nuqtada, radiusi $|a|$ ga teng aylana tenglamasi hosil bo'ladi. Endi ellips tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ni qanoatlantiruvchi barcha $M(x;y)$ nuqtalar to'plamini koordinatalar sistemasida chizaylik. Agar $x = \pm a$ bo'lsa, ravshanki $y = 0$, va aksincha, $y = \pm b$ bo'lsa, $x = 0$ hosil bo'ladi. Demak, $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;b)$ va $(0;-b)$ nuqtalar ellipsda joylashgan.



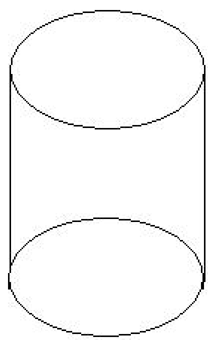
18-chizma.

Shartga ko‘ra $c < a$ va $b < a$, hamda $a^2 = b^2 + c^2$ (belgilashga asosan). Shunday qilib, ellipsdagi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtadan $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi tayinlangan $2a$ songa teng:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning **fokuslari,** F_1F_2 kesma uzunligi **fokus masofasi,** ellipsning abssissa (ordinata) o‘qida yotuvchi nuqtasi bilan koordinata boshini tutashtiruvchi kesma ellipsning **katta (kichik) yarim o‘qlari** deyiladi. Fokus masofaning katta o‘qqa nisbati, ya’ni $\frac{F_1F_2}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ ellipsning **ekssentrisiteti** deyilib, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ orqali belgilanadi. Albatta $c < a$ bo‘lgani uchun $\varepsilon < 1$ tengsizlik o‘rinli. Ekssentrisitetning $0 \leq \varepsilon < 1$ qiymati 0 ga yaqin bo‘lsa ellips chizig‘i aylanaga yaqin, xususan $\varepsilon = 0$ bo‘lsa, $c = 0$, ya’ni $F_1 = F_2$ bo‘lib, aylana hosil bo‘ladi. Aksincha, ε son 1 ga qanchalik yaqin bo‘lsa, ellips abssissa o‘qi bo‘ylab cho‘zilgan, ordinata o‘qi bo‘yicha esa qisilgan bo‘ladi.

Endi fazoda ikkita tekislik olaylik. Ular orasidagi burchak φ bo‘lsin. Shu tekisliklardan birida radiusi a bo‘lgan doiraning ikkinchi tekislikka proyeksiyasini ko‘raylik (19-chizma).



19-chizma.

(Chizmada tekisliklar ko‘rsatilmagan). U holda doiraning proyeksiyasi yarim o‘qlari a va $b = a\cos\varphi$ bo‘lgan ellips bilan chegaralangan shakl (bu shakl ham ellips deyiladi) hosil bo‘ladi. Ma’lumki, biror shaklning yuzasi S' ga teng bo‘lsa, uning proyeksiyasining yuzasi $S'\cos\varphi$ ga teng. Demak, ellipsning yuzasi $S = \pi a^2 \cos\varphi$ ga teng. Bu yerda πa^2 – doira yuzasi, φ esa – tekisliklar orasidagi burchak. Agar $b = a\cos\varphi$, ya’ni $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ ni hisobga olsak, ellips yuzasi uchun

$$S = \pi a^2 \cos\varphi = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab$$

formula kelib chiqadi.

Ellips tabiatda va texnikada ko‘p uchraydigan chiziqlardan biri. Masalan, barcha sayyoralarning orbitalari fokuslaridan birida Quyosh joylashgan ellipsdan iborat. Xususan, Yer orbitasi yarim o‘qlari $a = 150000000$ km, $b = 149980000$ km bo‘lgan ellips bo‘lib, u aylanaga ancha yaqin.

Ellipsning optik xususiyatlaridan biri: fokuslarning biridan chiqqan nur ellips chizig‘idan qaytib (sinib), albatta ikkinchi fokusidan o‘tadi. Ellips va to‘g‘ri chiziq yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq ellipsga urinma deyiladi. Agar $M(x_0; y_0)$ ellipsga tegishli nuqta bo‘lsa bu nuqtadan ellipsga faqat bitta urinma to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va bu to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

ko‘rinishga ega. Haqiqatdan, x va y ga nisbatan

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yagona $(x_0; y_0)$ yechimga ega.

3. Giperbola va uning tenglamasi

Yana tekislikda F_1 va F_2 nuqtalar va tayinlangan musbat $2a$ son olib,

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha M nuqtalar to'plamini ko'raylik. Bu nuqtalar to'plami chiziqni tashkil qilib, bu chiziq **giperbola** deb ataladi. Giperbola tenglamasini keltirib chiqarish uchun $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ nuqtalarni abssissalar o'qida koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashtiraylik. U holda giperbolaga tegishli $M(x;y)$ nuqta koordinatalari uchun

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan esa

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,$$

ya'ni

$$(x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

tenglikni, va uni soddalashtirib,

$$4xc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

munosabatni hosil qilamiz. Demak,

$$\left(xc-a^2\right)=a^2\left(x^2-2xc+c^2+y^2\right)$$

yoki

$$x^2c^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

tenglama kelib chiqadi. U holda

$$x^2(c^2-a^2)-y^2a^2=a^2(c^2-a^2)$$

tenglikni $a^2(c^2-a^2)$ ga bo'lib,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

tenglamani hosil qilamiz. Nihoyat $b^2=c^2-a^2$ belgilashdan so'ng

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ko‘rinishdagi giperbola tenglamasini hosil qilamiz. Ravshanki, $c > b$ va $c > a$.

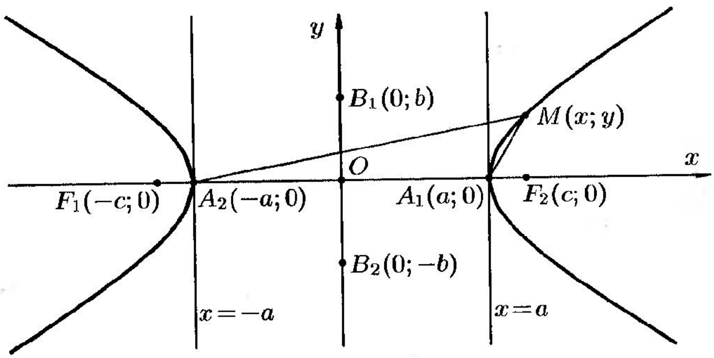
Endi giperbola tenglamasini qanoatlantiruvchi barcha $M(x,y)$ nuqtalar to‘plamini koordinatalar sistemasida chizamiz. Ravshanki, $x = \pm a$ bo‘lganda, $y = 0$, ya’ni $(-a,0)$ va $(a,0)$ nuqtalar giperbolada yotadi. So‘ngra $|x| < a$ bo‘lganda $\frac{x^2}{a^2} < 1$ bo‘lib, giperbola tenglamasidan

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < 0$$

tengsizlikni, ya’ni koordinatalari tenglamani qanoatlantiruvchi $M(x,y)$ nuqta mavjud emasligini hosil qilamiz. Aksincha, $|x| > a$ bo‘lsa, $\frac{x^2}{a^2} > 1$ va

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 > 0$$

bo‘lib, $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ ikkita yechimni, $M\left(x, \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$ nuqtalar giperbolada yotishini hosil qilamiz. Bu yerda $|x| > a$ istalgancha katta bo‘lishi mumkin. Demak, giperbola chegaralanmagan va ikkita kesishmaydigan chiziqlardan iborat (20-chizma).



20-chizma.

F_1, F_2 nuqtalar giperbolaning **fokuslari**, F_1F_2 kesmaning uzunligi **fokus masofa** deyiladi. Giperbolaning abssissa oʻqlari bilan kesishgan $M_1(-a,0)$ va $M_2(a,0)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma giperbolaning **haqiqiy oʻqi** deyiladi. Giperbola chizigʻi ordinata oʻqi bilan kesishmaydi. $N_1(0,-b)$ va $N_2(0,b)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma giperbolaning **mavhum oʻqi** deyiladi. Ellipsdagi kabi $\varepsilon = \frac{F_1F_2}{2a} = \frac{c}{a}$ kattalik giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi. Giperbolada $c > a$ boʻlgani uchun $\varepsilon > 1$. Ma'lumki, kvadrat tenglama diskriminantiga qarab, 0 ta yoki 1 ta yoki 2 ta yechimga ega boʻlishi mumkin. Demak,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$$

tenglamalar sistemasida ham ikkinchi tenglama chiziqli boʻlgani uchun $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$, oʻrniga qoʻyishdan soʻng kvadrat tenglamaga kelib, faqat 0 yoki 1 ta yoki 2 ta yechimga ega boʻlishi mumkin. Ikkinchi tenglama toʻgʻri chiziq tenglamasi ekanligini hisobga olsak, har qanday toʻgʻri chiziq giperbola bilan yoki kesishmaydi, yoki yagona umumiy nuqtaga ega boʻladi, yoki ikkita nuqtada kesishishi mumkin degan xulosaga kelamiz. Giperbola bilan kesishmaydigan toʻgʻri chiziqlardan ikkitasi alohida ahamiyatga ega. Bu toʻgʻri chiziqlar $y = \pm\frac{b}{a}x$ boʻlib, ular haqiqatdan ham giperbola bilan kesishmaydi, chunki toʻgʻri chiziqlar tenglamasini $\frac{y}{b} = \pm\frac{x}{a}$ koʻrinishda yozsak, bu tenglik

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglikka zid. Endi giperboladagi $M\left(x, b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)$ nuqtadan $y = \frac{b}{a}x$ toʻgʻri chiziqqacha boʻlgan masofani hisoblasak:

$$d = \frac{\left|\frac{b}{a}x - b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right|}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$

kelib chiqadi (to‘g‘ri chiziq mavzusiga qarang). Aniqlik uchun $x > 0$ deb olsak,

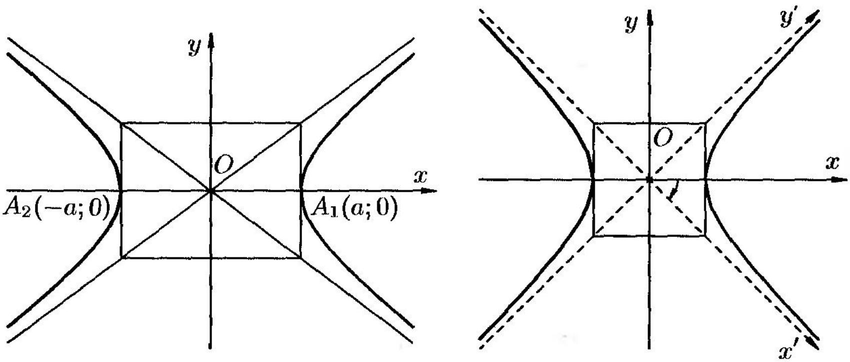
$$d = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})}.$$

Ravshanki, x kattalashib borgan sari,

$$\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})}$$

kasrning mahraji ham kattalashib, kasr 0 ga yaqinlashib boradi. Xullas, giperbola va to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan uzoqlashgan sari bir-biriga yaqinlashib boradi (21-chizma).



21-chizma.

Bunday xossaga ega bo‘lgan $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning **asimptotalari** deyiladi. Giperbola faqat shu ko‘rsatilgan ikkita asimptotaga ega.

To‘g‘ri chiziq giperbola bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq giperbolaga **urinma** deyiladi. Giperbolaning $M(x_0, y_0)$ nuqtasidan giperbolaga faqat bitta urinma o‘tkazish mumkin. Bu urinmaning tenglamasi

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

ko‘rinishga ega. Ya’ni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi faqat bitta (x_0, y_0) yechimga ega (tekshirib ko‘ring).

4. Parabola va uning tenglamasi

Biror l to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan F nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plamidan iborat chiziq **parabola** deyiladi. Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun l to‘g‘ri chiziq va F nuqtani koordinatalar tekisligida quyidagicha joylashtiraylik: biror $p > 0$ son olib, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta va tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo‘lgan l to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. Agar $M(x, y)$ paraboladagi nuqta bo‘lsa, undan $x = -\frac{p}{2}$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

va $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ bo‘lib, shartimizga ko‘ra

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

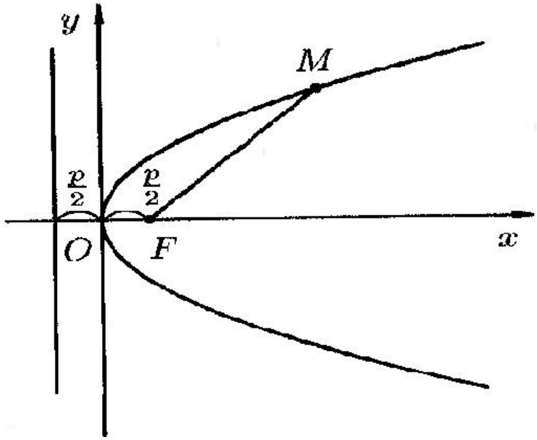
Tenglikni ikkala tomonini kvadratga oshirib

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

ya’ni

$$y^2 = 2px$$

bo‘lgan tenglamani hosil qilamiz. Parabola 22 -chizmada tasvirlangan.



22-chizma.

p son parabolaning parametri $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta parabola **fokusi**, $x = -\frac{p}{2}$ to‘g‘ri chiziq parabolaning **direktrisasi** (yo‘naltiruvchi to‘g‘ri chizig‘i) deyiladi.

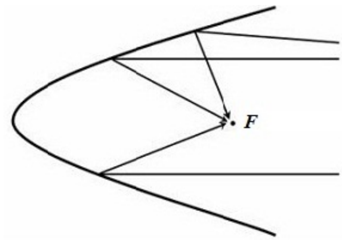
Agar parabola direktrisasini abssissa o‘qiga parallel va u $y = -\frac{p}{2}$ ko‘rinishda, fokusini esa ordinata o‘qidagi $F(0, \frac{p}{2})$ nuqta ko‘rinishda tanlasak, parabolaning tenglamasi o‘quvchiga ma’lum bo‘lgan

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \text{ yoki } 2py = x^2$$

ko‘rinishga keladi.

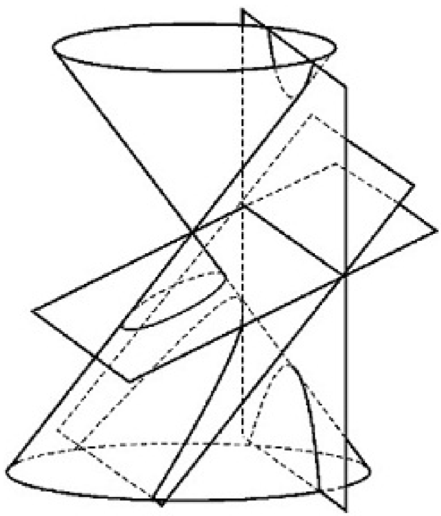
Ravshanki, ellips va giperbola ikkitadan simmetriya o‘qiga ega, parabola esa faqat bitta $y = 0$ simmetriya o‘qiga ega.

Parabolaning simmetriya o‘qiga parallel yo‘nalgan yorug‘lik nurlari yoki elektromagnit to‘lqinlar parabola chizig‘idan qaytib albatta parabola fokusidan o‘tadi (23-chizma).



23-chizma.

Aksincha, parabola fokusida joylashgan yorug‘lik manbaidan chiquvchi nurlar har tomonga tarqalmay, balki parabola o‘qiga parallel yo‘nalgan bo‘ladi. Parabolaning bu xossasi radiolokatsiyada, parabolik antennalarda, projektorlarda hal qiluvchi ahamiyatga ega.



24-chizma.

Ba’zan ellips (xususan aylana), giperbola va parabolalarni konik kesimlar deb ataladi. Chunki ikki tomonga cheksiz davom etgan to‘g‘ri doiraviy konusni biror tekislik bilan kesimida zikr etilgan chiziqlardan biri hosil bo‘ladi (24-chizma).

Agar tekislik konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lsa, kesimda aylana, tekislik yuqori yoki quyi konuslardan faqat birini kesib, konus yasovchisiga parallel bo‘lmasa, kesimda ellips, tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel bo‘lsa, kesimda parabola va nihoyat, tekislik ikkala konusni ham kesib o‘tsa, kesimda giperbola hosil bo‘ladi.

8-§. Tekislikda koordinatalar sistemasini almashtirish

Yuqorida konik kesimlar tenglamalarini keltirib chiqarishda biz fokuslarni va direktrisani maxsus tanlab oldik. Hosil bo‘lgan tenglamalar **kanonik** tenglamalar deyiladi. Ixtiyoriy 2-tartibli chiziq albatta konik kesim bo‘ladimi?
2-tartibli chiziq tenglamasini biror usulda kanonik ko‘rinishga keltirish mumkinmi?
Masalan, $9x^2 + 4y^2 - 54x + 16y + 61 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar $M(x; y)$ to‘plami qanday chiziq bo‘ladi? Buning uchun to‘la kvadrat hosil qilishga harakat qilamiz:

$$9x^2 - 54x + 81 - 81 + 4y^2 + 16y + 16 - 16 + 61 = 0,$$

ya’ni

$$9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) - 81 - 16 + 61 = 0.$$

Oxirgi tenglamani ushbu:

$$9(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 36$$

ko‘rinishda, yoki 36 ga bo‘lib:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

shaklda yozish mumkin. Agar $x-3=X, y+2=Y$ belgilashlar kiritsak ellips tenglamasi:

$$\frac{X^2}{2^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$$

hosil bo‘ladi.

1. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirish

Tekislikda ikkita xO_1y va XO_2Y koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, ixtiyoriy M nuqtaning 1-sistemadagi koordinatalari $M(x;y)$ va 2-sistemadagi koordinatalari $M(X,Y)$ bo‘lsin. Agar barcha $M(x;y)$ nuqtalar uchun

$$x = X+\alpha$$
$$y = Y+\beta$$

shart bajarilsa va α, β tayinlangan o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, XO_2Y koordinatalar sistemasi xO_1y koordinatalar sistemasini **parallel ko‘chirish** natijasida hosil qilingan deyiladi.

Demak, 1-sistemadagi koordinatalar boshi, 2-sistemada $-\alpha, -\beta$ koordinatalarga ega bo‘ladi.

Misol. $2x-3y=5$ to‘g‘ri chiziq koordinatalar sistemasini $(2;-5$ nuqtaga ko‘chirilsa, yangi sistemada shu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

$\triangleleft$ Eski va yangi koordinatalar orasidagi bog‘lanish:

$$x = X+2$$
$$y = Y-5$$

Demak, $2x-3y=5$ tenglama, yangi koordinatalarda

$$2(X+2)-3(Y-5)=5,$$

ya’ni

$$2X-3Y=14$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Umuman, tenglamasi $f(x,y) = 0$ bo‘lgan chiziq, yangi koordinatalar sistemasida

$$f(X+\alpha, Y+\beta) = 0$$

ko‘rinishdagi tenglama bilan aniqlanadi.

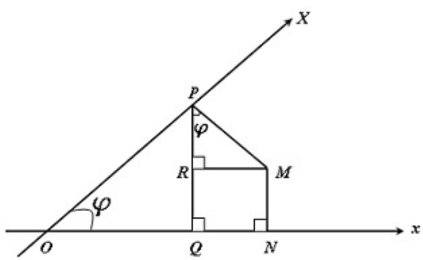
Ravshanki, parallel ko‘chirishda to‘g‘ri chiziq, aylana, ellips, parabola, giperbolalar yana shunday chiziqqa o‘tadi. Koordinatalar sistemasini parallel ko‘chirishda algebraik tenglamalarning darajasi o‘zgarmaydi, demak, ikkinchi tartibli chiziqlar yana ikkinchi tartibli tenglamalar bilan aniqlanadi.

2. Koordinatalar sistemasini burish

xOy koordinatalar sistemasini O nuqta atrofida φ burchakka burish natijasida hosil bo‘lgan yangi koordinatalar sistemasi XOY bo‘lsin. U holda yangi va avvalgi sistemada ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari orasidagi bog‘lanish ushbu formula:

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$
$$y = Y\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

bilan aniqlanadi. Haqiqatdan, ushbu chizmani ko‘raylik



25-chizma.

Chizmada ordinata o‘qlari ko‘rsatilmagan. Shunday qilib, $ON = x$; $MN = y$; $OP = X$; $PM = -Y$ (ishoraga ahamiyat bering). U holda $OQ = OP \cdot \cos\varphi = X \cdot \cos\varphi$ va $QN = RM = PM \cdot \sin\varphi = -Y \cdot \sin\varphi$. Demak,

$$x = ON = OQ + QN = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$

kelib chiqadi.

Agar,

$$MN = RQ = PQ - RP \text{ va } PQ = OP \cdot \sin\varphi = X\sin\varphi,$$

$$RP = PM \cdot \cos\varphi = -Y \cdot \cos\varphi$$

tengliklarni hisobga olsak,

$$y = MN = PQ - RP = X\sin\varphi - (-Y \cdot \cos\varphi) = X\sin\varphi + Y \cdot \cos\varphi$$

kelib chiqadi.

Misol. Bizga maktabdan tanish bo‘lgan $y = \dfrac{1}{x}$ giperbolaning $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaga qanday aloqasi bor?

$\lhd$ $y = \dfrac{1}{x}$, ya’ni $xy = 1$ tenglamada

$$x = X\cos 45^0 - Y\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

$$y = X\sin 45^0 + Y\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

almashtirish bajaraylik. Ya’ni koordinatalar sistemasini $\varphi = 45^0$ burchakka buramiz. U holda

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)(X + Y) = 1,$$

ya’ni

$$X^2 - Y^2 = 2,$$

yoki $\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$, $a = b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$ tenglamani, demak, kanonik ko'rinishdagi giperbola tenglamasini hosil qilamiz. Bu giperbolaning fokuslari yangi sistemada $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ bo'lib, avvalgi koordinatalar sistemasida esa $x = -2\cos 45^0 - 0 \cdot \sin 45^0 = -\sqrt{2}$, $y = -2\sin 45^0 - 0 \cdot \cos 45^0 = -\sqrt{2}$ tengliklardan $F_1\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ va xuddi shunday $F_2\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$

$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

almashtirishda 2-tartibli tenglama faqatgina koeffitsiyentlarigina o'zgargan 2-tartibli tenglamaga o'tadi $\rhd$.

3. Ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik ko'rinishga keltirish

Agar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ex + f = 0$$

tenglamada $b = 0$, $ac \neq 0$ bo'lsa, tenglama to'la kvadrat hosil qilish usuli bilan

$$a(x-\alpha)^2 + c(y-\beta)^2 = k$$

ko'rinishga, koordinatalar sistemasini parallel ko'chirishdan so'ng esa

$$aX^2 + cY^2 = k$$

holga keladi. Nihoyat, tenglikni $k \neq 0$ holda k ga bo'lib,

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 1$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Bu holda $p > 0$, $q > 0$ bo'lganda ellips, $p \cdot q < 0$ bo'lganda giperbola va $p < 0$, $q < 0$ bo'lsa, bo'sh to'plam hosil bo'ladi. Agar a va c koeffitsiyentlardan biri nolga teng bo'lsa, parabola tenglamasi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $b = 0$ bo'lsa, ikkinchi tartibli tenglamani konik kesimlardan birining kanonik ko'rinishiga faqat parallel ko'chirish yordamida keltirish mumkin. Albatta, bu yerda biz uchun muhim bo'lmagan xususiy hollarni:

a) butun tekislik ($a = b = c = d = e = f = 0$ holi);

b) bo'sh to'plam (masalan, $x^2 = -1$);

d) ikkita parallel to'g'ri chiziq (masalan, $y^2 = 1$);

e) ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq (masalan, $x \cdot y = 0$);

f) to'g'ri chiziq (masalan, $x^2 = 0$)

chiqarib tashladik.

Agar tenglamada $b \neq 0$ bo'lsa, koordinatalar sistemasini

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{a - c}{2b}$$

burchakka burish natijasida hosil bo'lgan 2-tartibli tenglamada $X \cdot Y$ had oldidagi koeffitsiyent nolga aylanadi.

Haqiqatdan,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

tenglamada

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi$$

$$y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi$$

almashtirish bajaraylik.

$a(X \cos \varphi - Y \sin \varphi)^2 + 2b(X \cos \varphi - Y \sin \varphi)(X \sin \varphi + Y \cos \varphi) +$
$+ c(X \sin \varphi + Y \cos \varphi)^2 + \ldots = 0$. Qavslarni ochib, faqat $X \cdot Y$ qatnashgan hadlar oldidagi koeffitsiyentlarni topamiz:

$$(-2a \sin \varphi \cos \varphi + 2b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2c \sin \varphi \cos \varphi) \cdot X \cdot Y.$$

Demak, yangi tenglamada $X \cdot Y$ qatnashmasligi uchun oldidagi koeffitsiyenti 0 bo‘lishi kerak. Demak,

$$-a \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi + c \sin 2\varphi = 0.$$

Bundan esa

$$(a - c) \sin 2\varphi = 2b \cos 2\varphi,$$

$\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{a-c}{2b}$ kelib chiqadi. Demak, koordinatalar sistemasi

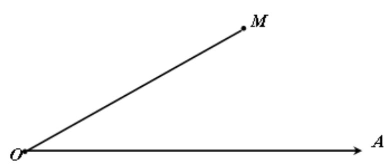
$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{a-c}{2b}$$

burchakka burilganda hosil bo‘lgan tenglamada $X \cdot Y$ had qatnashmaydi. Shunday qilib, parallel ko‘chirish va burish yordamida 2-tartibli tenglamani konik kesimlardan birining kanonik tenglamasiga keltirish mumkin ekan.

9-§. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi

Ba’zi fizik kattaliklar faqat masofa va burchak tushunchalariga bog‘liq bo‘lib, shu tushunchalar orqali tabiiy ifodalanadi. Masalan, nuqtaviy zaryad hosil qilgan potensiali, moddiy nuqtaning gravitatsion maydoni. Bunday kattaliklarni Dekart koordinatalar sistemasida emas, balki qutb koordinatalar sistemasi deb ataluvchi sistemada o‘rganish tabiiy bo‘ladi.

Tekislikda biror nur va nuqta berilgan bo‘lsin (26-chizma).



26-chizma.

M nuqtani nurning boshi bilan tutashtiramiz va hosil bo‘lgan OM kesma uzunligini r va burchak MOA ni esa φ bilan belgilaymiz. Agar r va φ kattaliklarning qiymatlari berilgan bo‘lsa, M nuqtaning tekislikdagi o‘rni bir qiymatli aniqlanadimi?

Albatta, r kesma uzunligi bo‘lgani uchun $r > 0$ bo‘lishi zarur. Bir qiymatlilikni ta’minlash uchun $0 \leq \varphi < 2\pi$ tengsizliklarni bajarilishini talab qilishimiz ham tabiiy. Bu shartlar bajarilganda (φ, r) juftlik M nuqtaning **qutb koordinatalari** deyiladi va $M(\varphi, r)$ ko‘rinishda yoziladi. OA nur **qutb o‘qi**, r son M nuqta **radiusi**, φ burchak M nuqta **argumenti** deyiladi.

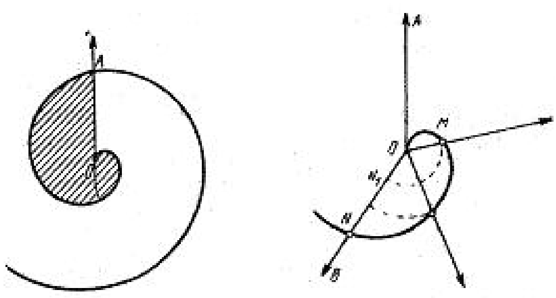
Izoh. $r = 0$ bo‘lganda, argument aniqlanmagan, ya’ni $(0, \varphi)$ nuqta O nuqtani aniqlaydi.

Misollar:

1) $r = 5$ tenglama qutb koordinatalarida markazi 0 nuqtada radiusi 5 ga teng aylanani aniqlaydi;

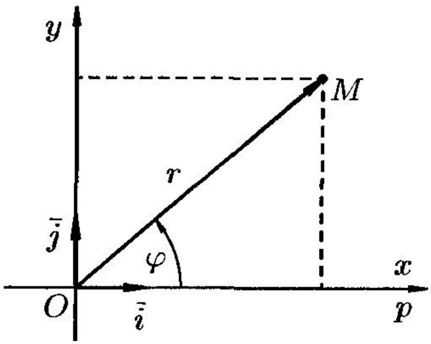
2) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ tenglama esa 0 nuqtadan o‘tuvchi va qutb o‘qi bilan 45^o li burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

3) $r = \varphi$ tenglama bilan aniqlangan chiziq Arximed spirali deb ataladi (27-chizma).



27-chizma.

Ba’zan, qutb koordinatalar sistemasi bilan Dekart koordinatalar sistemasi orasidagi bog‘lanishni topish zarur bo‘ladi. Buning uchun qutb koordinatalar sistemasini Dekart koordinatalar sistemasiga quyidagicha joylashtiraylik: ikkala koordinatalar boshini bitta 0 nuqtaga, qutb o‘qini esa abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust joylashtiraylik. U holda quyidagi chizmadan



$\frac{x}{r} = \cos\varphi$, $\frac{y}{r} = \sin\varphi$ kelib chiqadi. Demak,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

formula yordamida qutb koordinatalardan Dekart koordinatalariga o‘tish mumkin. Ravshanki,

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2,$$

demak, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ikkinchi tomondan

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$$

ya’ni $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Ammo bu holda nuqta qaysi chorakda joylashishiga qarab tuzatish kiritish lozim:

1) I choraklda $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

2) II va III choraklarda $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

3) IV chorakda $\varphi = 2\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Demak,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

formula bilan I-chorakda Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalarga o‘tish mumkin.

Misol. $x^2 - y^2 = 1$ giperbola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozing.

$$\lhd x^2 - y^2 = (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2 = r^2\cos 2\varphi = 1$$

bu yerdan

$$r^2 = \frac{1}{\cos 2\varphi} \quad \text{yoki} \quad r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

kelib chiqadi $\rhd$.

Masalalar

1) $A(-2;3)$ va $B(5;1)$ bo‘lsa AB kesmani teng uch bo‘lakka bo‘luvchi nuqtalarni toping;

2) $M(-2;3)$ nuqtadan $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping;

3) $x^2 - 5x + y^2 + 7y - 19,5 = 0$ aylana tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring;

4) $2x + y = 0$ va $y = 3x - 4$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping;

5) uchlari $A(-2;3)$, $B(5;1)$ va $C(1;-1)$ bo‘lgan uchburchakning

a) perimetrini;

b) yuzasini;

d) B uchdagi burchagini;

e) AD – mediana uzunligini;

f) CE – balandlik tenglamasini;

g) BK – bissektrisa uzunligini toping;

6) $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipsning: a) fokuslarini; b) ekssentrisitetini; d) yuzasini toping;

7) $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 7y - 20 = 0$ tenglama Dekart koordinatalar sistemasida qanday chiziqni ifodalaydi? Kanonik ko‘rinishini toping;

8) qutb koordinatalar sistemasida $r = 1 - \cos\varphi$ chiziqni ko‘rsating va uning Dekart koordinatalarda tenglamasini yozing.

10-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Qulay kiritilgan belgilash va tushunchalar matematik hisoblashlarni soddalashtirishga, formulalarni esa ixcham ko‘rinishda yozishga yordam beradi. Shunday tushunchalardan biri determinant tushunchasidir. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ko‘rinishda yozilgan 4 ta son **2-tartibli determinant** deyiladi va uning qiymati

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

tenglikdan topiladi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22; \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Ikkinchi tartibli determinantda a, b sonlar **1-satr**, c, d sonlar, **2-satr**, a, c sonlar **1-ustun,** b, d sonlar **2-ustun,** a, d sonlar **bosh diagonal** deyiladi.

Ravshanki, biror satr yoki ustun nollardan iborat bo‘lsa, determinantning qiymati ham nolga teng. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

Demak, $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_2 & y - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishda yozish mumkin, chunki

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_2 & y - y_2 \end{vmatrix}$$

ifoda x va y larga nisbatan **chiziqli** va $x = x_1$, $y = y_1$ yoki $x = x_2$, $y = y_2$ holda determinantning qiymati nolga teng, ya’ni $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Uchlari $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ bo‘lgan uchburchakning yuzasini

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}$$

tenglikdan topish mumkin. Bu tenglikda $\pm$ ishora $S \geqslant 0$ shartdan topiladi. Masalan, $A(2, 3)$, $B(1, -2)$, $C(5, 2)$ bo‘lsa,

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(1 + 15) = 8.$$

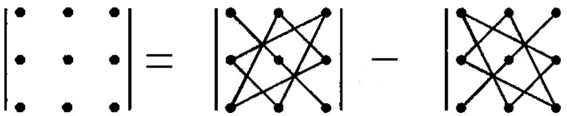
Quyidagi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ko‘rinishda yozilgan 9 ta son 3-tartibli determinant deyiladi. Demak, 3-tartibli determinant uchta satr va uchta ustundan iborat. Uning son qiymati

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

tenglikdan topiladi. Bu tenglikni eslab qolish uchun ushbu:



qoidadan foydalanish tavsiya etiladi. Qoida yoyilmadagi oltita qo‘shiluvchining har biri uchtadan ko‘paytuvchilarga ega ekanligini bu ko‘paytuvchilar qanday tartibda va qanday ishora bilan olinishi kerakligini ko‘rsatadi.

Ravshanki, 3-tartibli determinantda biror satr yoki ustun nollardan iborat bo‘lsa, determinantning qiymati ham nolga teng. Shuning uchun $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin (tekshirib ko‘ring). Xuddi shunday uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchak yuzasi

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

tenglikdan topish mumkin.

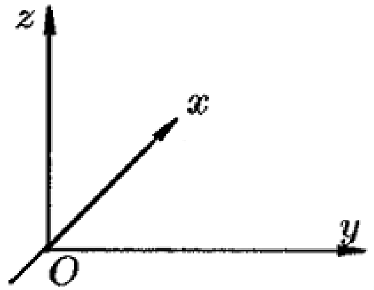
11-§. Fazoda Dekart koordinatalari sistemasi

Fizik jarayonlar aslida fazoda sodir bo‘lib, ularning matematik modellari fazoviy geometriyaning tushunchalari orqali ifodalanadi. Biz yashayotgan fazo uch o‘lchamli bo‘lib, unda o‘rganilayotgan masalaning mohiyatiga qarab, turli koordinatalar sistemasini kiritish mumkin. Evklid geometriyasini algebraik usullar bilan o‘rganishga moslashgan sistemalardan biri to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidir.

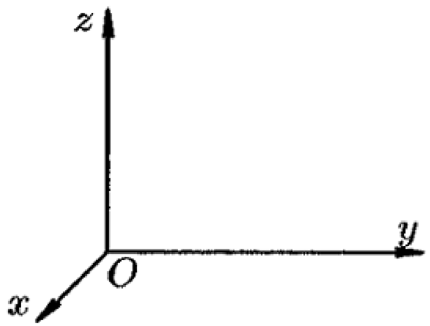
Fazoda uchta o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar biror O umumiy nuqtaga ega bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqlarda yo‘nalishlar aniqlangan va sonlar o‘qidagi kabi ulardagi nuqtalar haqiqiy sonlar bilan belgilangan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar koordinata o‘qlari: Ox – abssissalar, Oy – ordinatalar, Oz – applikatalar o‘qlari deyiladi. Endi fazoda ixtiyoriy M nuqta olib, undan Ox, Oy va Oz o‘qlarga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazaylik. Perpendikulyarning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini ifodalovchi haqiqiy sonlar mos ravishda x_0, y_0 va z_0 bo‘lsin. Bu sonlar M nuqtaning **fazoviy koordinatalari** deyiladi va $M(x_0, y_0, z_0)$ kabi ifodalanadi. Biz uchun eng muhimi: fazodagi har bir nuqtaga yagona tartiblangan uchta son mos qo‘yiladi va aksincha, har qanday tartiblangan uchta son fazodagi yagona nuqtani aniqlaydi.

Keyinchalik gap koordinatalar sistemasini almashtirish haqida ketganda biz ikki xil yo‘nalgan sistemalarni, ya’ni chap va o‘ng koordinatalar sistemasini farq qilishga majbur bo‘lamiz. 28-chizmada ko‘rsatilgan sistema **o‘ng** koordinatalar sistemasi, agar unda koordinata o‘qlaridan biri teskari yo‘nalishda bo‘lsa, **chap** koordinatalar sistemasi hosil bo‘ladi (29-chizma).

Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin. Koordinata o‘qlaridan ikkitasi orqali o‘tuvchi xOy, xOz, va yOz tekisliklar koordinata tekisliklari deyiladi. Koordinata tekisliklari fazoni 8 ta qismga ajratadi. Bu qismlar **oqtantlar** deyilib, ular o‘zlariga tegishli nuqtalarning koordinatalari ishoralari bilan aniqlanadi.



28-chizma.



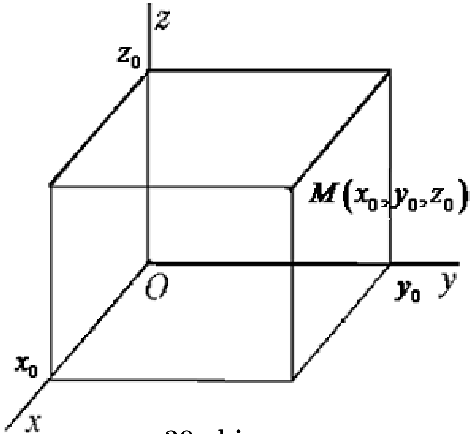
29-chizma.

1. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

$M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtagacha bo‘lgan masofa

$$OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

tenglikdan topiladi, chunki 30-chizmaga ko‘ra,



30-chizma.

OM kesma, qirralari $|x_0|$, $|y_0|$ va $|z_0|$ ga teng to‘g‘ri burchakli parallelepipedning diagonalidan iborat.

Xuddi shunday $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa AB kesma, ya’ni qirralari $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ va $|z_2 - z_1|$ bo‘lgan to‘gri burchakli parallelepipedning diagonali bo‘lib, uning uzunligi bizga ma’lum bo‘lgan

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formuladan topiladi.

Misol. $M(3; -4; 12)$ nuqtadan koordinatalar boshi, koordinata o‘qlari va koordinata tekisliklarigacha bo‘lgan masofalarni toping.

$\lhd$ 1) koordinatalar boshi $O(0, 0, 0)$ nuqtagacha masofa

$$OM = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

2) $M(3; -4; 12)$ nuqtadan Ox o‘qiga o‘tkazilgan perpendikulyar Ox o‘qni, yuqorida aytilgandek, $N(3; 0; 0)$ nuqtada kesadi. Demak, $M(3; -4; 12)$ nuqtadan Ox o‘qqacha masofa

$$MN = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-0)^2 + (12-0)^2} = 4\sqrt{10}.$$

Xuddi shuday Oy o'qqacha masofa

$$\sqrt{(3-0)^2+(-4+4)^2+(12-0)^2}=3\sqrt{17}$$

va Oz o'qqacha masofa

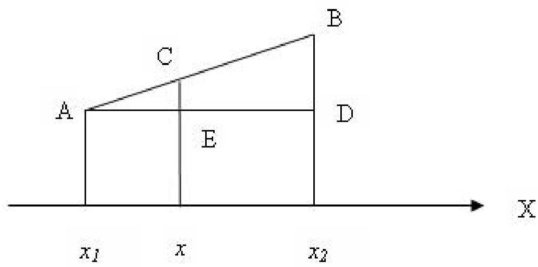
$$\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5.$$

3) $M(3;-4;12)$ nuqtadan xOy tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar tekislikni $P(3,-4,0)$ nuqtada kesadi. Demak, $M(3;-4;12)$ nuqtadan xOy tekislikkacha bo'lgan masofa $MP=12$.

Xuddi shunday xOz tekislikkacha masofa 4 ga va yOz tekislikkacha masofa 3 ga teng.$\triangleright$

Uchlari $A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2;z_2)$ bo'lgan kesma va AB to'g'ri chiziqda yotuvchi $C(x;y;z)$ nuqta berilgan bo'lsin.

Agar $\frac{AC}{CB}=\lambda$ bo'lsa, C nuqta AB kesmani λ **nisbatda bo'ladi** deyiladi. Tekislikdagi kabi yana uchburchaklarning o'xshashligidan (31-chizma).



31-chizma.

$$\frac{x_2-x_1}{x-x_1}=\frac{AB}{AC}=\frac{AC+CB}{AC}=1+\frac{1}{\lambda}$$

tenglikni, undan esa x koordinatani

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

topamiz. Demak, AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y, z)$ nuqta koordinatalari:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

tengliklardan topiladi. Xususan, $\lambda = 1$ bo'lganda kesma o'rtasining koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. Tekislik va uning tenglamalari

Ravshanki, xOy tekisligida yotuvchi ixtiyoriy nuqta $M(x; y; 0)$ ko'rinishda bo'ladi, ya'ni $z = 0$ shart bajariladi. Aksincha, $z = 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'plami xOy tekislikni tashkil etadi. Shuning uchun $z = 0$ munosabatni xOy tekislikni aniqlovchi tenglama deb atash maqsadga muvofiq. Shu kabi $x = 0$ tenglama yOz tekislikni, $y = 0$ tenglama esa xOz tekislikni aniqlaydi deyish o'rinlidir. Endi a, b, c, d tayinlangan sonlar bo'lib, a, b, c sonlardan kamida biri noldan farqli bo'lsin.

Ta'rif. Koordinatalari

$$ax + by + cz + d = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $M(x, y, z)$ nuqtalar to'plami **tekislik**, $ax + by + cz + d = 0$ ifoda esa shu tekislikning tenglamasi deyiladi.

Izoh. Bu tenglik aniqlangan geometrik shakl haqiqatdan ham (geometrik) tekislik ekanligi vektorlar yordamida osonlikcha isbotlanadi.

$M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Demak, keltirilgan tenglama $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi barcha tekisliklar (ularning soni cheksiz ko'p) tenglamasi bo'ladi. Bu yerda a, b, c ixtiyoriy sonlar.

Ma'lumki, bir to'gri chiziqda yotmagan uchta $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin. Bu tekislikning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{*}$$

ko'rinishda. Chunki, uchala nuqtaning koordinatalari tenglikni qanoatlantiradi (determinantning qiymati 0 ga teng bo'ladi) va determinant yoyilmasi x, y, z o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli funksiyadir.

Eslatma. Determinantning ikki satri (yoki ikki ustuni) proporsional sonlardan iborat bo'lsa, xususan o'zaro teng bo'lsa, determinant qiymati nolga teng.

Yuqoridagi (*) ifodadan foydalanib, koordinata o'qlarini $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ nuqtalarda kesib o'tuvchi tekislik tenglamasini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (a,\ b,\ c \neq 0)$$

ko'rinishda yozish mumkinligini tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz. Oxirgi tenglama tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb ataladi. Fazodagi ikki tekislik:

a) ustma-ust tushishi;

b) kesishmasligi (parallel bo'lishi);

d) kesishishi – bu holda umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lishi ma'lum.

Ikki tekislik tenglamasi

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

berilgan bo‘lsin.

Ravshanki,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

shart bajarilsa, ikkala tenglama teng kuchli bo‘lib, demak, tekisliklar ust-ma-ust tushadi. Agar

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

bo‘lsa, tenglamalar birorta ham umumiy yechimga ega emas, ya’ni tekisliklar o‘zaro parallel bo‘ladi. Nihoyat,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

tengliklardan birortasi bajarilmasa

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechimga (cheksiz ko‘p) ega. Demak, bu holda tekisliklar o‘zaro kesishadi.

Shunday qilib, fazodagi to‘g‘ri chiziq tenglamasini ikki tekislik kesishishi sifatida, ya’ni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Xususan, $M(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni shu nuqtadan o‘tuvchi ikki

$$\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0 \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

tekisliklar kesishish chizig‘i sifatida yozib, hosil bo‘lgan tenglamalar sistemasini $x - x_0$ va $y - y_0$ noma’lumlarga nisbatan yechib,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

tenglamani hosil qilish mumkin. Bu tenglama to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

12-§. Vektorlar algebrasi va uning tatbiqlari

Tekisliklar va to'g'ri chiziqlar hamda ular orasidagi bog'lanishlarni o'rganish uchun vektor tushunchasi qo'l keladi.

Fazoda (yoki tekislikda) AB kesma va unda biror yo'nalish, masalan, A nuqtadan B nuqtaga qarab, aniqlangan bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ **vektor** berilgan deyiladi.

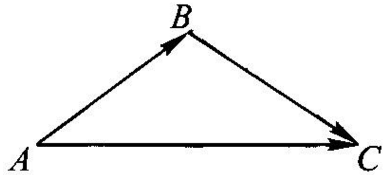
Fizikadagi tezlik, tezlanish, kuch, kuch moment kabi kattaliklar o'z yo'nalishlari bilan aniqlanib, ular matematik vektorga misol bo'ladi. Yo'nalishga ega bo'lmagan miqdorlar, masalan, masofa, massa, temperatura, energiya, **skalyar** miqdorlar deyiladi.

Vektorlar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?

Avvalo, biri ikkinchisini parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan vektorlarni biz o'zaro teng deb hisoblaymiz. Demak, $\overrightarrow{AB}$ vektorni boshi ixtiyoriy C nuqta bo'lgan $\overrightarrow{CD}$ vektorga parallel ko'chirish mumkin. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning yig'indisi deb $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi:

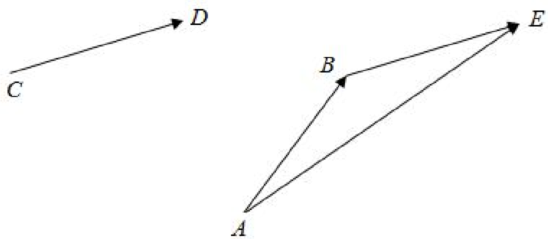
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ (32-chizma).}$$

Umuman, bir necha vektorni qo'shish uchun birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektor parallel ko'chiriladi, ko'chirilgan ikkinchi vektor oxiriga uchinchi vektor parallel ko'chiriladi va hokazo, nihoyat birinchi vektorning boshidan so'nggi vektorning oxiriga yo'naltirilgan vektor berilgan vektorlarning yig'indisi deb ataladi.



32-chizma.

Keltirilgan qoida vektorlarni k'op burchak usulida qo‘shish deyiladi. Masalan, samolyotning tezligi $\overrightarrow{AB}$ vektor, havo oqimining tezligi $\overrightarrow{CD}$ vektor bo‘lsa, samolyotning asli tezligi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ vektor bilan aniqlanadi (33-chizma).



33-chizma.

Chizmada $\overrightarrow{CD}$ vektorni B nuqtaga parallel ko‘chirib, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BE}$ vektorlar yig‘indisini ko‘pburchak usulida qo‘shib, natija sifatida $\overrightarrow{AE}$ javobni hosil qildik.

Parallel ko‘chirish vektorning qiymatini o‘zgartirmaganligi uchun, vektorning boshi A nuqtani tanlashning ahamiyati yo‘q. shuning uchun vektorni faqat bitta harf bilan ham belgilash mumkin: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$

AB kesmaning uzunligi $\overrightarrow{AB}$ vektoring ham uzunligi deb atash tabiiydir. Vektor uzunligi $|AB|$ yoki $|\overrightarrow{a}|$ ko‘rinishda yoziladi.

Bir nechta vektorlar $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ berilgan bo‘lsa, ularning yig‘indisini $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}$ ko‘rinishda yozish qulay. Bevosita uchburchak tengsizligidan

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{a_i}|$$

munosabat kelib chiqadi.

Albatta $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}$ yig‘indini $2\overrightarrow{a}$ ko‘rinishda yozish tabiiy. Bu holda $2\overrightarrow{a}$ vektor $\overrightarrow{a}$ vektorni 2 songa ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lgan deyiladi. Umuman, $\overrightarrow{a}$ vektorni λ songa ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi: $\overrightarrow{a}$ vektor uzunligini $|\lambda|$ marta ko‘paytiriladi. Hosil bo‘lgan kesmada $\lambda > 0$ holda $\overrightarrow{a}$ ning yo‘nalishi bilan bir xil, $\lambda > 0$ holda $\overrightarrow{a}$ ning yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalish olinadi. Natijada hosil bo‘lgan vektor $\lambda \cdot \overrightarrow{a}$ ko‘rinishda yoziladi. Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor nol-vektor deb yuritiladi va $\overrightarrow{0}$ ko‘rinishda yoziladi. Bu holda $0\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ bo‘ladi. $-1\cdot\overrightarrow{a}$ vektor $\overrightarrow{a}$ ga qarama-qarshi vektor deyiladi. Ravshanki, $|\lambda\cdot\overrightarrow{a}|=|\lambda|\cdot|\overrightarrow{a}|$.

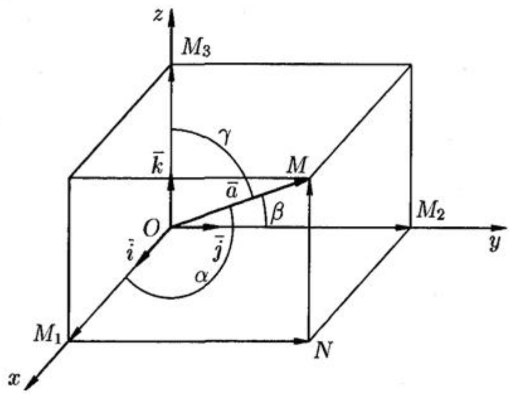
1. Koordinatalar sistemasidagi vektorlar

Vektorlarga taalluqli hisoblashlarni koordinatalar sistemasida bajarish qulay. To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida $\overrightarrow{a}$ vektorning boshini $O(0,0,0)$ nuqtaga joylashtiraylik. Vektorning oxiri esa $M(x_0,y_0,z_0)$ bo‘lsin. U holda $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{a}$ bo‘lib, $\overrightarrow{a}$ vektorni ham $\overrightarrow{a}(x_0,y_0,z_0)$ ko‘rinishda belgilash mumkin. Bunda $\overrightarrow{OM}$ radius-vektor, x_0, y_0, z_0 sonlar $\overrightarrow{a}$ vektorning Dekart koordinatalari bo‘ladi. Ravshanki,

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}$$

va $\overrightarrow{a}(x_1,y_1,z_1)$ hamda $\overrightarrow{b}(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar yig‘indisi $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ $(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ ko‘rinishda, $\lambda\overrightarrow{a}$ esa $(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi $\overrightarrow{a}$ vektorning Ox,Oy,Oz koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan burchaklari mos ravishda α,β,γ bo‘lsin.



34-chizma.

Ma'lumki, $\cos\alpha = \dfrac{|x_0|}{|\overrightarrow{a}|}$; $\cos\beta = \dfrac{|y_0|}{|\overrightarrow{a}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{|z_0|}{|\overrightarrow{a}|}$.

Demak, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{|\overrightarrow{a}|^2} = 1.$

Odatda $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sonlar $\overrightarrow{a}$ vektorinng **yo'naltiruvchi kosinuslari** deb ataladi.

Endi Ox, Oy, Oz o'qlarning musbat yo'nalishlarida uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlar olib, ularni mos ravishda $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ orqali belgilaylik. Tanlanishiga ko'ra bu vektorlarning koordinatalari

$$\overrightarrow{i}(1,0,0),\ \overrightarrow{j}(0,1,0),\ \overrightarrow{k}(0,0,1).$$

U holda $\overrightarrow{a}(x_0, y_0, z_0)$ vektorni

$$\overrightarrow{a} = x_0 \cdot \overrightarrow{i} + y_0 \cdot \overrightarrow{j} + z_0 \cdot \overrightarrow{k}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi tenglik $\overrightarrow{a}$ vektorni $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ **vektorlar bo'yicha yoyish,** $x_0\cdot \overrightarrow{i}$, $y_0\cdot \overrightarrow{j}$, $z_0\cdot \overrightarrow{k}$ vektorlar esa $\overrightarrow{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi **proyeksiyalari** deyiladi. Masalan, $\overrightarrow{a}(2,-3,5)$ bo'lsa, $\overrightarrow{a} = 2\cdot\overrightarrow{i} - 3\cdot\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ va $2\cdot\overrightarrow{i}$, $-3\overrightarrow{j}$ va $5\overrightarrow{k}$ vektorlar $\overrightarrow{a}$ vektorning proyeksiyalari.

Agar $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlar bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, bu vektorlar **kollinear vektorlar** deb ataladi. Demak, kollinearlik sharti $\overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{b}$ tenglikni qanoatlantiruvchi λ sonning mavjudligidan iborat. Koordinatalari ko‘rsatilgan $\overrightarrow{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\overrightarrow{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar uchun kollinearlik shartini

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu holda $\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$ belgilashdan foydalanamiz.

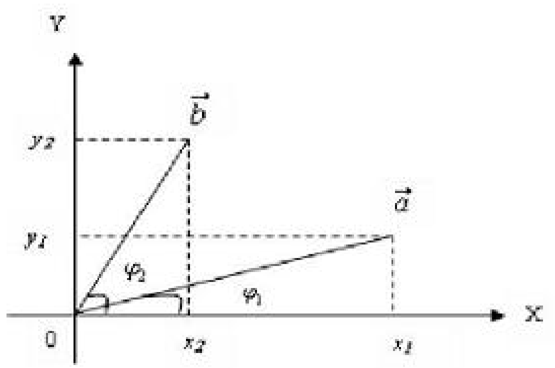
Masala. $\overrightarrow{a}(2, \alpha + \beta, \alpha)$ va $\overrightarrow{b}(\beta, 3, 2)$ vektorlar α va β sonlarning qanday qiymatlarida kollinear bo‘ladi?

$\lhd$ Kollinearlik shartiga ko‘ra: $\dfrac{2}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{3} = \dfrac{\alpha}{2}$, ya’ni $\alpha\beta = 4$; $\alpha\beta + \beta^2 = 6$.

Demak, $\beta^2 = 2$, $\beta = \pm\sqrt{2}$ va $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.

Javobi: 1) $\alpha = 2\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{2}$ va 2) $\alpha = -2\sqrt{2}$, $\beta = -\sqrt{2} \rhd$.

Endi tekislikda ikkita $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$ va $\overrightarrow{b}(x_2, y_2)$ vektorlar olib ular orasidagi burchakni topishga harakat qilamiz.



35-chizma.

Chizmada φ_1 burchak $\overrightarrow{a}$ va Ox orasidagi, φ_2 burchak $\overrightarrow{b}$ va Ox orasidagi (chizmada belgilanmagan) va φ burchak $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlar orasidagi burchaklar. U holda $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ravshanki,

$$\cos\varphi_1 = \frac{x_1}{|\overrightarrow{a}|},\;\; \sin\varphi_1 = \frac{y_1}{|\overrightarrow{a}|},\;\; \cos\varphi_2 = \frac{x_2}{|\overrightarrow{b}|},\;\; \sin\varphi_2 = \frac{y_2}{|\overrightarrow{b}|}.$$

Demak,

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1 = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|},$$

ya'ni

$$\varphi = \arccos\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}.$$

Kasrning suratidagi $x_1y_2 + y_1y_2$ ifoda muhim fizik ma'noga ega bo'lib, u $\overrightarrow{a}(x_1, y_1)$ va $\overrightarrow{b}(x_2, y_2)$ **vektorlarning skalyar ko'paytmasi** deyiladi va $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ ko'rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}$ yoki

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Fazodagi $\overrightarrow{a}(x_1, y_1, z_1) va \overrightarrow{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar uchun ham

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

ifoda **skalyar ko'paytma** deyiladi.

Fazoda ham $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlar orasidagi burchak

$$\varphi = \arccos\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|}$$

formuladan topilishini isbotlash mumkin.

$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar ($\varphi = 90°$) bo'lgani uchun ularning skalar ko'paytmasi:

$\cdot$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	1	0	0
$\overrightarrow{j}$	0	1	0
$\overrightarrow{k}$	0	0	1

jadvaldan topiladi.

Ikki vektor orasidagi burchak 90° bo'lsa vektorlar **perpendikulyar** deyiladi va $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ ko'rinishda yoziladi.

Bu holda

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Xullas vektorlarning perpendikulyarlik sharti

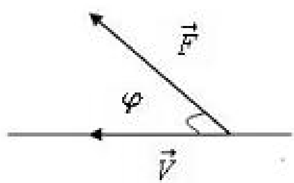
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

tenglikdan iborat.

Skalyar ko'paytma tushunchasi texnika va fizikada ko'p ishlatiladi. Masalan, o'zgarmas $\overrightarrow{F}$ kuch ta'sirida $\overrightarrow{V}$ tezlikda harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqtda bajargan ishi:

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V} = |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{V}| \cdot cos\varphi$$

formuladan topiladi (36-chizma)



36 -chizma.

Yana bir misol sifatida o'zgaruvchan tokli zanjirni ko'ramiz.

Bu holda kuchlanishning eng katta qiymati erishiladigan vaqt bilan tok kuchining eng katta qiymati erishiladigan vaqt orasidagi farq fazalarning siljishi deyiladi va φ bilan belgilanadi. Agar kuchlanish vektorini $\overrightarrow{U}$ va tok kuchi vektorini $\overrightarrow{I}$ orqali belgilasak, o'zgaruvchan tokning quvvati:

$$N = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{I} = |\overrightarrow{U}| \cdot |\overrightarrow{I}| \cdot \cos\varphi$$

formuladan topiladi. Xususan, o'zgarmas tokli zanjirda $\varphi = 0$, ya'ni $N = |\overrightarrow{U}| \cdot |\overrightarrow{I}|$ bo'ladi.

Fazodagi ikki vektor uchun yana bir amal – vektor ko'paytma tushunchasini kiritish mumkin.

Agar $\overrightarrow{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\overrightarrow{b}(x_2, y_2, z_2)$ bo'lsa,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1) \cdot \overrightarrow{i} - (y_1z_2 - x_2z_1) \cdot \overrightarrow{j} + (y_1y_2 - x_2y_1) \cdot \overrightarrow{k}$$

tenglik bilan aniqlangan vektor $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarning **vektor ko'paytmasi** deyiladi.

Oxirgi tenglikni ushbu

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k}$$

ko'rinishini eslab qolish uchun qulay shaklda yozish mumkin.

Bu tenglik

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni birinchi satri bo'yicha yoyish deyiladi.

Masalan, $\overrightarrow{a}(1, 2, -3)$ va $\overrightarrow{b}(-2, 1, 5)$ bo'lsa,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 13\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$$

kelib chiqadi.

Uchinchi tartibli determinantning ikkita satri (yoki ustun) o'zaro almashib yozilsa, determinant qiymatida faqat ishora teskarisiga almashadi (tekshirib ko'ring).

Demak,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix},\quad \vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}$$

bo‘lgani uchun $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ tenglik kelib chiqadi. Shunday qilib, vektor ko‘paytmada ko‘paytuvchilarning o‘rni almashganda ko‘paytmaning ishorasi o‘zgaradi.

Endi $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor bilan $\vec{a}$ vektorning skalyar ko‘paytmasini hisoblaylik.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

va $\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}$ bo‘lgani uchun

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=x_1\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_1\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_2\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=$$

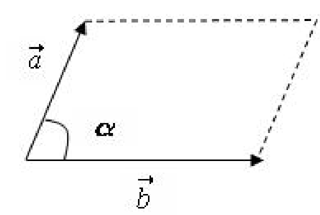
$$=x_1y_{1z_2}-x_1y_2z_1-x_1y_1z_2+x_2y_1z_1+x_1y_2z_1-x_2y_1z_1=0.$$

Demak, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$, ya’ni $\vec{a}\times\vec{b}$ va $\vec{a}$ vektorlar o‘zaro perpendikular: $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$. Xuddi shunday hisoblash $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ natijaga olib keladi.

Shunday qilib, $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikular ekan:

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}.$$

Ushbu



37-chizma.

chizmadagi parallelogramm $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm deyiladi va uning yuzasi o‘quvchiga ma’lum bo‘lgan

$$S = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha$$

formuladan topiladi.

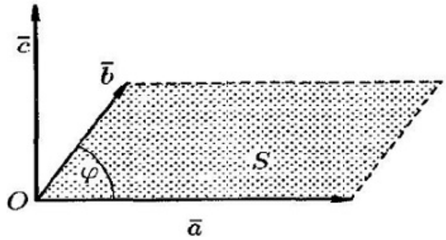
Qizig‘i shundaki $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektorning uzunligi ham shu parallogramm yuzasining son qiymatiga teng. Haqiqatdan ham (sodda hisoblashlarni o‘quvchiga qoldiramiz):

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha.$$

Demak, $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha$, ya’ni $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektor $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarga perpendikular va uzunligi $|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha$ songa teng.

Ammo, fazoda bu shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlar ikkita bo‘lib, ular bir-biridan faqat ishorasi bilan farq qiladi, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektorning yo‘nalishi kiritilgan ta’rifga mos kelishi uchun, u quyidagicha tanlanadi: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektorning oxiridan qaralganda $\overrightarrow{a}$ vektordan $\overrightarrow{b}$ vektorgacha bo‘lgan qisqa burilish soat strelkasiga teskari bo‘lishi kerak (38-chizma).



38-chizma.

Yuqorida $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarning perpendikularlik sharti skalyar ko‘paytma orqali ifodalangan edi, ya’ni

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0.$$

Kollinear vektorlar orasidagi burchak $0°$ yoki $180°$ (qarama-qarshi yo‘nalish). Ikkala holda ham $\sin 0° = \sin 180° = 0$. Demak, $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarning kollinearlik shartini vektor ko‘paytma orqali ifodalash mumkin:

$$\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0,$$

chunki $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\varphi = 0.$

Vektor ko‘paytma ta’rifidan ushbu jadvalni hosil qilamiz:

$\times$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	0	$\overrightarrow{k}$	$-\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	0	$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{i}$	0

Jadvalda 1-ko‘paytuvchi ustundan, 2-ko‘paytuvchi satrdan topiladi. Masalan, $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = (1 \cdot \overrightarrow{i} + 0 \cdot \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{k}) \times (0 \cdot \overrightarrow{i} + 1 \cdot \overrightarrow{j} + 0 \cdot \overrightarrow{k}) =$
$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}.$

Jadvaldan foydalanib, vektor ko‘paytmani ko‘phadlarni ko‘paytirgandek bajarish mumkin. Masalan,

$$(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) \times (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}) = 2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} -$$

$$-3\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} + \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} x \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{k} =$$

$$= 5\overrightarrow{k} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{i} = 5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}.$$

Endi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ uchta vektor berilgan bo‘lsin. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektor bilan $\overrightarrow{c}$ vektorning skalyar ko‘paytmasini ko‘raylik: $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$. Bu ifoda $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorlarning **aralash ko‘paytmasi** deyiladi.

Agar $\overrightarrow{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{c}(x_3, y_3, z_3)$ bo‘lsa, vektor va skalyar ko‘paytma ta’riflariga ko‘ra:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Tenglikning chap tomonidagi ifoda

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr bo‘yicha yoyilmasidan iborat.

Demak,

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Ikkinchi tomondan,

$$|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\alpha \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot \cos\beta = S \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot \cos\beta = V,$$

bu yerda α – $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlar orasidagi burchak, β – $\overrightarrow{c}$ vektorning $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ vektor bilan hosil qilgan burchagi, S – $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzasi, V – $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi bo‘lib, $V = S_{ac} \cdot h$.

Bir tekislikda yotuvchi $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorlar **komplanar vektorlar** deyiladi. Ravshanki, komplanar vektorlar uchun parallelipiped hajmi V nolga teng. Demak,

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0$$

shart uchta vektorning komplanarlik sharti ekan.

Ushbu $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ tenglikni tekshirishni o‘quvchiga havola qilamiz.

Bundan tashqari

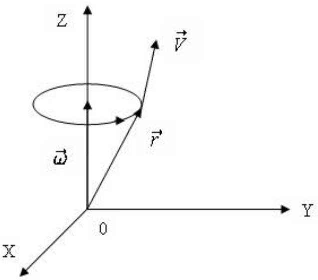
$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}$$

va

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})$$

(Lagranj ayniyati) formulalar o‘rinli.

Vektor ko‘paytma tushunchasi ham fan va texnikaning turli sohalarida uchraydi. Masalan, $0z$ o‘qi atrofida o‘qqa perpendikular tekislikda aylanayotgan $M(x, y, z)$ moddiy nuqtaning aylanma harakatdagi burchak tezligining vektori $\overrightarrow{\omega}$ bo‘lsin (39 -chizma).



39-chizma.

Ma'lumki, $\overrightarrow{\omega}$ vektor $0z$ oqi bo'yicha yo'nalgan. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ vektor M nuqtaning radius vektori, $\overrightarrow{V}$ esa moddiy nuqtaning chiziqli tezligi vektori (u harakat trayektoriyasi, ya'ni aylanaga urinma bo'yicha yo'nalgan) bo'lsin. U holda $\overrightarrow{V}$ chiziqli tezlik

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$$

tenglikdan topiladi. Agar $\overrightarrow{\omega} = (0, 0, \omega) = \omega \cdot \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{r} = (x, y, z) = x \cdot \overrightarrow{i} +$ $+ y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$ ekanligini hisobga olsak,

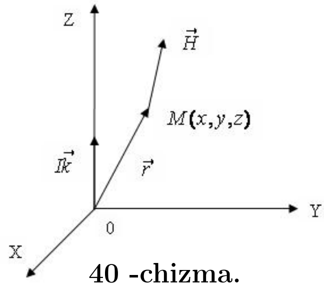
$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} = \omega \cdot \overrightarrow{k} \times (x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}) = \omega(-y \cdot \overrightarrow{i} + x \cdot \overrightarrow{j})$$

tenglik kelib chiqadi (tekshirib ko'ring). Demak,

$$|\overrightarrow{V}| = \omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

tenglikdan chiziqli tezlikning absolyut qiymatini topish mumkin.

Yana bir misol sifatida Oz o'qi bo'yicha quyidan yuqoriga qarab oqayotgan va qiymati I ga teng bo'lgan tok kuchi hosil qilgan magnit maydonining $M(x, y, z)$ nuqtadagi kuchlanganligini topaylik (40-chizma).



40 -chizma.

Agar, magnit maydonining $M(x, y, z)$ nuqtadagi kuchlanganligi vektorini $\overrightarrow{H}$, M nuqtaning radius-vektorini $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$ va tok kuchi vektorini $I \cdot \overrightarrow{k}$ deb belgilasak, Bio$-$Savar qonuniga ko‘ra

$$\overrightarrow{H} = \frac{2}{(x^2 + y^2)}(I\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{r}) = \frac{2I}{(x^2 + y^2)} \cdot (-y\overrightarrow{i} + x \cdot \overrightarrow{j})$$

formuladan topiladi.

13-§. Fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning vektor tenglamalari

Fazoda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va $\overrightarrow{a}(m, n, p)$ vektor berilgan bo‘lsin. Ravshanki, M_0 nuqtadan $\overrightarrow{a}$ vektorga parallel bo‘lgan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. $M(x, y, z)$ shu to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. Demak, $\overrightarrow{MM_0} || \overrightarrow{a}$, ya’ni

$$\overrightarrow{MM_0} \times \overrightarrow{a} = 0$$

tenglama M_0 nuqtadan o‘tuvchi va $\overrightarrow{a}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi. Uning koordinatalardagi tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

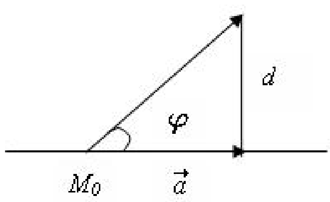
ko‘rininshda bo‘lib, $\overrightarrow{a}(m, n, p)$ vektor to‘g‘ri chiziqning **yo‘naltiruvchi vektori** deb ataladi.

Parallel ko'chirishda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak o'zgarmaydi. Demak, yo'naltiruvchi vektorlari $\overrightarrow{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ va $\overrightarrow{a_2}(m_2, n_2, p_2)$ bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak:

$$\varphi = arccos\frac{|\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}|}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = arccos\frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi (kasr suratidagi absolyut qiymat ishorasiga ahamiyat bering).

$N(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblaylik (41-chizma).



41-chizma.

Ravshanki, $d = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \sin\varphi$ bu yerda φ – $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{M_0N}$ vektorlar orasidagi burchak. Vektor ko'paytma uchun keltirilgan formuladan

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{M_0N}|}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{M_0N}|}.$$

Demak,

$$d = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \frac{|\overrightarrow{a} \times M_0N|}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{M_0N}|} = \frac{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{M_0N}|}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Endi $\overrightarrow{a}(m, n, p)$ va $\overrightarrow{M_0N}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ vektorlarni bilgan holda d masofani koordinatalar orqali ifodalashni o'quvchiga havola qilamiz.

Yana $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va $\overrightarrow{a}(m, n, p)$ vektor berilgan bo'lsin.

Ma'lumki M_0 nuqtadan $\overrightarrow{a}$ vektorga perpendikular bo'lgan yagona tekislik o'tkazish mumkin. Demak, $M(x, y, z)$ shu tekislikdagi biror nuqta bo'lsa, $\overrightarrow{MM_0}$ vektor $\overrightarrow{a}$ vektorga perpendikular bo'ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \overrightarrow{a} = 0$$

tenglik tekislikning vektor tenglamasi bo'ladi. Bu tenglamani skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0$$

shaklda yozish mumkin.

$\overrightarrow{a}(m, n, p)$ vektor tekislikning **normal vektori** deyiladi.

Ravshanki, ikki tekislik orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchak orqali aniqlanadi. Normal vektorlari $\overrightarrow{a_1}(m_1, n_1, p_1)$ va $\overrightarrow{a_2}(m_2, n_2, p_2)$ bo'lgan tekisliklar orasidagi burchak

$$\varphi = \arccos \left| \frac{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}}{|a_1| \cdot |a_2|} \right| = \arccos \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi.

$N(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0$$

tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

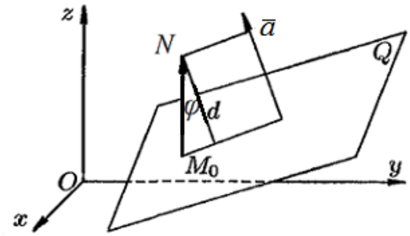
ifodaga teng.

Chunki 42-chizmadan

$$d = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \cos\varphi = |\overrightarrow{M_0N}| \cdot \frac{\overrightarrow{M_0N} \cdot \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{M_0N}| \cdot |\overrightarrow{a}|} =$$

$$= \frac{|m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

tenglik kelib chiqadi.



42-chizma.

Nihoyat fazodagi to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning o‘zaro joylashishini ko‘ramiz.

To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\overrightarrow{a_1}(m_1, n_1, p_1)$, tekislikning normal vektori $\overrightarrow{a_2}(m_2, n_2, p_2)$, bo‘lsin. Agar $\overrightarrow{a_1}$ va $\overrightarrow{a_2}$ vektorlar orasidagi (o‘tkir) burchak φ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ ga teng (shaklini chizib tekshiring). Demak, to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi ψ burchak

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}|}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} = \arcsin \frac{|\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}|}{|\overrightarrow{a_1}| \cdot |\overrightarrow{a_2}|} =$$

$$= \arcsin \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

formuladan topiladi.

Xususan, $\psi = 0$, ya’ni to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelik sharti ($\overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2}$)

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

tenglikdan iborat.

Xuddi shunday $\psi = \dfrac{\pi}{2}$, ya’ni to‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti ($\overrightarrow{a_1} || \overrightarrow{a_2}$)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

tenglikdan iborat.

14-§. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini affin almashtirish. Ikkinchi tartibli sirtlar

$M(x, y, z)$ nuqtaning biror yangi koordinatalar sistemasidagi yangi koordinatalari $M(x', y', z')$ bo‘lsin. Agar bu sonlar orasida ushbu munosabatlar

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

$$z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3$$

o‘rinli bo‘lib,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa, (x, y, z) sistemadan (x', y', z') sistemaga o‘tish **affin almashtirish** deyiladi.

Affin almashtirishda to‘g‘ri chiziq, tekisliklar yana to‘g‘ri chiziq, tekisliklarga o‘tadi. Parallelik xossasi ham saqlanadi.

Koordinatalari ushbu

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $M(x, y, z)$ nuqtalar to‘plami **2-tartibli sirt** deyiladi. Affin almashtirish yordamida tenglamani ushbu asosiy ko‘rinishlardan biriga keltirish mumkin (ba’zi aynigan hollar ko‘rsatilmagan):

$$\pm x^2 \pm y^2 \pm z^2 = 1; \tag{1}$$

$$\pm x^2 \pm y^2 \pm z = 0; \tag{2}$$

$$\pm x^2 \pm y^2 = 1; \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = 0. \tag{4}$$

Buning uchun o‘quvchiga ma’lum bo‘lgan to‘la kvadratlar hosil qilish usulidan foydalanish kifoya. Masalan,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2kz + e =$$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{d}{a}xy + 2 \cdot \frac{e}{a}xz + 2\frac{g}{a}x\right) + ... \ (x- \text{ qatnashmagan hadlar}) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a}z + \frac{g}{a}\right)^2\right) + ... \ (x - \text{qatnashmagan hadlar}).$$

Demak,

$$x' = \sqrt{|a|} \cdot (x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a}z + \frac{g}{a})$$

almashtirish bilan $\pm x'^2$ hadni hosil qilamiz.

So‘ngra, faqat y va z qatnashgan hadlardan y o‘zgaruvchiga nisbatan to‘la kvadrat hosil qilamiz.

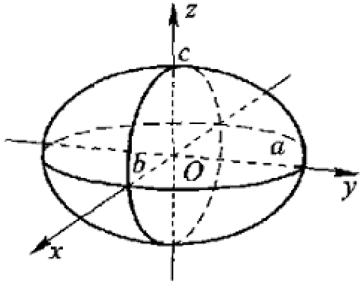
1.1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ holga sfera

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

va ellipsoidlar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kiradi (43-chizma).



43-chizma.

Ular chegaralangan va kamida uchta simmetriya tekisligiga ega bo'lgan sirtlar.

1.2. $x^2+y^2-z^2=1$ holga bir yaproqli giperboloidlar kiradi (44-chizma).

Bir yaproqli giperboloid chegaralanmagan Oz simmetriya o'qiga ega va uning $z = const$ tekislik bilan kesimi aylanalardan (ellipslardan) iborat sirt.

1.3. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ holga ikki yaproqli giperboloidlar kiradi (45-chizma).

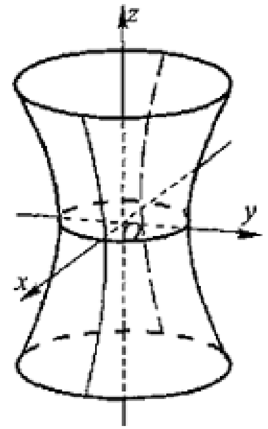
Ikki yaproqli giperboloid ham chegaralanmagan, uning $z = const$ tekisliklar bilan kesimi giperbolalardan, $x = const > 1$ tekisliklar bilan kesimi aylanalardan (ellipslardan) iborat bo'lgan sirt.

3. Agar tenglamada birorta o'zgaruvchi qatnashmasa, bu tenglama bilan aniqlangan sirt **silindrik sirt** deyiladi

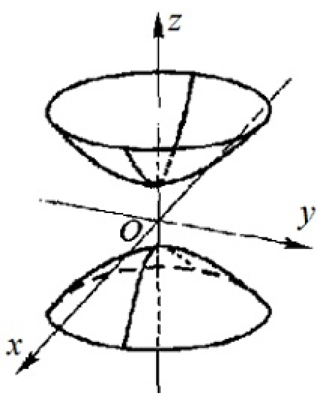
Masalan, $x^2 + y^2 = 1$ – **elliptik silindr,** $x^2 - y^2 = 1$ – **giperbolik silindr** deyiladi. Ularning chizmasi xOy tekislikdagi ellips va giperbolani Oz o'qi bo'ylab parallel ko'chirishda hosil bo'ladi (46-chizma).

Demak (4) tenglama bilan aniqlangan sirt **parabolik silindr** bo'ladi.

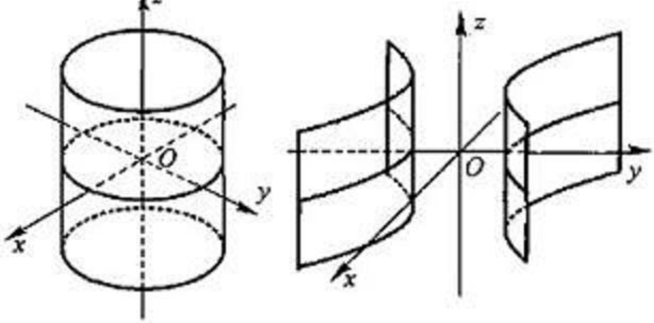
Nihoyat, $x^2 + y^2 + z = 0$ sirt **elliptik paraboloid,** $x^2 - y^2 + z = 0$ sirt **giperbolik paraboloid** deb ataladi. Bir jinsli bo'lgan $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ sirt **konussimon sirt** deyiladi.



44-chizma.



45-chizma.



46-chizma.

15-§. Chiziqli algebraning asosiy tushunchalari

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi

Ushbu ko'rinishdagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

tenglama **chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi** deb ataladi. Bu yerda m ta tenglama va n ta noma'lum sonlar, ya'ni $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lib, a_{ij} – noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlar, ya'ni a_{ij} i-tenglamada j-noma'lum oldidagi koeffitsiyent va $b_1, b_2, ..., b_n$ – sonlar berilgan bo'lib, ular ozod hadlar deyiladi. Masala keltirilgan tengliklarni qanoatlantiruvchi x_1, x_2, $\ldots$, x_n sonlarni topishdan iborat.

Chiziqli tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning balans masalalarida, mexanikaning statika bo'limida uchraydi. Masalan, iqtisodiy texnologiyaning "harajatlar – natijalar" modelida n ta tovarlar, ularning ishlab chiqarilish miqdorlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bo'lsa, va a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ texnologik koeffitsiyentlar hamda $b_1, b_2, ..., b_2, ..., b_n$ sonlar shu tovarlarga bo'lgan ehtiyojlar miqdori bo'lsin. U holda balans tenglamalarga asosan

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

munosabatlar kelib chiqadi. Oxirgi tenglamalar sistemasi **Leontyev tenglamasi** deyiladi.

Elektr zanjirlarda tarmoqlangan tok kuchlarini Kirxgoff qonunlari bo'yicha hisoblash ham chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi.

2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 2 \\ \qquad 2x_2 + 5x_3 = 11 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi oxirgi tenglamadan boshlab yuqoriga qarab osonlikcha yechiladi. Haqiqatdan, oxirgi tenglamadan, $x_3 = \dfrac{5}{2} = 2,5$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_2 = \dfrac{11 - 12,5}{2} = -1,25$, nihoyat $x_3 = 2,5$ va $x_2 = -1,25$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib,

$$x_1 = \frac{2 + 3,75 + 17,5}{2} = 11,625$$

sistemaning yechimini: $x_1 = 11,625$; $x_2 = -1,25$; $x_3 = 2,5$ topamiz.

Yuqoridagi sistema oson yechilishiga sabab uning maxsus, ya'ni "uchburchak" ko'rinishda ekanligidir.

Ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yuqoridagidek qulay ko'rinishga keltirish mumkinmi? Umuman, tanglamalar bilan qanday amallarni bajarish mumkin?

Ma'lumki, yechimlar to'plami bir xil bo'lgan ikkita tenglamalar sistemasi **teng kuchli (ekvivalent) sistemalar** deyiladi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasini yechishni o'rniga unga teng kuchli soddaroq ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini yechish maqsadga muvofiqdir.

Ravshanki, sistemadagi tenglamalarning o'rni almashtirib yozilsa, hosil bo'lgan yangi sistema avvalgisiga teng kuchli bo'ladi. Masalan,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi teng kuchli (1- va 2-tenglamalarning o'rni almashgan). Xuddi shunday sistemadagi biror tenglamani qandaydir songa ko'paytirib, ikkinchi bir tenglamaga qo'shsak va hosil bo'lgan tenglamani ikkinchi tenglama o'rniga yozsak, hosil bo'lgan yangi sistema dastlabki sistemaga teng kuchli bo'ladi. Misol uchun

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \cdots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistemalar teng kuchli (1-tenglamani λ ga ko'paytirib, 2-tenglamaga qo'shdik).

Endi $a_{11} \neq 0$ bo'lsin, aks holda x_1 oldidagi koeffitsiyenti a_{k1} noldan farqli bo'lgan tenglama bilan 1-tenglamaning o'rnini almashtiramiz. So'ngra 1-tenglamani avval $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ ga ko'paytirib 2-tenglamaga qo'shamiz, keyin yana 1-tenglamani $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ songa ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz va hokazo, nihoyat yana 1-tenglamani $-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$ songa ko'paytirib, oxirgi m - tenglamaga qo'shamiz. Hosil bo'lgan sistema dastlabkisiga teng kuchli va yangi sistemada 2-, 3-..., m-tenglamalarda x_1 qatnashmaydi. Demak, tenglamalar sistemasi ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

ko'rinishga keladi (shtrixlar koeffitsiyentlar o'zgarganini ta'kidlaydi).

Yana $a^1_{22} \neq 0$ bo'lsin (aks holda quyidagi tenglamalardan birini 2-tenglama bilan o'rnini almashtiramiz). Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab, sistemani 3-,4-, m-tenglamalarda x_2 qatnashmaydigan ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_2 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{cases}$$

bu yerda $a''_{33}, \ldots, a''_{mn}, b''_3, \ldots, b''_m$ sonlar yangi hosil bo'lgan koeffitsiyentlar. Bu jarayonni qayergacha davom ettirish mumkin? Bu savolga javob berishdan avval bir necha misol ko'raylik.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \quad -2x_3 = -2 \\ \quad -2x_2 = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \quad -2x_2 \quad = -4 \\ \qquad -2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 1; x_2 = 2; x_1 = 4 \Rightarrow$ sistema yagona yechimga ega.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \qquad 0 = -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sistemaning yechimi yo‘q.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x_1 = 7 - x_2 - x_3$; x_2 va x_3 ixtiyoriy sonlar, ya’ni sistema cheksiz ko‘p yechimga ega.

Shunday qilib, chiziqli tenglamalar sistemasini unga teng kuchli bo‘lgan ushbu ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m \end{cases}$$

bu yerda yangi o‘zgargan koeffitsiyentlar qatnashgan. Oxirgi ko‘rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi “trapetsiya” ko‘rinishga keltirilgan sistema deyiladi.

Agar $b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_m$ koeffitsiyentlardan birortasi noldan farqli bo‘lsa, $0 = b_i \neq 0 (i = k+1, k+2, ..., m)$ ziddiyat hosil bo‘lib, tenglamalar sistemasi **birgalikda emas** deb ataladi.

Agar $b_{k+1} = b_{k+2} = ... = b_m = 0$, yoki $k = m$ bo‘lsa, sistemaning yechimi mavjud bo‘lib, chiziqli tenglamalar sistemasi **birgalikda** deyiladi. Birgalikda bo‘lgan sistema uchun ushbu ikki holni bir-biridan farqlashimiz zarur:

1-hol. $k = n$ bo‘lib, $a_{nn} \neq 0$ bo‘lganda tenglamalar sistemasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

“uchburchak” ko‘rinishga kelib, bu sistema quyidan yuqori qarab ketma-ket yechiladi: $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$, so‘ngra undan avvalgi tenglamadan x_{n-1} va hokazo barcha noma’lumlar bir qiymatli topiladi. Demak, “uchburchak” ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega.

2-hol. $k < n$ bo‘lganda sistema ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

“trapetsiya” ko‘rinishga keladi. Bu holda $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ noma’lumlarni ixtiyoriy parametrlar deb hisoblab, oxirgi tenglamadan

$$x_k = \frac{b_k - a_{kk+1}x_{k+1} - a_{kk+2}x_{k+2} - ... - a_{kn}x_n}{a_{kk}}$$

noma’lumni, undan avvalgi tenglamadan esa x_{k-1} noma’lumni, shu tarzda ketma-ket barcha noma’lumlarni $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ parametrlar qatnashgan ifodalar sifatida topish mumkin. Demak, bu holda chiziqli tenglamalar sistemasi $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ parametrlarga bog‘liq bo‘lgan cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yuqorida bayon qilingan usulda yechish Gauss usuli deyiladi.

Demak, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas, yoki yagona yechimga ega, yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lar ekan.

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish

Ikkiinchi tartibli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

berilgan bo‘lsin. Agar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, sistemani Gauss usulida yechib

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

yagona yechimga ega bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Agar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \triangle, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \triangle_1, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \triangle_2$$

belgilashlar kiritsak, sistemaning yechimini

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Quyida biz faqat tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan sistemalarni o'rganamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Bizga 1, 2, 3, ..., n sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlarni qandaydir boshqa tartibda yozib chiqaylik va uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

demak, k_1, k_2, ..., k_n sonlar 1, 2, 3, ..., n sonlarni, umuman aytganda, o'zgacha tartibda yozilishi. Bu yozilgan ifoda 1,2,3,...,n sonlarning **o'rin almashtirish** deyiladi. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ushbu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

o'rin almashtirish **ayniy** deb ataladi. Xo'sh, 1, 2, 3, ..., n sonlardan nechta o'rin almashtirishlar hosil qilish mumkin? Ravshanki, 1 sonning ostiga 1, 2, 3, ..., n sonlardan birini (ya'ni imkoniyatlar soni n ta), 2 sonning ostiga esa qolgan $n-1$ ta sonlardan ixtiyoriysini (ya'ni imkoniyatlar soni yana $n-1$ marta oshadi), 3 sonning ostiga qolgan $n-2$ ta sonlardan birini (demak, imkoniyatlar soni yana $n-2$ marta ko'payadi) va hokazo. Demak, barcha o'rin almashtirishlar soni $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...2 \cdot 1 = n!$ ga teng ekan.

Aytaylik, bizga o'rin almashtirishda quyi qatorda yozilgan sonlardan faqat ikkitasining o'zaro joyini almashtirish amaliga ruxsat berilgan bo'lsin.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

bu yerda 2 va 1 o‘zaro almashtirib yoziladi. Ruxsat berilgan amaldan ketma-ket bir necha marta foydalanib, barcha sonlarni o‘z joylariga keltirish, ya’ni ayniy o‘rin almashtirishni hosil qilish mumkin. Buning uchun birinchi qadamda 1 sonni o‘z o‘rniga keltirish, so‘ngra 2 sonni o‘z joyiga keltirish, va hokazo, $n-1$ sonni o‘z o‘rniga keltirish kifoya (bu holda n son ham o‘z o‘rniga keladi). Demak, ixtiyoriy o‘rin almashtirishni oshib borsa $n-1$ ta qadamda ayniy almashtirishga olib kelish mumkin. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

bu misolda biz 3 ta qadamda ayniy almashtirishga keldik.

Biror o‘rin almashtirishni juft yoki toq sondagi qadamda ayniy almashtirishga keltirish mumkin bo‘lsa, o‘rin almashtirishning o‘zi ham mos ravishda juft yoki toq deyiladi.

Endi bizga o‘rin almashtirishni biror harf bilan,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

barcha o‘rin almashtirishlar to‘plamini esa S_n orqali belgilash qulay. Nihoyat $|\tau|$ orqali τ o‘rin almashtirishni ayniy o‘rin almashtirishga olib keluvchi amallar soni bo‘lsin.

Shunday qilib, S_n to‘plamda $n!$ ta o‘rin almashtirishlar bo‘lib, $n \geq 2$ holda ularning yarmi juft, yarmi esa toq o‘rin almashtirishlar.

Endi ixtiyoriy tartibli determinant tushunchasini kiritishimiz mumkin.

Ushbu

$$\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ifoda n-**tartibli determinant** deyiladi.

Determinantning qiymati quyidagi formuladan topiladi:

$$\mathcal{D}_n = \sum_{\tau \in S_n} (-1)^n a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)},$$

bu formulada

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

1, 2, 3, ..., n sonlardan tuzilgan o‘rin almashtirishlar. Misol uchun $n = 2$ bo‘lganda:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, |\tau_1| = 0; (-1)^{\tau_1} = 1$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, |\tau_2| = 1; (-1)^{\tau_1} = -1$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

bizga ma’lum bo‘lgan tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shunday $n = 3$ bo‘lganda $\mathcal{D}_3$ uchun ma’lum bo‘lgan ifoda kelib chqishini tekshirishni o‘quvchiga havola qilamiz.

Masala. 5-tartibli determinant yoyilmasida $a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$ qo‘shiluvchi qanday ishora bilan olinadi?

$\lhd$ Bu hadga mos keluvchi o‘rin almashtirish:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

demak, $|\tau| = 3$ va $(-1)^{|\tau|} = (-1)^3 = -1$.

Determinantlarning xossalari.

1°. Biror satri (yoki ustuni) faqat nollardan iborat bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

Haqiqatdan, har bir qo‘shiluvchining $(-1)^{|\tau|} \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)}$ ko‘paytuvchilardan biri nolga teng, chunki $a_{1\tau(1)}, ..., a_{n\tau(n)}$ sonlar ichida nolli satr (yoki ustun) dan albatta bitta vakil qatnashadi.

2°. Determinantning biror satridagi (yoki ustunidagi) barcha sonlar λ songa ko‘paytirilsa, determinantning qiymati ham shu λ songa ko‘payadi, chunki har bir qo‘shiluvchi λ marta oshadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 15 & 28 \end{vmatrix} = 5 \cdot 14 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 70 \cdot (4 - 3) = 70,$$

bu yerda 1-ustundan 5 ni, 2-ustundan 14 ni determinant tashqarisiga ko‘paytuvchi sifatida chiqardik.

3°. Determinantning ikki satri (yoki ikki ustuni) o‘rni almashtirib yozilsa, hosil bo‘lgan determinant qiymati dastlabki determinant qiymatiga qarama-qarshi son bo‘ladi (ya’ni faqat ishora teskarisiga o‘zgaradi). Haqiqatdan, aytaylik 1- va 2-satrlar o‘rni almashgan bo‘lsin. U holda

$$(-1)^{|\tau|} \cdot a_{2\tau(1)} a_{1\tau(2)} a_{3\tau(3)} ... a_{n\tau(n)} = (-1)^{|\tau|} \cdot a_{1\tau(2)} a_{2\tau(1)} a_{3\tau(3)} ... a_{n\tau(n)} =$$

$$= (-1)^{|\tau'|} \cdot a_{1\tau'(1)} a_{2\tau'(2)} a_{3\tau'(3)} ... a_{n\tau'(n)} = -(-1)^{|\tau|} \cdot a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} ... a_{n\tau(n)},$$

bu yerda

$$\tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(2) & \tau(1) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

ya’ni τ o‘rin almashtirishda $\tau(1)$ va $\tau(2)$ sonlar o‘rni almashgan, demak τ' ning juft-toqligi τ ning juft-toqligiga teskari. Shuning uchun 1- va 2-satrlar almashganda barcha qo‘shiluvchilarning ishorasi o‘zgaradi.

4°. Determinantning ikki satri (yoki ikki ustuni) o‘zaro teng bo‘lsa determinant nolga teng. Haqiqatdan, shu ikki teng satrlar o‘rnini almashtirsak, bir tomondan determinant o‘zgarmaydi, ikkinchi tomondan avvalgi xossaga ko‘ra ishorasi almashadi, ya’ni $\mathcal{D}_n = -\mathcal{D}_n$, demak $\mathcal{D}_n = 0$.

$$5^\circ. \quad \begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & \cdots & a'_{1n}+a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \cdots & a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

bu xossa bevosita $(-1)^{|\tau|} \cdot (a'_{1\tau(1)} + a''_{1\tau(1)})a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}...a_{n\tau(n)} =$

$$= (-1)^{|\tau|} \cdot a'_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}...a_{n\tau(n)} + (-1)^{|\tau|} \cdot a''_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}...a_{n\tau(n)}$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Yuqoridagi xossalardan determinantning biror satriga ikkinchi satrini qandaydir λ songa ko‘paytirib so‘ngra qo‘shsak, determinantning qiymati o‘zgarmasligi kelib chiqadi. Albatta bu xossa ustunlarga ham taalluqli.

6°. Agar determinantda $a_{11} \neq 0$ va $a_{12} = a_{13} = ... = a_{1n} = 0$ bo‘lsa,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

ya’ni n- tartibli determinantni $n-1$- tartibli determinantga keltirish mumkin. Haqiqatdan,

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

o‘rin almashtirishda $\tau(1) \neq 1$ bo‘lsa, $a_{1\tau(1)}...a_{n\tau(n)}$ ko‘paytma nolga teng, chunki $a_{12} = a_{13} = ... = a_{1n} = 0$. U holda determinant yoyilmasida faqat $\tau(1) = 1$ bo‘lgan o‘rin almashtirishlarga mos keluvchi hadlar va ularning har birida a_{11} ko‘paytuvchi qoladi. Demak,

$$\sum_{\tau\in S'_n}(-1)^{|\tau|}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)} = a_{11}\cdot \sum_{\tau\in S'_{n-1}}(-1)^{|\tau|}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)},$$

ya’ni yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Natija. Determinantning i-satridagi $a_{ij} = 0$, qolgan barcha sonlari noldan iborat bo‘lsa,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij}$$

tenglik o‘rinli, bu yerda M_{ij} – determinantning i-satri va j-ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $n-1$-tartibli determinant.

Avvalgi xossadan foydalanib, natijani isbotlash uchun a_{ij} elementni chap yuqori burchakka, ya’ni a_{11} ning o‘rniga olib kelish kerak, ammo bunda qolgan satr va ustunlarning tartibini saqlab qolish zarur. Buning uchun i-satrini ketma-ket bir pog‘ona yuqorisidagi satr bilan almashtirish zarur. Bu amal i marta bajariladi, demak, 4° xossaga ko‘ra, determinantning ishorasi (-1) songa ko‘payadi. Xuddi shunday j-ustunni j marta almashtirib, maqsadga erishamiz. Natijada ishora $(-1)^{i+j}$ songa ko‘payadi.

Yuqorida kiritilgan M_{ij} determinant **minor,** $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ son esa a_{ij} elementning **algebraik to‘ldiruvchisi** deb ataladi.

Keltirilgan natija va 5° xossa determinantni biror satri yoki ustuni bo‘yicha $n-1$-tartibli determinantlar yig‘indisiga yoyishga imkon beradi:

$$\mathcal{D}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni 3 - ustuni bo‘yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2(12+30-3-27-5+8)-(20-3-18-5) = 30+6 = 36.$$

Yuqoridagi $\mathcal{D}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot A_{kj}$ formulani asoslash uchun misol ko‘raylik.

5° xossaga va natijaga ko‘ra:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12} & a_{13} \\ 0+a_{21}+0 & a_{22} & a_{23} \\ 0+0+a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31}.$$

Shu mulohaza umumiy holda ham o‘rinli: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot A_{k1}.$

Bu formuladan teskarisiga ham foydalanish mumkin, ya'ni $b_1, b_2, ..., b_n$ qandaydir sonlar bo‘lsa,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot A_{k1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tenglik o‘rinli. Xuddi shunday $b_k \cdot A_{k1}$ yig‘indini D_n determinantda j-ustunni o‘chirib, o‘rniga $b_1, b_2, ..., b_n$ sonlarni yozib chiqishdan hosil bo‘lgan determinantga teng.

Agar $\sum_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot A_{k1}$, $i \neq j$ yig‘indini ham shunday determinant ko‘rinishida ikkita bir xil i- va j-ustunlar hosil bo‘ladi. Demak, 4° xossaga ko‘ra bunday yig‘indi nolga teng, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot A_{k1} = 0, \quad \text{agar } i \neq j.$$

Bajarilgan tayyorgarlik ishlarimizdan so‘ng, asosiy masalamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechishga qaytamiz.

Buning uchun

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \triangle_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \triangle_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

belgilashlar kiritib, $\triangle \neq 0$ deb hisoblaymiz.

Endi sistemaning 1-tenglamasini A_{11} songa, 2-tenglamasini A_{11} songa, 3-tenglamasini A_{31} songa va hokazo, oxirgi tenglamasini A_{n1} songa ko'paytirib, barcha tengliklarni qo'shib chiqamiz. Natijada

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot A_{k1}\right) x_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k2} \cdot A_{k1}\right) x_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k3} \cdot A_{k1}\right) x_3 +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kn} \cdot A_{k1}\right) x_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot A_{k1}.$$

Determinantning xossalariga ko'ra $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k1} \cdot A_{k1} = \triangle$ va $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{k1} = 0$ $(i \neq 0)$ hamda $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \cdot A_{k1} = \triangle_1$.

Demak, $\triangle \cdot x_1 = \triangle_1$, bundan esa $x_1 = \dfrac{\triangle_1}{\triangle}$ kelib chiqadi.

Endi $x_k = \dfrac{\triangle_k}{\triangle}$ tenglikni keltirib chiqarishni oquvchiga havola qilamiz $(k = 2, ..., n)$. Hosil bo'lgan:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \ x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \ \ ..., \ \ x_n = \frac{\triangle_n}{\triangle}$$

formulalar **Kramer formulalalri** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemada $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Shunday qilib, $\triangle \neq 0$ holda Kramer formulalari sistemaning yechimini ifodalaydi.

Agar $\triangle = 0$, ammo $\triangle_1, ..., \triangle_n$ sonlardan birortasi noldan farqli bo'lsa, sistemaning yechimi yo'q, ya'ni chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda emas.

Nihoyat, $\triangle = \triangle_1 = \triangle_2 = ... = \triangle_n = 0$ holda tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, Kramer formulalari ma'noga ega emas.

16-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Texnika, iqtisodiyot, transport masalalarida ko'p uchraydigan matematik tushunchalardan biri matritsa tushunchasidir. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

to'g'ri to'rtburchak shaklida yozilgan sonlar birgalikda matritsa deb ataladi. Odatdagidek, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ sonlar matritsaning 1-satri,

$a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ sonlar 1-ustuni va hokazo. Ba'zan matritsani qisqacha

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}}$$

ko'rinishda ham yoziladi. Matritsaning tartibi deb $m \times n$ ifodaga aytiladi, bu yerda m – satrlar soni, n – ustunlar soni. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa tartibi 2×3 va $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa tartibi 4×2.

Tartiblari bir xil va barcha mos elementlari teng bo'lgan ikkita matritsa o'zaro teng hisoblanadi. Tartibi bir xil bo'lgan ikki matritsani ushbu qoida bo'yicha qo'shish mumkin:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu amalni qisqacha $C = A + B$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ravshanki, $A + B = B + A$.

Matritsalarga misol sifatida Leontyev matritsasini keltirish mumkin:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \ldots & l_{1n} \\ & & \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix}, l_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, ..., n$$

bu yerda l_{ij} – j-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun i-mahsulotning zarur bo'lgan miqdori.

Leontyev matritsasi odatda harajat ishlab chiqarish matritsasi deyiladi.

Ikkita $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ va $B = (b_{ij})$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,k}$ matritsalar berilgan bo'lib, 1-matritsaning ustunlari soni ya'ni n son, 2-matritsaning satrlar soniga teng bo'lsin. U holda bu matritsalarning ko'-

paytmasi $A \cdot B =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \cdots + a_{1n}b_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1k} + a_{m2}b_{2k} + \cdots + a_{mn}b_{nk} \end{pmatrix}$$

tenglikdan topiladi. Demak, 1-matritsaning, ya'ni A ning, har bir satridagi sonlar 2-matritsaning har bir ustunidagi mos sonlarga koʻpaytirilib, bu koʻpaytmalar yigʻindisi $A \cdot B$ matritsaning elementlarini tashkil etadi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ boʻlsa,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 9 & 5 \cdot 8 + 6 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, $A = (a_{ij})$ matritsaning oʻlchami $m \times n$, va $B = (b_{ij})$ matritsaning oʻlchami $n \times k$ boʻlsa, $C = A \cdot B$ koʻpaytmaning oʻlchami $m \times k$ boʻlib, uning c_{ij} elementi $c_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj}; i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}$ tenglikdan topiladi.

Eslatma. Matritsalar koʻpaytmasi faqat 1-matritsaning ustunlari soni 2-matritsaning satrlari soniga teng boʻlgan holdagina aniqlanadi. Nima uchun matritsalar koʻpaytmasi aynan shu usulda aniqlanadi? Koʻpaytmaning shu shaklda keltirilishiga dalillardan biri sifatida bir misol koʻraylik.

Bir xil mahsulot ishlab chiqaruvchi ikkita korxona oʻz mahsulotlarini 3 ta omborga tarqatadi. Oʻz navbatida omborlar mahsulotni 4 ta doʻkonlarga tarqatadi. Masalan, korxonalardan omborlarga taqsimlash matritsasi quyidagicha boʻlsin:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

bu yerda satrlar korxonaning nomeri, ustunlar omborning nomeri boʻlib, 1-korxona mahsulotining 0,2 qismini 1-omborga, 0,5 qismini 2-omborga, 0,3 qismini 3-omborga tarqatadi. Ahamiyat bering: 0,2+0,5+0,3=1, ya'ni korxona barcha mahsulotini omborlarga tarqatadi. A matritsaning 2-satri 0,4; 0,1; 0,5 ham xuddi shunday talqin etiladi. Endi omborlardan do'konlarga taqsimlash matritsasi, masalan, ushbu ko'rinishda bo'lsin:

$$B = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

bu yerda satrlar omborlarning nomeri, ustunlar esa do'konlarning nomeri bo'lib, masalan, $b_{23} = 0,3$ tenglik 2-ombordagi mahsulotning 0,3 qismi 3-do'konga tarqatiladi. E'tibor bersangiz B matritsaning ham har bir satridagi sonlar yig'indisi yana 1 ga teng, ya'ni barcha mahsulotlar do'konlarga tarqatiladi. Ba'zi sabablarga ko'ra omborlarni o'yindan chiqarmoqchimiz, ya'ni bevosita korxonadan do'konlarga taqsimot matritsasi qanday bo'ladi?

Aytaylik, c_{ij} – i-korxonadan j-do'konga jo'natiladigan mahsulot ulushi (miqdori) bo'lsin. Korxonalar soni 2 ta do'konlar soni 4 ta bo'lgani uchun $C = (c_{ij})$ matritsaning o'lchami 2×4 ga teng. Ravshanki, $c_{11} = 0,2\cdot 0,1+0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,5$, chunki 1-korxona ishlab chiqargan barcha mahsulotning 0,2 qismi 1-omborga, uning 0,1 qismi, ya'ni $02\cdot 0,1$ qismi 1-do'konga keladi. Xuddi shunday 1-do'konga 2-ombor orqali $0,5\cdot 0,2$ va 3-ombor orqali $0,3\cdot 0,5$ qismlar keladi. Demak, 1-korxona mahsulotining $0,2\cdot 0,1+0,5\cdot 0,2+0,3\cdot 0,5 = 0,27$ qismi 1-do'konga kelib tushishi shart. Shu mulohazalarni takrorlab:

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{3} a_{it}b_{tj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak,

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 0,27 & 0,17 & 0,24 & 0,32 \\ 0,31 & 0,15 & 0,20 & 0,34 \end{pmatrix}$ bevosita korxonalardan do‘konlarga mahsulot taqsimlash matritsasi hosil bo‘ladi.

Ma’lumki, sonlarni ko‘paytirish o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysinadi: $a \cdot b = b \cdot a$, ammo matritsalar ko‘paytmasi uchun bunday xossa o‘rinli emas. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar uchun

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, ya’ni $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Matritsani songa ko‘paytirish uchun uning barcha elementlari shu songa ko‘paytiriladi:

$$c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij}), \;\; i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,m}.$$

Ba’zi maxsus ko‘rinishdagi matritsalar:

1°.

$$O = (0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– barcha elementlari noldan iborat matritsa **nol-matritsa** deyiladi.

2°. Satrlar soni ustunlar soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi.

3°. Kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elementlari uning **diagonali** deb ataladi.

4°. Diagonaldan tashqaridagi barcha elementlari noldan iborat kvadrat matritsa **diagonal matritsa** deyiladi.

5°. Diagonal matritsada $a_{11} = a_{22} = a_{33} = ... = a_{nn} = 1$ bo'lsa, u **birlik matritsa** deyiladi va $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ orqali belgilanadi.

6°. Diagonalning yuqorisidagi yoki quyisidagi barcha elementlari nol bo'lgan matritsa **uchburchak matritsa** deb ataladi.

7°. $A = (a_{ij})$ kvadrat matritsa uchun:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & ... & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n-tartibli determinantning qiymati $|A|$ yoki $\det A$ orqali belgilanadi. Agar $|A| = 0$ bo'lsa, A matritsa **xos**, $|A| \neq 0$ holda esa **xosmas matritsa** deyiladi.

8°. $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ matritsaning satr va ustunlari almashtirib yozilsa, hosil bo'lgan yangi matritsa

$$A^t = (a_{ji}), j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$$

A matritsani **transponirlash** natijasida olingan matritsa deyiladi.

9°. Kvadrat matritsa uchun uning natural darajalarini aniqlash mumkin: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, ..., $A^n = A^{n-1} \cdot A, ...$

Qulaylik uchun $A^0 = I$ deb hisoblaymiz.

10°. Agar kvadrat matritsa $A = A^t$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni $a_{ij} = a_{ji}$ bo'lsa, A **simmetrik matritsa** deyiladi.

Matritsalar uchun kiritilgan amallar ushbu xossalarga ega:

I) $A + B = B + A$;

II) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

III) $A + O = A$;

IV) $k \cdot A = A \cdot k$;

V) $k(A + B) = kA + kB$;

VI) $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$;

VII) $A(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

VIII) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

IX) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

X) $A \cdot O = O \cdot A = O$;

XI) $A \cdot I = I \cdot A = A$;

XII) $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;

XIII) $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;

XIV) $(A^t)^t = A$;

XV) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

XVI) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$;

XVII) $\det A = \det A^t$;

XVIII) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Ta'rif. A va B bir xil tartibdagi kvadrat matritsalar bo‘lib, $AB = BA = I$ shart bajarilsa, B matritsa A matritsaga **teskari matritsa** deyiladi va $B = A^{-1}$ ko‘rinishda yoziladi.

Aytaylik, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin va

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & ... & \dots \\ \dots & \dots & ... & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

shu matritsa elementlaridan tuzilgan determinant bo‘lsin. Biz avval, M_{ij} minor va $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ algebraik to‘ldiruvchi tushunchalarini kiritib ularning ushbu xossalarini ko‘rgan edik:

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \triangle$ (determinantni i-satr bo‘yicha yoyish)

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \triangle$ (determinantni j-ustun bo‘yicha yoyish)

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} = A_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$ (algebraik to‘ldiruvchilar o‘zga satr yoki ustun bo‘yicha olingan yig‘indi nolga teng).

Endi A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilardan tuzilgan

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsani transponirlab, $\widetilde{A}^t$ matritsani A matritsaga o‘ngdan va chapdan ko‘paytiraylik:

$$A \cdot \widehat{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}A_{ni} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}A_{ni} \end{pmatrix}.$$

Yuqoridagi algebraik to‘ldiruvchilarning xossalarini e’tiborga olsak

$$A \cdot \widetilde{A}^t = \widetilde{A}^t \cdot A = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \triangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \triangle & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \triangle \end{pmatrix}$$

natijaga kelamiz. Bu yerda ko‘paytma diagonal matritsa bo‘lib, diagonalda faqat $\triangle = |A| = \det A$ joylashgan. Demak, $\triangle \neq 0$ holda

$$\frac{1}{\triangle} \cdot A \cdot \widetilde{A}^t = \frac{1}{\triangle} \cdot \widetilde{A}^t \cdot A = I$$

tenglik o‘rinli bo‘lib, A matritsaning teskarisi mavjud va

$$A^{-1} = \frac{1}{\triangle} \cdot \widetilde{A}^t = \frac{1}{detA} \cdot \widetilde{A}^t$$

formuladan teskari matritsa topiladi.

Agar $\det A = 0$ bo‘lsa, $\det AB = \det A \cdot \det B$ va $\det I = 1$ tengliklardan

$$1 = \det I = \det A \cdot A^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = 0$$

ziddiyatga kelamiz, ya’ni $\det A = 0$ holda teskari matritsa A^{-1} mavjud emas.

Misol uchun:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani topaylik. Bu holda

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Demak,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsalarning xossalari:

1°. $(A^{-1})^{-1}$;

2°. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3°. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;

4°. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

5°. $I^{-1} = I$.

Bu xossalarning isboti bevosita ta'riflaridan kelib chiqadi.

1. Matritsaning rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi.

Biror

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo‘lsin. m va n sonlarning har biridan katta bo‘lmagan biror k son olib, demak $k \le \min\{m, n\}$, A matritsaning ixtiyoriy k ta satri va k ta ustunlarini ajratib olib, ularning kesishishlarida joylashgan k^2 ta sonlardan tuzilgan determinant A matritsaning ***k*-tartibli minori** deyiladi. Umuman aytganda k-tartibli minorlar juda ko‘p bo‘lishi mumkin va ulardan ba'zilarining qiymati nolga teng, ba'zilari esa noldan farqli bo‘lishi mumkin, Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsaning barcha 4-tartbli minorlari nolga teng. Bundan tashqari

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lgani uchun, bu matritsaning barcha 3-tartibli minorlari ham nolga teng. Ammo, matritsaning noldan farqli 1-va 2-tartibli minorlari topiladi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Ta’rif. Agar matritsaning noldan farqli k-tartibli birorta minori mavjud bo‘lib, k dan yuqori tartibli barcha minorlari nolga teng bo‘lsa, bu matritsaning **rangi k ga teng** deyiladi.

Matritsaning rangini $rg(A)$ orqali belgilaylik. Demak, $n \times n$ kvadrat matritsaning rangi $\det A \neq 0$ bo‘lgan holda $rg(A) = n$ va $\det A = 0$ holda esa $rg(A) < n$ bo‘lar ekan. Diagonal matritsaning hamda uchburchak matritsaning rangi diagonaldagi noldan farqli elementlar soniga teng (tekshirib ko‘ring). Demak, berilgan matritsani rangini hisoblash uchun uning rangini o‘zgartirmaydigan almashtirishlar yordamida uchburchak ko‘rinishga keltiraolsak, rangi oson hisoblanadi. Qanday almashtirishlarda matritsa rangi o‘zgarmaydi? Rang determinantlar orqali aniqlangani uchun determinantning absolyut qiymatini o‘zgartirmaydigan almashtirishlar matritsaning rangini ham o‘zgartirmaydi. Bunday almashtirishlar: ixtiyoriy ikkita satr (yoki ustun) o‘rnini almashtirish va biror satrni qandaydir songa ko‘paytirib ikkinchi satrga qo‘shish. Bu ikki almashtirish odatda elementar almashtirishlar deb ataladi. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

demak, $rg(A) = 3$, bu yerda $\backsim$ belgi elementar almashtirish natijasida yangi matritsaga o‘tish belgisi.

Matritsa rangining xossalari:

1°. $rg(A^t) = rg(A)$;

2°. $rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$;

3°. $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$.

Yana chiziqli tenglamalar sistemasiga

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

qaytib,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}; \;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_m \end{pmatrix}; B = (b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_n)$$

belgilashlar kiritaylik. Demak, A matritsaning o‘lchami $n \times m$, X ning o‘lchami $m \times 1$ va B ning o‘lchami $1 \times n$ bo‘lgan matritsalar. Ravshanki, yuqoridagi tenglamalar sistemasini

$$AX = B$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar A – kvadrat matritsa va $|A| \neq 0$ bo‘lsa, A^{-1} teskari matritsa mavjud. Demak, oxirgi tenglikni ikkala tomonini chapdan A^{-1} matritsaga ko‘paytirsak

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

va $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = IX = X$ ekanligini hisobga olib,

$$X = A^{-1}b,$$

ya'ni tenglamalar sistemasining yechimini hosil qilamiz. Endi A ixtiyoriy to'rtburchak shaklidagi matritsa bo'lsin.

Ushbu

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

matritsa chiziqli tenglamalar sistemasining **kengaytirilgan matritsasi** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi uchun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

va $rg(A) = 1$ hamda

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

va $rg(\overline{A}) = 2$. Bu misolga $rg(A) \neq rg(\overline{A})$ bo'lib, tenglamalr sistemasi yechimga ega emas, chunki sistemadagi 1- va 2-tenglamalar bir-biriga zid.

Ta'rif. Yechimga ega bo'lgan tenglamalar sistemasi **birgalikdagi sistema**, yechimi mavjud bo'lgan sistema esa **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan birinchi va uchinchisi birgalikdagi sistema, ikkinchisi esa birgalikda bo'lmagan sistema.

Kronker-Kapelli teoremasi. Tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun A matritsa va kengaytirilgan $\overline{A}$ matritsalarning rangi teng bo‘lishi zarur va yetarli, ya’ni $rg(A) = rg(\overline{A})$.

2. n-o‘lchamli arifmetik fazo

Biz yashayotgan fazo uch o‘lchamli bo‘lib, yuqorida ko‘rganimizdek, uning nuqtalarini koordinatalar sistemasi orqali tartiblangan uchta son yordamida bir qiymatli aniqlashimiz mumkin.

Matematikaning aksariyat masalalarida tartiblangan n ta sonli $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ qandaydir fazoning nuqtasi sifatida qabul qilish birmuncha qulayliklarga olib keladi va geometrik tushunchalarni kiritish imkonini beradi.

Ta’rif. Barcha tartiblangan $x = (x_1, x_2..., x_n)$ ko‘rinishdagi n ta sondan iborat ifodalar to‘plami n o‘lchamli **arifmetik (vektor) fazo** deyiladi va $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$ ko‘rinishda belgilanadi. $\mathbb{R}^n$ fazoning elementlari vektorlar, $x = (x_1, x_2..., x_n)$ yozuvda x_1 son $x \in \mathbb{R}^n$ vektorning 1-koordinatasi, x_2 son 2-koordinatasi va hokazo x_n son esa n-koordinatasi deyiladi.

$\mathbb{R}^n$ fazodagi vektorlar uchun qo‘shish va songa ko‘paytirish amallarini kiritish mumkin. Ikkita $x = (x_1, ..., x_n)$ va $y = (y_1, ..., y_n)$ vektorlarning yig‘indisi:

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

hamda $x = (x_1, ..., x_n)$ vektorni $\lambda \in \mathbb{R}$ songa ko‘paytmasi

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

tengliklar orqali kiritiladi. **Nol vektor** deb ushbu $0 = (0, 0, ..., 0)$ vektorga aytiladi. Ushbu $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ vektor $x = (x_1, x_2..., x_n)$ vektorga **qarama-qarshi vektor** deyiladi va $-x$ ko‘rinishda belgilanadi.

Kiritilgan amallar ushbu qonunlarga bo‘ysunadi:

1°. $x + y = y + x$;

2°. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3°. $x + 0 = x$;

4°. $x + (-x) = 0$;

5°. $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$;

6°. $1 \cdot x = x$;

7°. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

8°. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Bu qonunlar bajarilishi bevosita tekshiriladi. Keyinchalik biz ko‘rsatilgan 8 ta qonunga bo‘ysinuvchi qo‘shish va songa ko‘paytirish amali kiritilgan ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamni vektor fazo deb ataymiz. Bu 8 ta qonun amaliyotda keng tadbiqlarga ega bo‘lgan matematik nazariyaning poydevori bo‘lib xizmat qiladi. Demak, $\mathbb{R}^n$ fazo vektor fazoning xususiy holi ekan.

Endi $\mathbb{R}^n$ fazoda bir nechta vektorlar berilgan bo‘lsin. Ularni nomerlash uchun biz yuqori indekslardan foydalanamiz, chunki quyi indekslar vektorning koordinatalarini belgilash uchun band qilingan. Demak, $x_i^{(k)}$ son k-vektorning i-koordinatasi.

Shunday qilib, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazodan olingan. Ushbu

$$\lambda_1 \cdot x^{(1)} + \lambda_2 \cdot x^{(2)} + ... + \lambda_m x^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x^{(i)}$$

vektor $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlarning **chiziqli kombinatsyasi** deyiladi.

Albatta, barcha koeffitsiyentlar $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$ bo‘lsa, chiziqli kombinatsiya 0 vektor bo‘ladi. Ammo, chiziqli kombinatsiya 0 vektor ekanligidan, umuman aytganda, barcha koeffitsiyentlarning nolga teng bo‘lishi shart emas. Masalan, $x^{(1)} = (1, 0)$; $x^{(2)} = (0, 1)$; $x^{(3)} = (2, -3) \in \mathbb{R}^2$

vektorlar uchun:

$$2 \cdot x^{(1)} - 3 \cdot x^{(2)} - x^{(3)} = 0$$

ekanligini tekshirib ko‘rish qiyin emas, bu yerda $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -1$.

Ta’rif. Agar $x^{(1)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlarning $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)}$ chiziqli kombinatsiyasi nol vektor ekanligidan albatta $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$ tenglik kelib chiqsa, $x^{(1)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlar **chiziqli erkli**, aksincha kamida biri noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2 ..., \lambda_m$ sonlar topilib,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)} = 0$$

tenglik bajarilsa, $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ vektorlar **chiziqli bog‘liq** deyiladi.

Demak, yuqoridagi $x^{(1)} = (1, 0)$, $x^{(2)} = (0, 1)$, $x^{(3)} = (2, -3)$ vektorlar chiziqli bog‘liq ekan.

$x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlarning yoniga yana bir necha $x^{(m+1)}$, ..., $x^{(k)}$ vektorlarni yozish natijasida hosil bo‘lgan $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}, x^{(m+1)}, ..., x^{(k)}$ vektorlar $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ sistemani kengaytirish natijasida hosil bo‘lgan deyiladi. Bevosita ta’rifdan kelib chiqadiki, chiziqli erkli vektorlar sistemasining har qanday qismi yana chiziqli erkli bo‘ladi va chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasini kengaytirish natijasida hosil bo‘ladigan ixtiyoriy sistema yana chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Ta’rif. Agar $x^{(1)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lib, uni kengaytirish natijasida hosil bo‘ladigan ixtiyoriy sistema chiziqli bog‘liq bo‘lsa, $x^{(1)}$, ..., $x^{(m)}$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazoning **bazisi** deyiladi.

Masalan, $e^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e^{(n)} = (0, 0, ..., 0, 1)$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis bo‘ladi. Chunki,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot e^{(i)} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 0 = (0, 0, ..., 0)$$

tenglikdan $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ ekanligi, ya'ni $e^{(1)}$, ..., $e^{(n)}$ vektorlarning chiziqli erkli bo'lishi va ixtiyoriy $x = (x_1, ..., x_n)$ vektor olsak,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot e^{(i)} - x = 0$$

munosabat, ya'ni $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$, ..., $\lambda_n = x_n$, $\lambda_{n+1} = -1 \neq 0$ bo'lib, $x^{(1)}, ..., x^{(n)}, x$ sistemaning chiziqli bog'liq bo'lishi kelib chiqadi.

Umuman, $\mathbb{R}^n$ fazoda bazislar cheksiz ko'p. Masalan, $x^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0)$, $x^{(2)} = (1, 1, 0, ..., 0)$, $x^{(3)} = (1, 1, 1, 0, ..., 0)$, ..., $x^{(n)} = (1, 1, ..., 1)$ vektorlar ham $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Teorema. $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis vektorlarning soni aniq n ta bo'ladi.

Demak, sistemada vektorlar soni n tadan kam yoki ortiq bo'lsa bu vektorlar sistemasi bazis bo'lishi mumkin emas.

Albatta, har qanday n ta vektor bazis bo'lishi shart emas. (misol keltiring).

Teorema. $x^{(1)}, ..., x^{(n)} \in R^n$ vektorlar bazis bo'lishi uchun ularning koordinatalaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli.

$\lhd$ 1). $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis bo'lsin. U holda ixtiyoriy $y = (y_1, ..., y_n)$ vektorni yagona usulda $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida yozish mumkin. Haqiqatdan, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)}$ va $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i x^{(i)}$ deb faraz qilsak:

$$y - y = 0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x^{(i)}$$

tenglikdan $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ chiziqli erkli bo‘lgani uchun barcha $\lambda_i = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$ tenglik kelib chiqadi.

Endi $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)}$ tenglikni koordinatlar bo‘yicha yozib chiqsak,

$$\begin{cases} x_1^{(1)}\lambda_1 + x_1^{(2)}\lambda_2 + \cdots + x_1^{(n)}\lambda_n = y_1 \\ x_2^{(1)}\lambda_1 + x_2^{(2)}\lambda_2 + \cdots + x_2^{(n)}\lambda_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)}\lambda_1 + x_n^{(2)}\lambda_2 + \cdots + x_n^{(n)}\lambda_n = y_n \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasi (noma’lumlar $\lambda_1, ..., \lambda_n$) yagona yechimga ega bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $\Delta \neq 0$.

2) Aksincha $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, determinantning xossalariga ko‘ra, Δ determinantning ustunlaridan tuzilgan

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, ..., x_n^{(1)}), \ \ ..., \ \ x^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_n^{(n)})$$

vektorlar chiziqli erkli (aks holda $\Delta = 0$) va yana $\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun ixtiyoriy $y = (y_1, ..., y_n)$ vektor uchun (1) tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega. U holda $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(2)}$ tenglikdan $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vektorlarning $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis bo‘lishi kelib chiqadi.$\triangleright$

Yana $\mathbb{R}^{(n)}$ fazoga qaytib, unda $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ vektorlarni olib, ularning barcha chiziqli kombinatsiyalaridan iborat vektorlar to‘plamini

$$L = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)}, \ \lambda_i - \text{ ixtiyoriy sonlar} \right\}$$

ko‘rinishda belgilaylik.

Agar $x, y \in L$ va α ixtiyoriy son bo‘lsa, $x + y \in L$ va $\alpha x \in L$ ekanligi kelib chiqadi (tekshirib ko‘ring). Demak, L to‘plam ham o‘z navbatida vektor fazoni tashkil etadi va unda bazis mavjud. Bu holda L vektor fazo $\mathbb{R}^n$ vektor fazoning **qism vektor fazosi** va undagi bazisni tashkil etuvchi vektorlarning soni L qism vektor fazoning **o‘lchami** deyiladi. Bundan tashqari L qism vektorfazoning o'lchami $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ vektorlar sistemasining **rangi** deb ham ataladi.

Misol tariqasida

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlaridan
$x^{(1)} = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \in \mathbb{R}^n$, $x^{(2)} = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \in \mathbb{R}^n, ...,$
$x^{(m)} = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \in \mathbb{R}^n$
hamda ustunlaridan:
$y^{(1)} = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) \in \mathbb{R}^m$, $y^{(2)} = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) \in \mathbb{R}^m, ...,$
$y^{(n)} = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) \in \mathbb{R}^m$ tuzilgan vektorlar sistemasini ko'raylik.

Agar $L_1 = \left\{ x : x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x^{(i)}; \lambda_i - \text{ ixtiyoriy sonlar} \right\},$
$L_2 = \left\{ y : y = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i y^{(i)}; \mu_i - \text{ ixtiyoriy sonlar} \right\}$ belgilashlar kiritsak, $L_1 \subset \mathbb{R}^n$ – qism vektor fazo va $L_2 \subset \mathbb{R}^m$ qism vektor fazolarni hosil qilamiz.

Teorema. L_1 va L_2 vektor fazolarning o'lchamlari o'zaro teng va ular matritsaning rangiga teng.

Bu teoremani biz isbotsiz qabul qilamiz.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}^n$ va $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun

$$A(x + y) = Ax + Ay,$$
$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

shartlar bajarilsa, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ akslantirish **chiziqli** deyiladi.

Agar $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ chiziqli akslantirish bo'lsa, $L = \{x \in \mathbb{R}n : Ax = 0\}$ to'plam $\mathbb{R}^n$ fazoning vektor qism fazosi bo'ladi. Haqiqatdan, $x, y \in L$ va

$\lambda \in \mathbb{R}$ bo‘lsa, $Ax = 0, Ay = 0$, demak

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0,$$

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0,$$

ya’ni $x, y \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ekanligidan $x + y \in L$ va $\lambda x \in L$ kelib chiqadi, demak, $L \subset \mathbb{R}^n$ vektor qism fazo.

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ chiziqli akslantirish bo‘lsa, $M = \{Ax, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$ to‘plam A akslantirishning **qiymatlar sohasi** deyiladi. Ravshanki, chiziqli aksalantirishning qiymatlar sohasi ham $\mathbb{R}^m$ fazoda vektor qism fazoni tashkil etadi.

Chiziqli akslantirishning eng muhim xossasi: chiziqli akslantirishni bazisni tashkil etuvchi vektorlardagi qiymatlari bo‘yicha butun fazodagi qiymatlarini yagona usulda aniqlash mumkin. Chunki $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ vektorlar $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis, va ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor bazis vektorlar bo‘yicha yoyilgan bo‘lsa,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)},$$

u holda

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Ax^{(i)}$$

tenglik o‘rinli.

Chiziqli akslantirishning umumiy ko‘rinishini topish uchun $\mathbb{R}^n$ fazoda $e^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0), ..., e^{(n)} = (0, 0, ..., 0, 1)$ kanonik bazisni va $\mathbb{R}^m$ fazoda $f^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0), ..., f^{(m)} = 0, 0, ..., 0, 1$ kanonik bazisni tanlab olaylik.

Ravshanki, $Ae^{(1)} \in \mathbb{R}^m$, demak, $Ae^{(1)}$ vektorni $f^{(1)}, ..., f^{(m)}$ bazis vektorlar bo‘yicha yoyish mumkin:

$$Ae^{(1)} = a_{11} f^{(1)} + a_{12} f^2 + ... + a_{1m} f^{(m)}.$$

Xuddi shunday, $Ae^{(2)}, ..., Ae^{(n)}$ vektorlarni ham $f^{(1)}, ..., f^m$ bazis vektorlar bo‘yicha yoyilmasi mavjud:

$$Ae^{(2)} = a_{21}f^{(1)} + a_{22}f^{(2)} + ... + a_{2m}f^{(m)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Ae^{(n)} = a_{n1}f^{(1)} + a_{n2}f^{(2)} + ... + a_{nm}f^{(m)}$$

Endi $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ bo‘lsin. U holda $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}$ bo‘lib,

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} Ae^{(i)} \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}f^{(k)}x_i$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar Ax ni koordinatalari bo‘yicha yozsak,

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i\right)$$

bizga tanish bo‘lgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsani $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorga ko‘paytirish amali kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ chiziqli akslantirishlar bilan $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ matritsalar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin. Ya’ni chiziqli akslantirishni matritsa ko‘rinishda yozish mumkin.

Yana chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qaytaylik.

$Ax = b, A : R^n \to \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m$ tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. U holda $Ax = 0$ tenglamalar sistemasi berilgan sistemaga mos bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Yuqorida ko‘rganimizdek bir jinsli $Ax = 0$ tenglamalar sistemasining barcha yechimlari $\mathbb{R}^n$ fazoda vektor qism fazoni tashkil etadi. Bu vektor qism fazoning bazis vektorlari, masalan, $x^{(1)}, ..., x^{(k)}$ bir jinsli tenglamaning bazis yechimlari deyiladi. Demak, bir jinsli tenglamaning ixtiyoriy yechimi:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^{(i)}, \quad \lambda_i - \text{ ixtiyoriy sonlar}$$

ko‘rinishga ega.

Endi biror $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vektor $Ax = b$ tenglamaning qandaydir yechimi bo‘lsin. U holda $x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x^{(i)}$ vektor ham shu tenglamani yechimi, chunki:

$$A\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)}\right) = Ax_0 + A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{(i)}\right) = Ax_0 = b.$$

Demak, bir jinsli bo‘lmagan tenglamani barcha yechimlarini topish uchun uning birorta xususiy yechimini topish va unga bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini qo‘shish kifoya.

Misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini barcha yechimlarini toping.

$\lhd$ Berilgan sistemaga mos keluvchi bir jinsli sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘lib, uning umumiy yechimi $(\lambda, 0, -\lambda)$ ko‘rinishdagi vektorlar bo‘ladi va ular bir o‘lchamli vektor qism fazoni tashkil etadi. Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning xususiy yechimi sifatida $(2; -1; 3)$ vektorni ko‘rsatish mumkin (tekshirib ko‘ring). Demak, berilgan tenglamaning barcha yechimlari:

$$(2+\lambda, -1, 3-\lambda), \ \ \lambda - \text{ ixtiyoriy son}$$

ko‘rinishdagi vektorlardan iborat ekan.

Chiziqli akslantirishning eng muhim xususiy holi $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ya’ni $n = m$ holidir.

Agar biror $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun $Ax = \lambda x, x \neq 0$ vektor mavjud bo‘lsa, λ son $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ akslantirishning (matritsaning) **xos soni**, x vektor esa **xos vektori** deyiladi.

Endi **birlik chiziqli akslantirish** (birlik matritsa) deb ataluvchi va barcha $x \in \mathbb{R}^n$ uchun $Ix = x$ tenglik bilan aniqlanuvchi akslantirishni kiritib,

$$Ax = \lambda x$$

tenglikni

$$(A - \lambda I)x = 0$$

ko‘rinishda yozamiz.

Oxirgi tenglik bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘lib, bu sistema noldan farqli yechimga $x \neq 0$ ega bo‘lishi uchun

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Ravshnki oxirgi tenglikni

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishda yozib, determinantni yoysak, λ noma’lumga nisbatan n-darajali algebraik tenglama hosil bo‘ladi.

Demak, $A : R^n \to R^n$ chiziqli akslantirishning barcha xos sonlari $\det(A - \lambda I) = 0$ tenglamadan, so‘ngra ularga mos keluvchi xos vektorlar $(A - \lambda I)x = 0$ bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasidan topiladi.

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ matritsa bilan aniqlangan $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ chiziqli akslantirishning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

$\lhd$ Ravshanki,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

bo‘lib, $\det(A - \lambda I) = 0$ tenglama:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 7\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 7\lambda = 0$$

ko‘rinishda bo‘lib, $\lambda_1 = 0$ va $\lambda_2 = 7$ ildizlarga ega. Demak, $\lambda_1 = 0$ va $\lambda_2 = 7$ xos sonlar.

Endi $\lambda_1 = 0$ xos songa mos keluvchi xos vektorlar:

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

ya’ni $Ax = 0$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x = (2\alpha, -\alpha)$, $\alpha \neq 0$ ko‘rinishda ekanligi kelib chiqadi.

Agar $\lambda_2 = 7$ xos sonni olsak,

$$(A - 7 \cdot I)x = 0,$$

ya’ni

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x = (\beta, 3\beta)$, $\beta \neq 0$ xos vektorlarni hosil qilamiz.

Umumiy holda matritsaning xos son va xos vektorlarini topish bir muncha murakkab masala bo‘lib, ularni aniqlash uchun qator algoritmlar mavjud.

Yana shuni ta’kidlash lozimki, haqiqiy sonlar to‘plamida xos sonlar albatta mavjud bo‘lishi shart emas. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ chiziqli akslantirish uchun $\det(A - \lambda I) = 0$ tenglama $\lambda^2 + 1 = 0$ ko‘rinishga keladi, ammo bu tenglama haqiqiy yechimga ega emas.

Ammo bir xususiy holda xos sonlar muammosi nisbatan oson hal etiladi.

Ta’rif. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kvadrat matritsa, A^t esa transponirlangan matritsa bo‘lsin. Agar $A = A^t$ shart bajarilsa, A **simmetrik matritsa** deyiladi.

Shunday qilib, $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ matritsa simmetrik bo‘lishi uchun $a_{ij} = a_{ji}$ shart bajarilishi zarur.

Biz, avval $\mathbb{R}^3$ fazodagi vektorlar uchun skalyar ko‘paytma tushunchasini kiritgan edik. Skalyar ko‘paytma tushunchasini $\mathbb{R}^n$ fazodagi $(n > 3)$ vektorlar uchun ham kiritish mumkin.

Ta’rif.

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

va $(y_1, ..., y_n)$ vektorlarning **skalyar ko‘paytmasi** deb

$$(x; y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Skalyar ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1°. $(x^{(1)} + x^{(2)}; y) = (x^{(1)}; y) + (x^{(2)}; y)$;

2°. $(\lambda x; y) = \lambda \cdot (x; y)$;

3°. $(x; y) = (y; x)$;

4°. $(x, y) \geq 0$ va $(x; x) = 0$ faqat $x = 0$ bo'lgandagina.

Skalyar ko'raytmasi nolga teng x va y vektorlar o'zaro **ortogonal vektorlar** deyiladi va $x \perp y$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrik matritsa bo'lsa, ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorlar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik o'rinli. Haqiqatdan,

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \cdot y_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum \quad a_{ji} y_i \right) \cdot x_j = (Ay, x) = (x, Ay).$$

Teorema. Simmetrik matritsaning barcha xos sonlari haqiqiy; turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlari o'zaro ortogonal.

Natija. Ixtiyoriy simmetrik matritsani elementar almashtirishlar orqali diagonal matritsa ko'rinishiga keltirish mumkin. Bu holda matritsa diagonalidagi sonlar xos sonlardan iborat.

II bob. Matematik analizning dastlabki tushunchalari

1-§. Sonli ketma-ketliklar

Ta'rif. Barcha natural sonlar yordamida nomerlanib chiqqan $x_1, x_2, ...$ sonlardan iborat ifoda **sonli ketma-ketlik** deyiladi va $\{x_1; x_2; ...\}$ yoki qisqacha $\{x_n\}$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan:

$$\{x_n\} = \{1; 2; 3; ...\};$$
$$\{y_n\} = \{0; 1; 0; 1; 0; 1; ...\};$$
$$\{z_n\} = \{0; 0; 0; 0; 0; ...\};$$
$$\{u_n\} = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...\}.$$

Odatda x_1 son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning 1-hadi, x_2 son shu ketma-ketlikning 2-hadi va hokazo deyiladi. Ba'zan ketma-ketlikning n-hadi biror formula orqali ifodalanishi mumkin. Masalan, $x_n = \dfrac{n-1}{n}$; $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; $z_n = \sqrt{n+2}$; $a_n = a_1 + (n-1)d$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Ketma-ketliklar uchun arifmetik amallarni hadma-had kiritish mumkin:

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...\};$$
$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots\};$$
$$\alpha \cdot \{x_n\} = \{\alpha \cdot x_n\} = \{\alpha x_1, \alpha x_2, ...\}, \alpha \in R;$$
$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 y_1, x_2 y_2, ...\};$$
$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ...\right\},$$

bu yerda barcha $n \in \mathbb{N}$ uchun $y_n \neq 0$.

Ketma-ketlik, umuman aytganda cheksizta sonlardan iborat bo‘lgani uchun ularni o‘rganishda yangi tushunchalar hosil bo‘ladi.

Ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari biror M sondan katta bo‘lmasa:

$$x_n \leq M, \;\; n = 1, 2, ...,$$

ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan** deyiladi.

Aksincha, x_n ketma-ketlikning barcha hadlari biror m sondan kichik bo‘lmasa:

$$x_n \geq m, \;\; n = 1, 2, ...$$

ketma-ketlik **quyidan chegaralangan** deyiladi.

Ketma-ketlikning barcha hadlari

$$|x_n| \leq c, \;\; n = 1, 2, ...$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

Ravshanki, $|x_n| \leq c$ tengsizlik

$$-c \leq x_n \leq c, \, n = 1, 2, ...$$

tengsizlikka teng kuchli, demak, chegaralangan ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajarilmaydigan birorta x_n topilsa, $\{x_n\}$ – **chegaralanmagan** ketma-ketlik deyiladi.

Ta’rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$$

shartni qanoatlantirsa, ketma-ketlik **monoton o‘suvchi**, aksincha

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ...$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, **monoton kamayuvchi** deyiladi.

Masalan,

1) $\{x_n\} = \{1; 2; 3, ...\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi, quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan,

2) $\{y_n\} = \{0; 1; 0; 1; 0; 1; ...\}$ ketma-ketlik yuqoridan hamda quyidan chegaralangan, monoton o‘suvchi ham, kamayuvchi ham emas.

3) $\{z_n\} = \{0, 0, 0, ...\}$ ketma-ketlik chegaralangan, o‘suvchi hamda kamayuvchi, chunki ta’rifdagi ikkala tengsizliklar ham o‘rinli.

Ushbu $\{x_n\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...\right\}$ ketma-ketlikka e’tibor beraylik. Uning hadlari 11 chi haddan boshlab barchasi 0,1 sondan kichik, 101 chi haddan boshlab barchasi 0,01 sondan kichik, umuman, qanday musbat son olmaylik, ketma-ketlikning barcha hadlari biror nomerdan boshlab, olingan musbat sondan kichik bo‘ladi. Bunday xossaga ega bo‘lgan ketma-ketliklar biz uchun muhim bo‘lib, ularni ushbu ta’rif orqali ajratib olamiz.

Ta’rif. Ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ natural son topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu nomerli hadidan boshlab, ya’ni $x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...$ hadlari uchun

$$|x_n| < \varepsilon,\ \ n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, ...$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **cheksiz kichik ketma-ketlik** deyiladi va 0 sonni shu ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi hamda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

ko‘rinishda yoziladi.

Misollar: 1) $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; 2) $\{y_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$; 3) $\{z_n\} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$; 4) $\{u_n\} = \left\{\dfrac{1}{\lg(n+1)}\right\}$; 5) $\{\nu_n\} = \left\{\dfrac{-3}{n^2 + 5_n + 13}\right\}$.

Keltirilgan misollardagi ketma-ketliklar umumiy hadi kasr ko‘rinishida bo‘lib, suratlari chegaralangan, mahrajlari esa noldan farqli va chegaralanmagan o‘suvchi ketma-ketliklarni tashkil etadi.

Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari

1°. $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, $\{|x_n|\}$ va $\{c \cdot x_n\}$ ketma-ketliklar ham cheksiz kichik.

$\lhd$ $\{|x_n|\}$ uchun isbot ta’rifidan kelib chiqadi.

Agar $c = 0$ bo‘lsa, $\{0 \cdot x_n\} = \{0, 0, ...\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik. Agar $c \neq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olib, ta’rifni $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$ son uchun qo‘llaymiz (e’tibor bering: ta’rifda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy). Demak, biror n_0 nomerdan boshlab

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad n = n_0, n_0 + 1, ...,$$

ya’ni shu nomerdan boshlab

$$|cx_n| = |c| \cdot |x_n| < \varepsilon, \quad n = n_0, n_0 + 1, ...$$

tengsizliklar o‘rinli. Demak, $\{cx_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik.$\rhd$

2°. Agar $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, uning cheklita hadlarini o‘rnini almashtirish, chiqarib tashlash, yoki qo‘shib yozish natijasida hosil bo‘lgan yangi ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo‘ladi.

3°. Cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan.

$\lhd$ Agar $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, uning barcha hadlari uchun:

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|, \varepsilon\}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi ta’rifdan kelib chiqadi.$\rhd$

4°. Bir nechta (cheklita) cheksiz kichik ketma-ketliklar yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik.

$\lhd$ $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra $\dfrac{\varepsilon}{2}$ son uchun shunday n_0' va n_0'' sonlar topiladiki:

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ n = n_0', n_0' + 1, ...,$$

$$|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}, n = n_0'', n_0'' + 1, ...$$

tengsizliklar o‘rinli. Agar $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ deb olsak, shu n_0 nomerdan boshlab ikkala tengsizliklar baravariga bajariladi.

Demak,

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \ n = n_0, \ n_0 + 1, ...$$

tengsizliklardan $\{x_n + y_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.$\rhd$

Qo‘shiluvchilar soni ikkitadan ko‘p bo‘lsa, shu mulohazani yana takrorlaymiz.

5°. $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, va $|y_n| \leq |x_n|, n = 1, 2, 3...$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, $\{y_n\}$ ham cheksiz kichik ketma-ketlik.

$\lhd$ $|y_n| \leq |x_n| < \varepsilon, n = n_0, n_0 + 1$,tengsizlik va ta’rifdan kelib chiqadi.$\rhd$

Natija. $\{x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik, $\{y_n\}$ esa chegaralangan ketma-ketlik bo‘lsa, $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

Haqiqatdan, $|y_n| \leq c, n = 1, 2, ...$ bo‘lsa,

$$|x_n \cdot y_n| \leq c \cdot |x_n|$$

tengsizlik o‘rinli va 1° xossaga ko‘ra $\{x_n \cdot y_n\}$ cheksiz kichik.

Endi $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ biror natural sonlar ketma-ketligi bo‘lsin. U holda $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$ ketma-ketlikning **qismiy ketma-ketligi** deyiladi.

Ravshanki, cheksiz kichik ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-ketligi ham yana cheksiz kichik bo‘ladi.

Aytaylik, $\{x_n\}$ biror ketma-ketlik va $a \in \mathbb{R}$ ixtiyoriy son bo‘lsin. U holda $\{x_n - a\} = \{x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, ...\}$ belgilash kiritamiz.

Ta’rif. Agar biror $a \in \mathbb{R}$ son uchun $\{x_n - a\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsa, $\{x_n\}$ **yaqinlashuvchi**, aniqrog‘i a **songa yaqinlashuvchi** deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \to a, \ \ n \to \infty$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deyiladi.

Misol. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{3n-5}{4n+7}\right\}$ bo‘lsin. U holda

$$\frac{3n-5}{4n+7} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{n - \frac{5}{3}}{n + \frac{7}{4}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} - \frac{5}{3}}{n + \frac{7}{4}}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{\frac{41}{12}}{n + \frac{7}{4}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\frac{41}{4}}{4n+7}.$$

Demak,

$$\left\{x_n - \frac{3}{4}\right\} = \left\{\frac{-\frac{41}{4}}{4n+7}\right\}$$

ketma-ketlik cheksiz kichik, chunki surati chegarlangan, mahraji esa monoton o‘suvchi va chegaralanmagan.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

1°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagona.

$\lhd$ Faraz qilaylik, $x_n \to a, x_n \to b$ bo‘lsin. U holda $\{x_n - a\}$ va $\{x_n - b\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik bo‘lib, ularning ayirmasi $\{b - a\} = \{b - a, b - a, ...\}$ ham cheksiz kichik ketma-ketlik. Bu esa faqat $a = b$ holdagina o‘rinli.$\rhd$

2°. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning yig‘indisi ham yaqinlashuvchi.

$\lhd$ $x_n \to a$, $y_n \to b$ bo‘lsa, $\{x_n - a\}$ va $\{y_n - b\}$ cheksiz kichik, demak, ularning yig‘indisi ham cheksiz kichik:

$$\{x_n + y_n - (a + b)\}.$$

Demak, $x_n + y_n \to a + b$.$\rhd$

Natija. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

$\lhd$ $x_n \to a$ bo‘lsin. U holda $\{x_n - a\}$ cheksiz va, demak, chegaralangan:

$$|x_n - a| \le c, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

U holda:

$$|x_n| = |a + x_n - a| \le |a| + |x_n - a| \le |a| + c, \;\; n = 1, 2, ...,$$

ya’ni $\{x_n\}$ chegaralangan.$\rhd$

4°. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ko‘paytmasi ham yaqinlashuvchi.

$\lhd$ $x_n \to a$; $y_n \to b$ bo‘lsin. Demak, $\{x_n - a\}$, $\{y_n - b\}$ cheksiz kichik va demak chegaralangan. U holda

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = x_n y_n - y_n \cdot a + y_n \cdot a - ab = (x_n - a) \cdot y_n + a(y_n - b)$$

tengliklardan $\{(x_n - a) \cdot y_n\}$ va $\{a \cdot (y_n - b)\}$ ketma-ketliklar cheksiz kichik ekanligi kelib chiqadi. Demak, $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.$\rhd$

Natija. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n.$

5°. Agar $y_n \to b$, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, ..., b \neq 0$ va $x_n \to a$ bo‘lsa, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va limiti $\dfrac{a}{b}$ songa teng.

$\lhd$ $y_n \neq 0, b \neq 0 \quad y_n \to b$ shartlardan, shunday $m > 0$ son mavjudligi kelib, chiqadiki, $|y_n| \geq m$ (tekshirib ko‘ring). U holda

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| = \frac{|x_n \cdot b - y_n a|}{|y_n \cdot b|} = \frac{|x_n \cdot b - x_n y_n + x_n y_n - y_n \cdot a|}{|y_n| \cdot |b|} \leq$$

$$\leq \frac{|x_n(b - y_n) + y_n(x_n - a)|}{m \cdot |b|},$$

oxirgi kasr surati cheksiz kichik ketma-ketlik, mahraji esa n ga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas son.$\rhd$

Natija. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$

Misol.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 5n - 7}{3n^2 - 4n + 13} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^2}}{3 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{13}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{13}{n^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

6°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi va ularning limitlari teng.

Isboti bevosita ta’rif va xossalardan kelib chiqadi.

Umumiy holda ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshirish qiyin masala. Ammo ba’zi xususiy hollarda limitning mavjudligiga kafolat berish mumkin.

Teorema. Monoton o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi.

$\lhd$ $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan bo‘lgani uchun chekli $\sup\{x_n\} = a$ mavjud.

Ixtiyoriy musbat $\varepsilon > 0$ son uchun $(a - \varepsilon, a)$ intervalda supremumning ta'rifiga ko‘ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadi, aytaylik,
$x_{n_0} \in (a - \varepsilon, a)$ yotadi. Ketma-ketlik monoton o‘suvchi bo‘lgani uchun, shu nomerdan boshlab, ketma-ketlikning barcha hadlari ham $(a - \varepsilon, a)$ intervalda joylashgan, ya'ni:

$$|a - x_n| < \varepsilon, n = n_0, \quad n_0 + 1, ...$$

Demak, $a - x_n$ cheksiz kichik ketma-ketlik. U holda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Natija. Monoton kamayuvchi va quyidagi chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi.

$\lhd$ $\{x_n\}$ monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo‘lsa, $\{-x_n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak,$\{-x_n\}$ yaqinlashuvchi, u holda $\{x_n\}$ ham yaqinlashuvchi.$\rhd$

Misol. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, ketma-ketlikni ko‘raylik. Kalkulyatorda uning birnecha hadlarini (taqribiy) hisoblasak: $x_1 = 2$; $x_2 = 2,25$; $x_3 = 2,37$; $x_4 = 2,44$; $x_5 = 2,49, ..., x_{10} = 2,59, ..., x_{20} = 2,65; ..., x_{100} = 2,705; ...;$ $x_{1000} = 2,717; ...$ ketma-ketlikning hadlari monoton o‘sib borishini va yuqoridan chegaralangan ekanligini sezishimiz mumkin. Albatta, buni matematik isbot qilish mumkin.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ limit mavjud va uning qiymati:

$$e = 2,7182818284590...$$

soniga teng.

Misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{3n-5}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{4(3n-5)}{2n-1}}=e^6,$$

bu yerda biz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{4}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4}}=e$$

va

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4(3n-5)}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-20}{2n-1}=6$$

tengliklardan foydalandik.

Agar $\{x_n-a\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladigan a son mavjud bo‘lmasa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yaqinlashuvchi emas** deyiladi.

Masalan, $\{x_n\}=\{1,2,3,...\}$, $\{y_n\}=\{1;-1;-1;-1\}$,

$\{z_n\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi emas.

Ta’rif. Ixtiyoriy $M>0$ son uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $x_{n_0},x_{n_0+1},...$ hadlari uchun

$$x_n>M,\quad n=n_0,\ n_0+1,...$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ifodaga teng deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

ko‘rinishda yoziladi. Aksincha, $x_{n_0},x_{n_0+1}...$ hadlar uchun

$$x_n<-M,\quad n=n_0,\ n_0+1,...$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $-\infty$ ifodaga teng deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

ko'rinishda yoziladi. Nihoyat, $x_{n_0}, x_{n_0+1}, ...$ hadlari uchun

$$|x_n| > M, \quad n = n_0,\ n_0+1, ...$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ∞ ifodaga teng deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

shaklda yoziladi.

Masalan,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+5}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n+1+\dfrac{3}{n+2}\right) = +\infty;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3\sin n - 5n) = -\infty;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(5+(-1)^n\sqrt{n}) = \infty.$

Teorema (Boltsano-Veyershtrass teoremasi). Chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

2-§. Funksiyaning limiti

1-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x-a| < \delta$ tengsizliklarini qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizligi bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \to a$ dagi) **limiti** deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Agar x argument a dan katta (kichik) bo'lib, a ga yaqinlashganda $f(x)$ hamma vaqt yagona b songa intilsa, shu b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi **o'ng** (**chap**) **limiti** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a, x>a} f(x) = b,$$

$$\left(f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a, x<a} f(x) = b \right).$$

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0)$$

funksiyaning $a = 0$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari topilsin.

$\lhd$ Nolga yaqinlashuvchi

$$x_n' \to 0 \quad (x_n' > 0,\ n = 1, 2, ..),$$

$$x_n'' \to 0 \quad (x_n'' < 0,\ n = 1, 2, ..)$$

ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{|x_n'|}{x_n'} = \frac{x_n'}{x_n'} = 1 \to 1,$$

$$f(x_n'') = \frac{|x_n''|}{x_n''} = \frac{-x_n''}{x_n''} = -1 \to -1$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiyaning $a = 0$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = 1,$$

chap limiti

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = -1$$

bo'ladi.$\rhd$

3-ta'rif. Agar X to'plam nuqtalaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta (musbat cheksiz katta, manfiy cheksiz katta) $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b ga yaqinlashsa, shu b sonni $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ ($x \to +\infty$, $x \to -\infty$) dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$$

kabi belgilanadi.

1^o. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

1) Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi;

2) agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

bo'lsa, u holda a nuqtaning yetarlicha kichik atrofiga tegishli x ning qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi;

3) agar $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari chekli limitga ega bo'lib, a ning yetarlicha kichik atrofiga tegishli x larda

$$f(x) \leq g(x)$$

bo'lsa,

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

bo'ladi;

4) agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$$

(b chekli son) bo'lib, a nuqtaning yetarlicha kichik atrofiga tegishli x larda

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ da $\varphi(x)$ funksiyaning limiti mavjud va

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$$

bo‘ladi;

5) agar

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

limitlar mavjud va chekli bo‘lsa, u holda

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},\ (g(x)\neq 0)$$

funksiyalarning ham limitlari mavjud va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0)$$

bo‘ladi.

2^o. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar. Funksiyalarni taqqoslash

Agar

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$$

bo‘lsa, u holda $x\to a$ da $\alpha(x)$ **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Masalan, $x\to a$ da $\alpha(x) = (x-a)^2$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x\to a}(x-a)^2 = \lim_{x\to a}(x^2-2ax+a^2) = a^2-2a^2+a^2 = 0.$$

Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ bo‘lsin. U holda

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

funksiya cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

$\lhd$ Haqiqatdan ham,

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}[f(x)-b] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = 0. \rhd$$

Bundan

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

bo‘lishi kelib chiqadi, bu yerda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya.

Agar

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$$

bo‘lsa, u holda $x \to a$ da $\beta(x)$ **cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Faraz qilaylik, $x \to a$ da $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin:

$$\lim_{x \to a} \alpha_1(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \alpha_2(x) = 0$$

Bu funksiyalar nisbati

$$\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}$$

ni qaraymiz.

Agar

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$$

bo‘lsa, u holda $x \to a$ da $\alpha_1(x)$ funksiya $\alpha_2(x)$ **ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya** deyiladi. Bu holda

$$\alpha_1(x) = o(\alpha_2(x))$$

kabi yoziladi va “$\alpha_1(x)$ barobar kichkina o $\alpha_2(x)$” deb o‘qiladi.

Masalan, $x \to 0$ da $x^2 = o(x)$ bo‘ladi.

Agar

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = c \neq 0$$

bo‘lsa, u holda $x \to a$ da $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ funksiyalar **bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar** deyiladi.

Masalan, $x \to 0$ da $\alpha_1(x) = 2x^2 + x^4$ va $\alpha_2(x) = x^2$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x^4}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2 + x^2) = 2.$$

Agar

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ da $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ lar **ekvivalent funksiyalar** deyiladi va

$$\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $x\to 0$ da $\alpha_1(x)=x^3+5x^4$, $\alpha_2(x)=x^3$ funksiyalar ekvivalent funksiyalar bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x^4}{x^3}=\lim_{x\to 0}(1+5x)=1.$$

Ekvivalentlik tushunchasi quyidagi xossalarga ega:

1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$,

2) $\alpha(x)\sim\beta(x)\Rightarrow\ \beta(x)\sim\alpha(x)$,

3) $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)\Rightarrow\ \alpha(x)\sim\gamma(x)$.

3^o. Ajoyib limitlar. Misollar

Amaliy masalalarni yechishda ko'p foydalaniladigan ajoyib limitlar deb ataluvchi formulalarni keltiramiz.

1. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{3}$$

munosabat o'rinli.

$\lhd$ Ma'lumki, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ da

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x$$

bo'ladi. Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini $\sin x$ ga bo'lib

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

va undan

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \tag{$*$}$$

bo‘lishini topamiz.

Agar

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

bo‘lishi e’tiborga olinsa, unda $(*)$ munosabatdan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. $\rhd$

2. Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \tag{4}$$

munosabat o‘rinli.

(4) munosabat ushbu

$$\frac{1}{x} = y \quad (x\to\infty \text{ da } y\to 0)$$

almashtirish natijasida

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \tag{4$'$}$$

ko‘rinishga keladi.

3. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{5}$$

munosabat o‘rinli.

$\lhd$ Logarifmning xossasidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Agar

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

bo‘lishini e’tiborga olinsa, unda $(4')$ formulaga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1$$

bo‘ladi. $\rhd$

4. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \ (a>0,\ a\neq 1) \tag{6}$$

munosabat o‘rinli.

◁ Quyidagi

$$a^x-1=t$$

almashtirishni bajaramiz. Unda $x\to 0$ da $t\to 0$ bo‘lib,

$$x=\log_a(1+t)$$

bo‘ladi. Natijada

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

bo‘ladi. ▷

Misollar. 1. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◁ Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.▷$$

2. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$$

limit hisoblansin.

$\triangleleft$ Ravshanki,

$$(1+5x)^{\frac{1}{x}} = (1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} = [(1+5x)^{\frac{1}{5x}}]^5$$

Unda

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}]^5 = e^5$$

bo'ladi. $\triangleright$

3. Ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

limit hisoblansin.

$\triangleleft$ Quyidagi

$$t = x-1$$

almashtirishni bajaramiz. Unda $x\to 1$ da $t\to 0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

bo'ladi.$\triangleright$

3-§. Funksiyaning uzluksizligi

1°. Funksiya uzluksizligi ta'riflari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X ($X\subset\mathbb{R}$) to'plamda berilgan, $a\in X$ va a nuqtaning ixtiyoriy $\varepsilon>0$ atrofida X to'plamning a dan farqli nuqtalari bo'lsin.

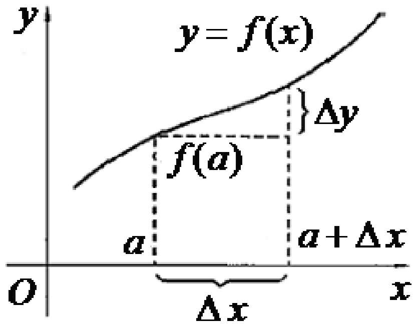
Faraz qilaylik, $a+\Delta x$ nuqta ham ($\Delta x \gtrless 0$) X to'plamga tegishli bo'lsin. Odatda, Δx ni argument orttirmasi deyiladi. Ushbu

$$f(a+\Delta x)-f(a)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi deyilib, uni Δf yoki $\Delta f(a)$ kabi belgilanadi:

$$\Delta f = \Delta f(a) = f(a+\Delta x)-f(a)$$

Ravshanki, berilgan funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi Δx ga bog'liq bo'ladi (47-chizma).



47-chizma.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^3 + x$$

funksiya $\forall a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x^3) + a + \Delta x - (a^3 + a) =$$

$$= \Delta x \left(3a^2 + 1 + 3a\Delta x\right)$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \left(3a^2 + 1 + 3a\Delta x\right) = 0$$

bo'ladi.

Funksiya uzluksizligi quyidagicha ham ta'riflansa bo'ladi.

2-ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada **uzluksiz** deyiladi.

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, funksiya X **to‘plamda uzluksiz** deyiladi.

2°. Funksiyaning uzluksizligi

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun:

1) uniug shu a nuqta atrofida (jumladan a nuqtada) aniqlangan bo‘lishi,

2) a nuqtada o‘ng va chap limitlarga ega bo‘lib,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$$

bo‘lishi lozim.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada 1) va 2) shartlardan hech bo‘lmaganda birini bajarmasa, u holda funksiya a **nuqtada uzilishga ega** deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

funksiya $a = 0$ nuqtada uzilishga ega, chunki bu nuqtada birinchi shart bajarilmaydi (48-chizma).

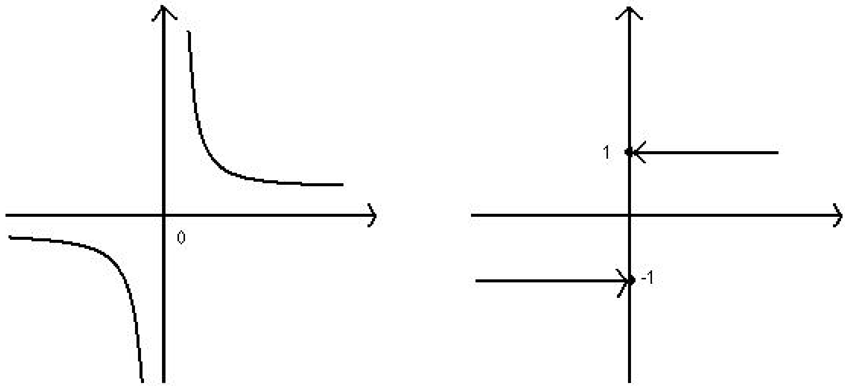
2. Ushbu

$$f(x) = sign\ x = \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo‘lsa;} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo‘lsa;} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

funksiya $a = 0$ nuqtada uzilishga ega bo‘ladi, chunki

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 1, \lim_{x \to -0} f(x) = -1$$

bo‘lib, ikkinchi shart bajarilmaydi (48-chizma).



48-chizma.

3°. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset \mathbb{R}$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda $f(x)$ va $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ funksiyalar ham a nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

$\lhd$ Berilishiga ko‘ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a),$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f(a) - g(a),$$

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad (g(x) \neq 0).$$

Keyingi tengliklardan $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ va $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyalarning a nuqtada uzluksiz bo‘lishi kelib chiqadi.$\rhd$

Aytaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya $\mathrm{T} \subset \mathbb{R}$ to'plamda, $y = f(x)$ funksiya esa $X = \{\varphi(t) : t \in T\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida

$$y = f(\varphi(t))$$

murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $x = \varphi(t)$ funksiya $t_0 \in T$ nuqtada, $y = f(x)$ funksiya mos a nuqtada $(a = \varphi(t_0))$ uzluksiz bo'lsa, y holda $y = f(\varphi(t))$ murakkab funksiya t_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$\lhd$ Funksiya uzluksizligi ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta_0 > 0$ son topiladiki,

$$|x - t| < \delta_0 \ \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

shuningdek, yuqoridagi $\delta_0 > 0$ songa ko'ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_0$$

bo'ladi. Agar

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = |x - x_0|, \ |f(x) - f(a)| = |f(\varphi(t))|$$

ekanini e'tiborga olsak, unda yuqoridagi munosabatlardan

$$|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f(\varphi(t))$ funksiya t_0 nuqtada uzluksiz.$\rhd$

4°. Elementar funksiyalarning uzluksizligi

Barcha elementar funksiyalar: butun va kasr ratsional funksiyalar, darajali funksiya, ko'rsatkichli funksiya, logariflik funksiya, trigonometrik funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'ladi.

Bu tasdiqni ba'zi elementar funksiyalarga nisbatan isbotlash bilan kifoyalanamiz.

1. Butun ratsional funksiyaning uzluksizligi. Ravshanki,

$$f(x) = c \ \ (c = const), \ \ f(x) = x$$

funksiyalari ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Unda $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot .... \cdot x}_{n \text{ ta}}$, $a_k x^k$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ funksiyalar, binobarin

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

funksiya $\forall a \in \mathbb{R}$ da uzluksiz bo‘ladi.

2. Trigonometrik funksiyalarning uzluksizliligi. Avvalo

$$f(x) = \sin x$$

funksiyani qaraylik. $\forall a \in \mathbb{R}$ va $a + \triangle x \in \mathbb{R}$ uchun $(-\pi < \triangle x < \pi)$

$$|\triangle \sin a| = |\sin(a + \triangle x) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{\triangle x}{2} \cos \left(a + \frac{\triangle x}{2} \right) \right| \leq$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

bo‘lib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta \sin a = 0$$

bo‘ladi. Demak, $f(x) = \sin x$ funksiya $\forall a \in \mathbb{R}$ da uzluksiz.

5°. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Uzluksiz funksiyalar qator xossalarga ega. Ular teoremalar orqali ifodalanadi.

1-teorema (Boltsano-Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning a va b nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ qarama-qarshi ishorali bo‘lsa u holda shunday c nuqta $(a < c < b)$ topiladiki,

$$f(c) = 0$$

bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo‘lib,

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0$$

bo‘lsin.

Agar $[a, b]$ segmentning $\dfrac{a+b}{2}$ nuqtasida

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

bo‘lsa unda $c = \dfrac{a+b}{2}$ uchun $f(c) = 0$ bo‘lib, teorema isbotlanadi.

Agar

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$$

bo‘lsa, unda $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ va $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ segmentlarning chetki nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qarama-qarshi ishorali qiymatlarga ega bo‘ladiganini e’tiborga olib, uni $[a_1, b_1]$ bilan belgilaymiz. Bunda

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0$$

bo‘lib, $[a_1, b_1]$ ning uzunligi

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

bo‘ladi.

Agar $[a_1, b_1]$ segmentning $\dfrac{a_1+b_1}{2}$ nuqtasida

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$$

bo‘lsa, unda $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ uchun $f(c) = 0$ bo‘lib, teorema isbotlanadi.

Agar

$$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$$

bo‘lsa, unda $\left[a_1, \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$ va $\left[\dfrac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ segmentlarning chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiyaning qarama-qarshi ishorali qiymatlarga ega bo‘ladiganini e’tiborga olib, uni $[a_2, b_2]$ bilan belgilaymiz. Bunda

$$f(a_2) < 0, \;\; f(b_2) > 0$$

bo‘lib, $[a_2, b_2]$ ning uzunligi

$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

bo‘ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) $[a, b]$ segmentning $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ nuqtasida

$$f(c) = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$$

bo‘ladi va bu holda teorema isbot bo‘ladi.

2) $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \neq 0$ bo‘lib, jarayon cheksiz davom etadi.

Natijada

$$[a_1, b_1], \; [a_2, b_2], \; ..., \; [a_n, b_n], ...$$

ketma-ketlik hosil bo‘lib,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset .... \supset [a_n, b_n] \supset ...,$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

$$a_1 < a_2 < .... < a_n < ..; \quad b_1 > b_2 > ... > b_n > ...,$$

$$f(a_n) < 0, \;\; f(b_n) > 0$$

bo‘ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$$

bo‘lib, $c \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3...)$ bo‘ladi. Teoremaning shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz. Demak,

$$a_n \to c \quad \Rightarrow \quad f(a_n) \to f(c)$$

va $f(a_n) < 0$ bo‘lgani uchun

$$f(c) \leq 0 \tag{1}$$

bo‘ladi, shuningdek

$$b_n \to c \;\; \Rightarrow \;\; f(b_n) \to f(c)$$

va $f(b_n) > 0$ bo‘lgani uchun

$$f(c) \geq 0 \tag{2}$$

bo‘ladi. (1) va (2) munosabatlardan

$$f(c) = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\triangleright$

Bu teoremadan tenglamalarning yechimi mavjudligini aniqlash va ularning taqribiy yechimini topishda foydalanish mumkin.

Masalan, ushbu

$$1 - x + \sin x = 0 \tag{3}$$

tenglamani qaraylik. Agar

$$f(x) = 1 - x + \sin x$$

deyilsa, bu funksiya $[0, \pi]$ da uzluksiz bo‘lib,

$$f(0) = 1 > 0, \;\; f(\pi) = 1 - \pi < 0$$

bo‘ladi. Unda 1-teoremaga ko‘ra $[0, \pi]$ oraliqda (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Ayni paytda $f(x)$ funksiya $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ segmentning chetki nuqtalarida

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2-\frac{\pi}{2} > 0,\ \ f(\pi) = 1-\pi < 0$$

turli ishorali qiymatlarga ega. Binobarin, $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ oraliqda (3) tenglamaning echmi bo‘ladi. Bu jarayoni davom ettirish natijasida (3) tenglamaning taqribiy yechimining kerakli aniqlikda topish mumkin.

Uzluksiz funksiyalarning xossalarini ifodalovchi keyingi teoremalarini isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo‘ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu segmentda o‘z qiymatining aniq yuqori(quyi) chegarasiga erishadi, ya’ni $[a,b]$ da shunday c_1 va c_2 nuqtalar topiladiki, $\forall\, x\ \in [a,b]$ da

$$f(x) \le f(c_1)$$

$$f(x) \ge f(c_2)$$

bo‘ladi. 2- va 3-teoremalar Veyershtrass teoremalari deyiladi.

4-§. Funksiyaning hosilasi

1°. Funksiya hosilasining ta’rifi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $a\in(a,b)$, $a+\Delta\, x\ \in(a,b)$ bo‘lsin. Ma’lumki, bu funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$$

Δx ga bog‘liq bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo‘lsa, u $f(x)$ funksiyaning a **nuqtadagi hosilasi** deyiladi va $f'(a)$, yoki $\dfrac{df(a)}{dx}$, yoki $y'\,|_{x=a}$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning $a=2$ nuqtadagi hosilasi

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+4\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = 4$$

bo‘ladi.

Ushbu

$$f(x)=|x|$$

funksiyaning $a=0$ nuqtadagi hosilasi mavjud bo‘lmaydi, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud emas.

Misollar. 1. $y=f(x)=C$ $(C=const)$ bo‘lsin, uning hosilasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = 0$$

bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$f(x)=C=const$$

bo‘lsa, $f'(x)=0$ bo‘ladi.

2. $y=f(x)=x^\alpha$ $(x>0)$ bo‘lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha[(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha-1}[(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1]}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\cdot\alpha$$

bo'ladi. Shunday qilib, $f(x) = x^{\alpha}$ bo'lsa, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ bo'ladi.

3.$f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\cdot\ln a$$

bo'ladi. Shunday qilib, $f(x) = a^x$ bo'lsa, $f'(x) = a^x\cdot\ln a$ bo'ladi. Xususan, $f(x) = e^x$ bo'lsa, $f'(x) = e^x$ bo'ladi.

4. $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\log_a e$$

bo'ladi.

Shunday qilib,$f(x) = \log_a x$ bo'lsa, $f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x\ln a}$; xususan, $f(x) = \ln x$ bo'lsa $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ bo'ladi.

5. $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x) = \sin x$ bo'lsa, $f'(x) = \cos x$ bo'ladi.

Huddi shunga o'xshash $f(x) = \cos x$ bo'lsa, $f'(x) = -\sin x$ bo'lishi ko'rsatiladi.

2°. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a,b) da $f'(x)$ va $g`(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$$f(x)+g(x),\ \ f(x)-g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham hosilalarga ega va

$$\begin{aligned}
&1)\ [f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x),\\
&2)\ [f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x),\\
&3)\ [f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),\\
&4)\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0)
\end{aligned}$$

bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $x\in(a,b)$, $x+\Delta x\in(a,b)$ bo‘lib,

$$y=f(x)+g(x)$$

bo‘lsin. U holda ta’rifiga ko‘ra

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

bo‘lib,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)$$

bo‘ladi.

Demak,

$$y'=[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

bo‘ladi.

Huddi shunga o‘xshash $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$ bo‘lishi ko‘rsatiladi.

Endi

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

deylik. Yana hosila ta'rifiga ko'ra

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi.

Ravshanki, $f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) =$
$= [f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + f(x) \cdot [g(x+\Delta x) - g(x)]$. Shuni e'tiborga olib topamiz;

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) + f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot f(x) =$$
$$= f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Demak,

$$y' = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \; (g(x) \neq 0)$$

bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi, ta'rifiga ko'ra

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x) - [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x) - \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot f(x)\right]$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib topamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\right.$$

$$\left.-f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right] = \frac{1}{g(x)\cdot g(x)}\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-\right.$$

$$\left.-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}f(x)\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Demak,

$$y' = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

bo‘ladi.

Misollar. 1. Ushbu $y = x^3 + sinx$ funksiyaning hosilasi topilsin.

$\lhd$ Yig‘indining hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = (x^3 + sinx)' = (x^3)' + (sinx)' = 3x^2 + \cos x.\rhd$$

2. Ushbu $y = \sqrt{x}e^x$ funksiyaning hosilasi topilsin.

$\lhd$ Ko‘paytmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = (\sqrt{x}\cdot e^x)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot e^x + x^{\frac{1}{2}}\cdot(e^x)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}e^x +$$

$$+x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x = x^{\frac{1}{2}}e^x\left(\frac{1}{2}x^{-1}+1\right) = \sqrt{x}e^x(1+\frac{1}{2x}).\rhd$$

3. Ushbu $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarning hosilalari topilsin.

$\lhd$ Nisbatning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\triangleright$$

Endi murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasini keltiramiz.

Faraz qilaylik,

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

funksiyalari yordamida ushbu

$$y = f(\varphi(x))$$

murakkab funksiya hosil qilingan bo‘lsin.

Agar bu funksiyalar $f'(u)$ va $\varphi'(x)$ hosilalariga ega bo‘lsa, u holda murakkab funksiya hosilaga ega va

$$y' = [f(\varphi(x))]' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

bo‘ladi.

$\triangleleft$ Hosila ta’rifiga ko‘ra

$$y' = [f(\varphi(x))]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x} = \frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

Ayni paytda

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi(x) = \Delta\varphi,$$

$$f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x)) = \Delta f(\varphi)$$

bo‘lganligi uchun

$$\frac{f(\varphi(x+\Delta x)) - f(\varphi(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Berilishiga ko‘ra $\varphi(x)$ funksiya hosilaga ega. Binobarin, y uzluksiz bo‘ladi. Demak,

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0$$

Shularni e‘tiborga olib topamiz:

$$[f(\varphi(x))]' = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).\rhd$$

Misollar. 1.Ushbu $y=\sin\sqrt{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

$\lhd$ Berilgan funksiyani $y=\sin u$, $u=\sqrt{x}$ funksiyalar yordamida hosil qilingan murakkab finksiya deb qarash mumkin. Unda formulaga ko‘ra

$$y' = (\sin u)'\cdot u' = \cos u\cdot(\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bo‘ladi.$\rhd$

2. Ushbu $y=\arcsin x$ funksiyaning hosilasi topilsin.

$\lhd$ Ma’lumki, bu $y=\arcsin x$ funksiya $x=\sin y$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo‘ladi. y o‘zgaruvchini x ning funksiyasi ekanligini e’tiboriga olib, keyingi tenglikning har ikki tomonining hosilasini topamiz:

$$1=\cos y\cdot y'.$$

Bu tenglikdan

$$y'=\frac{1}{\cos y}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $\cos^2 y = 1-\sin^2 y = 1-x^2$, ya’ni $\cos y=\sqrt{1-x^2}$.

Demak, $y'=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo‘ladi. $\rhd$

Huddi shu yo‘l bilan

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

bo‘lishi ko‘rsatiladi. Yuqorida, elementar funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, quyida jadval sifatida keltiramiz:

1. $(c)' = 0;$

2. $(x)' = 1;$

3. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1};$

4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

5. $(\sin x)' = \cos x;$

6. $(\cos x)' = -\sin x;$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x};$

9. $(a^x)' = a^x \ln a;$

10. $(e^x)' = e^x;$

11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

12. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x} \log_a e;$

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

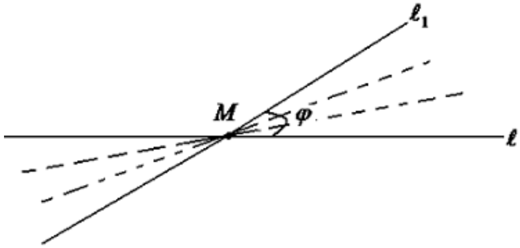
14. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}.$

5-§. Hosilaning geometrik va mexanik ma’nolari

Tekislikda o‘zaro kesishuvchi ikki l va l_1 chiziqlarni qaraylik (49-chizma).

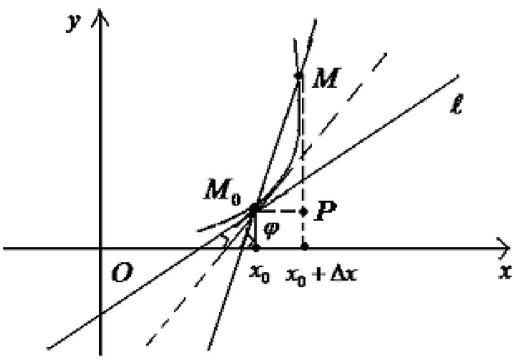


49-chizma.

Ulardan biri, masalan, l qo‘zg‘almas, ikkinchisi l_1 esa M nuqta atrofida aylanib turuvchi bo‘lib, bu chiziqlar orasidagi burchak φ bo‘lsin. Ravshanki, φ nolga intilib borganda l_1 chiziq l chiziq bilan ustma-ust tushishga yaqinlasha boradi.

$\varphi \to 0$ da l chiziqqa l_1 to‘g‘ri chiziqning limit holati deyiladi.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya grafigi 50-chizmada tasvirlangan Γ egri chiziq ifodalansin.



50-chizma.

Γ chiziqdagi M_0 nuqtaning koordinatalari $(x_0, f(x_0))$:

$$M_0 = M_0(x_0, f(x_0)),$$

M nuqtaning koordinatalari esa $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$:

$$M = M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

bo'lsin. M_0 va M nuqtalar orqali to'g'ri chiziq M_0M kesuvchini o'tkazamiz. Uning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni φ deylik. Bu burchak Δx ga bog'liq bo'ladi: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. M_0M kesuvchining M nuqta Γ egri chiziq bo'ylab M_0 nuqtaga intilgandagi (bu $\Delta x \to 0$ da sodir bo'ladi) limit holatini ifodalovchi l to'g'ri chiziq Γ egri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

$\Delta x \to 0$ da $\varphi = \varphi(\Delta x)$ ning limiti urinmaning Ox o'qi bilan tashkil etgan α burchakni aniqlaydi:

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$$

Shu burchakning tangensi urinmaning burchak koeffitsiyenti bo'ladi: $\operatorname{tg} \alpha = k$.

$\Delta M M_0 P$ dan topamiz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Unda

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= \operatorname{arctg} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

bo'ladi. Demak,

$$\varphi = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Bu tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$, geometrik nuqtayi-nazardan, urinmaning burchak koeffitsiyenti bo‘lar ekan. Bu urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

bo‘ladi, bunda x va y lar urinmadagi o‘zgaruvchi nuqta koordinatalari.

Moddiy nuqtaning harakati

$$s = f(t)$$

qoida bilan aniqlansin, bunda t – vaqt, s – o‘tilgan yo‘l.

Vaqtning t_0 va $t_0 + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ qiymatlarida $s = f(t)$ funksiya $f(t_0)$ va $f(t_0 + \Delta t)$ qiymatlarining ayirmasi

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

moddiy nuqtaning Δt vaqt oraliqda o‘tilgan yo‘lni ifodalaydi.

Ravshanki,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

moddiy nuqta harakatining o‘rtacha tezligini bildiradi. $\Delta t \to 0$ da bu $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatning limiti moddiy nuqta harakatining t_0 paytdagi oniy tezligini ifodalaydi. Ayni paytda

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t_0).$$

Shunday qilib $s = f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi $f'(t_0)$ mexanik nuqtayi-nazardan $s = f(t)$ qoida bilan harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligi bo‘lar ekan.

6-§. Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

1°. Funksiya differensiali tushunchasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $x \in (a, b)$ nuqtada $y' = f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Ushbu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x)$ munosabatni e’tiborga olib, keyingi tenglikdan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0$$

bo‘lishini topamiz. Endi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x)$$

deyilsa, unda funksiya orttirmasi Δy uchun

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{1}$$

tenglik hosil bo‘ladi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \to 0$. (1) munosabatda $\Delta x \to 0$ da $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bo‘ladi: $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0(\Delta x)$.

Demak,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + 0(\Delta x). \tag{1'}$$

1-ta’rif. $(1')$ tenglikdagi $f'(x) \cdot \Delta x$ ifoda $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi **differensiali** deyiladi va uni dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi:

$$dy = y' \cdot \Delta x \quad \text{yoki} \quad df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Keltirilgan ta’rifdan ko‘rinadiki, funksiyaning differensiali dy ikkita miqdor – x va Δx larga bog‘liq (x nuqta tayinlanganda dy faqat Δx gagina bog‘liq) bo‘ladi.

Misol. Ushbu $f(x) = x^2 + 2x + 5$ funksiyaning, a) $x = 2$, $\Delta x = 0,001$, b) $x = 2$, $\Delta x = 0,1$ bo'lganda, orttirmasi va differensiali topilsin.

$\triangleleft$ Funksiyaning orttirmasi va differensiali ta'riflaridan foydalanib topamiz: a) hol uchun:

$$\Delta f(2) = f(2 + 0,001) - f(2) =$$

$$= (2,001)^2 + 2 \cdot 2,001 + 5 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 5) = 13,006001 - 13 = 0,006001,$$

$$df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = (2x + 2)_{x=2} \cdot 0,001 = (2 \cdot 2 + 2) \cdot 0,001 = 0,006.$$

Demak, bu holda $\Delta f = 0,006001$, $df = 0,006$ bo'ladi.

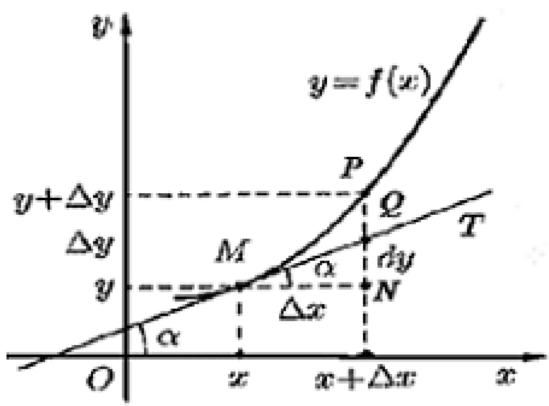
b) hol uchun:

$$\Delta f(2) = f(2 + 0,1) - f(2) = (2,1)^2 + 2 \cdot 2,1 + 5 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 5) =$$

$$= 13,61 - 13 = 0,61,$$

$$df(2) = f'(2) \cdot \Delta x = (2x + 2)_{x=2} \cdot 0,1 = (2 \cdot 2 + 2) \cdot 0,1 = 0,6.$$

Bu holda $\Delta f = 0,61$, $df = 0,6$ bo'ladi. $\triangleright$



51-chizma.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiyaning grafigi 51-chizmada tasvirlangan egri chiziq ifodalansin

Chizmadan ko‘rinadiki,

$$\frac{QN}{MN} = \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad QN = \operatorname{tg}\alpha \cdot MN = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Ma’lumki,

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x).$$

Demak,

$$QN = f'(x) \cdot \Delta x = df(x).$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali, geometrik nuqtayi-nazardan shu funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma orttirmasi QN bo‘lar ekan.

2°. Elementar funksiyalarning differensiallari. Sodda qoidalar

Ma’lumki, $y = f(x)$ funksiyaning differensiali

$$dy = y'\Delta x$$

bo‘ladi. Ushbu $y = x$ funksiya uchun $dy = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$ bo‘lib, funksiya differensiali uchun

$$dy = y' \cdot dx \tag{2}$$

bo‘lishini topamiz.

Funksiya hosilalari jadvali hamda (2) formuladan foydalanib, elementar funksiyalar differensiallarni ifodalovchi quyidagi jadvalni keltiramiz:

1. $d(c) = 0, \quad c = const;$
2. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx;$
3. $d(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx;$
4. $d(\sin x) = \cos x dx;$

5. $d(\cos x) = -\sin x dx$;

6. $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$;

7. $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx$;

8. $d(a^x) = a^x \ln a dx$;

9. $d(e^x) = e^x dx$;

10. $d(\ln x) = \dfrac{1}{x} dx$;

11. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a} dx$;

12. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

13. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

14. $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2} dx$;

15. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2} dx$.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $f'(x)$ va $g‘(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$a)$ $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$;

$b)$ $d[f(x) \cdot g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$;

$$c) d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0).$$

3°. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

bo‘lishini ko‘rdik. Bu munosabatdan $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\Delta y \approx dy$$

ya’ni

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x)\cdot\Delta x \tag{3}$$

taqribiy formula hosil bo‘ladi.

(3) formula x_0 nuqtadagi funksiya orttirmasini uning shu nuqtadagi differensiali bilan almashtirish mumkinligini ko‘rsatadi. Bu almashtirishning mohiyati, funksiya orttirmasi Δx ning murakkab funksiyasi bo‘lgan holda, funksiya differensiali esa Δx ning chiziqli funksiyasi bo‘lishidadir.

(3) taqribiy formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{4}$$

Misollar 1.Ushbu

$$\sqrt{16,06}$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

$\triangleleft$ Agar $f(x)=\sqrt{x}, x_0=16, \Delta x=0,06$ deb olinsa, unda (4) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{16,06}\approx\sqrt{16}+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)_{x=16}\cdot 0,06=4+\frac{0,06}{8}=4,0075$$

bo‘ladi. Demak,

$$\sqrt{16,06}\approx 4,0075. \triangleright$$

2. Ushbu

$$\operatorname{tg}46^\circ$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

$\triangleleft$ Agar $f(x)=\operatorname{tg}(x)$, $x_0=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x=1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ deb olinsa, bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(x_0)=\operatorname{tg}46^\circ-\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{tg}46^\circ-1$$

bo‘lib, shu nuqtadagi differensiali esa

$$d\,\text{tg}(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} \cdot \Delta x = \frac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90} \approx \frac{3,14}{90} \approx 0,35$$

bo‘ladi. Demak,

$$\text{tg}\,46^\circ - 1 \approx 0,035,$$

ya’ni

$$tg46^\circ \approx 1,035.\rhd$$

4°. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Bu $f'(x)$ ham x o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘ladi. Binobarin, uning hosilasini qarash mumkin. $y = f(x)$ funksiya hosilasi $y' = f'(x)$ ning hosilasi berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', yoki $f''(x)$, yoki $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ kabi belgilanadi. Demak, $y'' = (y')'$, yoki $(f'(x))' = f''(x)$, yoki $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Huddi shunga o‘xshash funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari ta’riflanadi.

Umuman, $y = f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli hosilasi $y^{(n-1)}$ ning hosilasi berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasi deyiladi:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Funksiyaning $y'', y''', ..., y^{(n)}, ...$ hosilalari unung **yuqori tartibli hosilalari** deyiladi. Yuqori tartibli hosilalardan ko‘pgina masalalarni hal etishda foydalaniladi. Masalan, harakatdagi jismning oniy tezlanishi ikkinchi tartibli hosilani hisoblash bilan topiladi.

Misol. Ushbu $y = xe^x$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi topilsin.

$\lhd$ Funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi quyidagicha topiladi:

$$y' = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x,$$

$$y'' = (y')'[(1 + x)e^x]' = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x,$$

$$y''' = (y'')' = [(2+x)e^x]' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x. \triangleright$$

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topish uchun uning hamma oldingi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo'ladi. Biroq ayrim funksiyalarning n-tartibli hosilalarini bir yo'la topish imkonini beradigan formulalar mavjud. Quyida bunday formulalarning ba'zilarini keltiramiz:

1. $y = x^\mu$ $(x > 0)$ uchun

$$y^{(n)} = (x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1) \cdot x^{\mu-n}$$

bo'ladi.

2. $y = a^x$ uchun

$$y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n,$$

Xususan,

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

bo'ladi.

3. $y = \sin x$, $y = \cos x$ lar uchun

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y^{(n)} = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Yuqori tartibli hosilalardan ko'pgina masalalarni hal etishda foydalaniladi.

Masalan, harakatdagi jismning oniy tezlanishi ikkinchi tartibli hosilani hisoblash bilan topiladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtada n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$a) \quad [c \cdot f(x)]^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x),$$

$$b) \quad [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^n(x),$$

$$d) \quad [f(x)g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x)g'(x) + ...+$$

$$+C^{n-1}{}_n f'(x)g^{(n-1)}(x)+f(x)g^{(n)}(x)$$

bo‘ladi, bunda

$$C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}.$$

Ma’lumki, $y=f(x)$ funksiyaning differensiali

$$dy=y'dx$$

bo‘lar edi.

Funksiyaning differensiali dy ning differensiali $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)=d(df(x))$. Ikkinchi tartibli differensial ikkinchi tartibli hosila orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dx\cdot d(y')=dx\cdot(y')'\cdot dx=y''\cdot(dx)^2,$$

umuman, $y=f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli differensiali $d^{(n-1)}$ ning differensiali funksiyaning n-**tartibli differensiali** deyiladi va $d^{(n)}y$ yoki $d^{(n)f(x)}$ kabi belgilanadi:

$$d^{(n)}y=d(d^{n-1}y)$$

yoki

$$d^{(n)}f(x)=d(d^{(n-1)}f(x)).$$

Funksiyaning n-tartibli differensiali uning n-tartibli hosilasi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$d^{(n)}y=y^{(n)}\cdot(dx)^n.$$

7-§. Asosiy teoremalar. Lopital qoidasi. Teylor formulasi

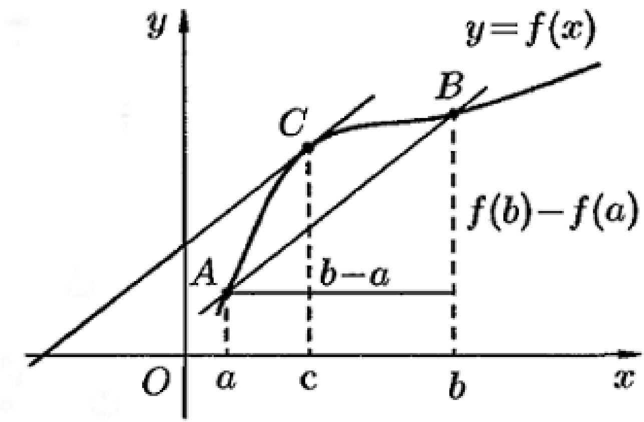
1°. Asosiy teoremalar. Oraliqda hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, (a,b) intervalning har bir nuqtasida hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday c $(a < c < b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \tag{1}$$

bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $f(x)$ funksiya teoremaning shartlarini qanoatlantirilsin va unung grafigi 52-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin.



52-chizma.

Egri chiziqning $A(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalari orqali AB to‘g‘ri chiziq (kesuvchi) ni o‘tkazamiz. Ravshanki, uning burchak koeffitsiyenti

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bo‘ladi.

Endi AB kesuvchini, unga parallel ravishda harakat qildirish natijasida, u $f(x)$ funksiya grafigiga o‘tqazilgan urinma holatiga keladi. Bunda urinmish nuqtasining koordinatasi $(c, f(c))$ bo‘ladi. Ayni paytda bu urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha = f'(c) \ \ (a < c < b)$$

bo‘ladi.

Yasalishiga ko‘ra urinma AB kesuvchiga parallel. Binobarin, ularning burchak koeffitsiyentlari bir-biriga teng:

$$k_1 = k_2,$$

ya’ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).\triangleright$$

Keltirilgan teorema funksiyaning **chekli orttirmasi haqidagi teorema** ham deb yuritiladi. Teoremaning natijalari quyidagicha.

1-natija. Agar $f(x)$ funksiyaning hosilasi (a, b) da nolga teng bo‘lsa, u holda funksiya (a, b) da aynan o‘zgarmas bo‘ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik,

$$f'(x) = 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Ixtiyoriy $x \in (a, b)$ va tayinlangan $x_0 \in (a, b)$ lar uchun $[x_0, x] \subset (a, b)$ (yoki $[x, x_0] \subset (a, b)$) bo‘lib, (1) formulaga ko‘ra

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) = 0$$

bo‘ladi. Undan

$$f(x) = f(x_0) = const$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\triangleright$

2-natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lib,

$$f'(x) = g'(x)$$

bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bir-biridagi ozgarmas songa farq qiladi:

$$f(x) = g(x) + C \quad (C = const).$$

$\triangleleft$ Aytaylik, $F(x) = f(x) - g(x)$ bo‘lsin. Unda

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

bo‘lib, 1-natijaga ko‘ra $F(x) = C - const$ bo‘ladi. Demak,

$$f(x) = g(x) + C. \quad \triangleright$$

3-natija. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya 1-teoremaning shartlarini qanoatlantirilsin. Agar $f(a) = f(b)$ bo‘lsa, u holda

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

bo‘ladi.

$\triangleleft$(1) formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

dan foydalanib topamiz:

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b).\triangleright$$

Endi 1-teoremaga nisbatan umumiyroq teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema (Koshi teoremasi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, (a, b) intervalning har bir nuqtasida $f'(x)$ va $g'(x)$ $(g'(x) \neq 0)$ hosilalarga ega bo‘lsa, u holda shunday c $(a < c < b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

2°. Lopital qoidasi

Ma’lumki, funksiyalarning limitini topish muhim masalalardan biri bo‘lib, ularni hisoblash, ko‘pchilik hollarda ancha qiyin bo‘ladi. Ayrim hollarda funksiyalarning hosilalaridan hamda yuqorida keltirilgan teoremadan foydalanish natijasida limitlarni topish osonlashadi. Buni

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

bo‘lganda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ni topishda namoyon etamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning $(a-\delta, a+\delta)$ atrofidagi $(\delta > 0)$, a nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin.

Agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = b$$

bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = b$$

bo‘ladi.

$\lhd$ Soddalik, uchun $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ deb olaylik, a nuqtaning $(a-\delta, a+\delta)$ atrofida ixtiyoriy x nuqtani olib, $[a, x]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraylik. Bu funksiyalar Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Unda shu teoremaga ko‘ra

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi, bunda $a < c < x$. Ravshanki, $x \to a$ da $c \to a$. Natijada

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = b$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\rhd$

Misollar. 1. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ limit topilsin.

$\lhd$ Yuqorida keltirilgan tasdiqdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{6\cdot(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{6}.\rhd$$

2. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$ limit topilsin.

$\lhd$ Bu limit yuqoridagidek hisoblanadi:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x^3-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{3x^2} = \frac{5}{3}\lim_{x\to 1}x^2 = \frac{5}{3}.\rhd$$

Funksiya limitini yuqorida keltirilgan tasdiqqa ko‘ra topish qoidasiga **Lopital qoidasi** deyiladi. Ayrim limitlar Lopital qoidasini birnecha bor takror qo‘llash bilan hisoblanadi.

3. Ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

limiti hisoblansin.

◁ Lopital qoidasini ikki marta takror qo‘llab topamiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\cdot\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{[x\ln x - x + 1]'}{[(x-1)\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1}{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x} + \ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1 - \dfrac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left(1 - \dfrac{1}{x} + \ln x\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \triangleright$$

3°. Teylor formulasi

Matematika va uning tatbiqlarida muhim bo‘lgan formulani keltiramiz. Ushbu

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

funksiya-ko‘phadni qaraylik, bunda $a_1, a_2, ..., a_n$ − haqiqiy sonlar, n − natural son. Bu funksiyaning ketma-ket tartibdagi hosilalarini hisoblaymiz:

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + ... + na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + .. + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...\cdot 2a_n. \qquad (3)$$

Agar (2) va (3) tengliklarda $x = x_0$ deyilsa, unda

$$P_n(x_0) = a_0,\ P_n'(x_0) = 1\cdot a_1,\ P_n''(x_0) = 2!\cdot a_2,\ ...,P_n^{(n)}(x_0) = n!\cdot a_n$$

bo‘lib, $a_0 = P_n(x_0)$, $a_1 = \dfrac{P'_n(x_0)}{1!}$, $a_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}$, ..., $a_n = \dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$ bo‘ladi. a_0, a_1, .., a_n larning bu qiymatlarini (2) tenglikdagi $a_0, a_1, .., a_n$ larning o‘rniga qo‘yib topamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (4)$$

(4) formula ko‘phad uchun **Teylor formulasi** deyiladi. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a, b)$ bo‘lsin. Bu funksiya x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ atrofida $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega va $f^{(n)}(x)$ hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsin. Berilgan $f(x)$ funksiya yordamida tuzilgan ushbu

$$P_n(f; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko‘phadni qaraylik.

Agar $f(x)$ funksiya n-darajali ko‘phad bo‘lsa, unda yuqorida aytilganiga ko‘ra

$$f(x) = P_n(f; x)$$

bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko‘phad bo‘lmasa, unda

$$f(x) \neq P_n(f; x)$$

bo‘lib, ular orasida farq hosil bo‘ladi:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f; x).$$

Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x) = P_n(f; x) + R_n(x) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \quad (5)$$

Bu formula $f(x)$ **funksiyaning Teylor formulasi**, $R_n(x)$ esa **qoldiq had** deyiladi.

Qoldiq hadni baholash maqsadida $x \to x_0$ da $R_n(x)$ funksiya bilan $(x-x_0)^n$ funksiyani solishtiramiz, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+..+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n]}{(x-x_0)^n}$$

limitni qaraymiz. Bu limitga Lopital qoidasini n marta takror qo‘llab topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\left[f'(x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot(x-x_0)^{n-1}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\left[f''(x_0)+...+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}\right]}{n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2}}=...$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-\left[f^{(n)}(x_0)\right]}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 1}=0.$$

Demak, $x\to x_0$ da $R_n(x)$ funksiya $(x-x_0)^n$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya bo‘lar ekan:

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

Natijada

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \quad (6)$$

bo‘ladi.

Odatda, (6) formula $f(x)$ funksiyaning Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

4°. Makloren formulasi. Ba'zi sodda funksiyalarning Makloren formulalari

$f(x)$ funksiyaning (6) Teylor formulasida $x_0 = 0$ deb olinsa, ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad (7)$$

formula hosil bo'ladi. (7) formula $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasi deyiladi. $x \to 0$ da

$$f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] = o(x^n)$$

bo'lishi 0 nuqtaning kichik atrofidagi x lar uchun quyidagi

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (8)$$

taqribiy formulani yuzaga keltiradi.

Endi ba'zi sodda funksiyalarning Makloren formulalarini keltiramiz.

1. $f(x) = e^x$ **bo'lsin.** Bu funksiya uchun

$$f^{(n)}(x) = e^x, f(0) = 1, f^{(n)}(0) = 1 \quad (n = 1, 2, ..)$$

bo'lib, (7) va (8) formulalarga ko'ra

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad (x \to 0)$$

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

bo'ladi. Xususan, $x = 1$ bo'lganda e sonini taqribiy hisoblash uchun

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + .. + \frac{1}{n!}$$

formulaga kelamiz.

2. $f(x) = \sin x$ **bo'lsin.** Ma'lumki, bu funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ formula o'rinli. Unda $f(0) = 0$ va

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa.} \end{cases}$$

bo‘ladi. (7) va (8) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad (x \to 0)$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + .. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

3. $f(x) = \cos x$ **bo‘lsin.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

bo‘lishi ma’lum. Unda $f(0) = 1$ va

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{agar n toq son bo‘lsa} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{agar n juft son bo‘lsa} \end{cases}$$

bo‘ladi. Demak, $f(x) = \cos x$ funksiyasi uchun (7) va (8) formulalar quydagicha bo‘ladi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}), \quad (x \to 0),$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$ **bo‘lsin.** Avvalo bu funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz:

$$f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

$$f''(x) = [(1+x)^{-1}]' = (-1)(1+x)^{-2},$$

$$f'''(x) = [(-1)(1+x)^{-2}]' = (-1)(-2)(1+x)^{-3},$$

....

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)...(-(n-1))(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Ravshanki,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

bo‘ladi. Bu funksiya uchun (7) va (8) formulalar quyidagi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n) \quad (x \to 0),$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Ushbu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

limitni e^x va $\sin x$ funksiyalarning Makloren formulalaridan foydalanib hisoblaymiz.

Ma’lumki, $x \to 0$ da

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$$

Shularni e’tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 - x - x^2 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

8-§. Hosilaning ba’zi bir tatbiqlari

1°. Funksiyaning monotonligini aniqlashda hosilaning tatbiqi

Mazkur kursda funksiyaning monotonligini (o‘suvchi hamda kamayuvchiligi) tushunchalari keltirilgan edi. Unga ko‘ra (a, b) da aniqlangan $f(x)$ uchun ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$ da

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$$

bo‘lsa, o‘suvchi;

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

bo‘lsa, kamayuvchi bo‘ladi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da hosilaga ega bo‘lib,

$$f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a, b))$$

bo‘lsa, o‘suvchi;

$$f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a, b))$$

bo‘lsa, kamayuvchi bo‘ladi.

$\lhd$ (a, b) intervalda ixtiyoriy ikki x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo‘lsin deylik. Unda $[x_1, x_2]$ segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasini qanoatlantiradi. Binobarin, shunday c nuqta $(x_1 < c < x_2)$ topiladiki,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra

$$f'(c) \geq 0, \quad x_2 - x_1 > 0.$$

Demak,

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \;\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Ravshanki, (a, b) da

$$f'(x) \leq 0$$

bo‘lganda $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ bo‘ladi. $\rhd$

Shunday qilib, (a, b) da hosilaga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya:

1) (a, b) oraliqning $f'(x) \geq 0$ bo‘ladigan qismida funksiya o‘suvchi, ya’ni argument x ning qiymatlari oshaborganda funksiyaning mos qiymatlari ham oshaboradi,

2) (a, b) oraliqning $f'(x) \leq 0$ bo'ladigan qismida funksiya kamayuvchi, ya'ni argument x ning qiymatlari oshaborganda funksiyaning mos qiymatlari kamayaboradi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

funksiyaning o'sish hamda kamayish oraliqlari topilsin.

$\triangleleft$ Ravshanki,

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$$

bo'ladi. Endi

$$f'(x) \geq 0,$$

ya'ni

$$(x-1)(x+1)(x-2) \geq 0$$

va

$$f'(x) \leq 0,$$

ya'ni

$$(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$$

tengsizliklarni yechamiz. Intervallar usulidan foydalanib

$$(x-1)(x+1)(x-2) \geq 0$$

tengsizlikning yechimi

$$-1 \leq x \leq 1, \;\; 2 \leq x < +\infty$$

bo'lishini,

$$(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$$

tengsizlikning yechimi esa

$$-\infty < x \leq -1, \;\; 1 \leq x \leq 2$$

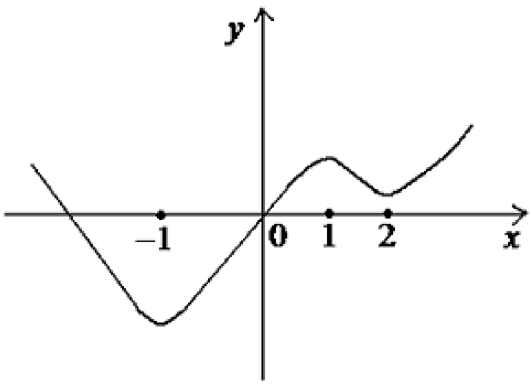
bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya

$$[-1, 1] \cup [2, +\infty]$$

da o‘suvchi,

$$(-\infty, -1] \cup [1, 2]$$

da kamayuvchi bo‘ladi (53-chizma).



53-chizma.

2°. Funksiyaning ekstremumini topishda hosilaning tatbiqi

Funksiyalar, o‘zining aniqlanish sohalarida har doim o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lavermaydilar. Bunga yuqorida keltirilgan

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

funksiya misol bo‘la oladi. Bu misoldan ko‘rinadiki, funksiya aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$ kichik

$(-\infty, -1]$ qismida kamayuvchi,

$[-1, 1]$ qismida o‘suvchi,

$[1, 2]$ qismida kamayuvchi,

$[2, +\infty)$ qismida o‘suvchi

bo‘ladi. Bunda $(-\infty, +\infty)$ oraliqning $-1; 1; 2$ nuqtalari ahamiyatli:

$x = -1$ nuqta funksiyaning kamayishidan o'sishga o'tishini ajratib turadi,

$x = 1$ nuqta funksiyaning o'sishdan kamayishga o'tishini ajratib turadi.

$x = 2$ nuqta funksiyaning kamayishidan o'sishga o'tishni ajratib turadi.

Bunday holda berilgan funksiya $x = -1$ nuqtada minimumga, $x = 1$ nuqtada maksimumga, $x = 2$ nuqtada minimumga erishadi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

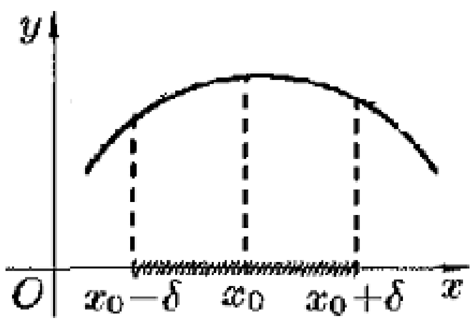
1-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ atrofidagi nuqtalarda ($\delta > 0$) ushbu

$$f(x) \leq f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada maksimumga erishadi** deyiladi. $f(x_0)$ esa funksiyaning **maksimum qiymati** deyilib,

$$f(x_0) = \max\{f(x)\} \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

kabi yoziladi (54-chizma).



54-chizma.

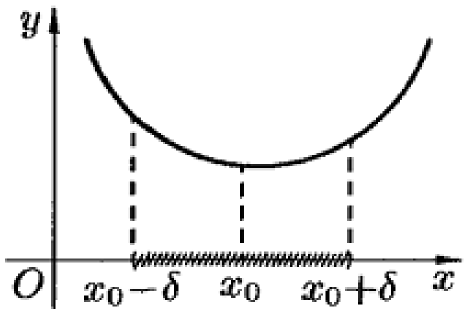
2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ atrofidagi nuqtalarda ($\delta > 0$) ushbu

$$f(x) \geq f(x_0)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada minimumga erishadi** deyiladi. $f(x_0)$ esa funksiyaning **minimum qiymati** deyilib,

$$f(x_0) = \min\{f(x)\} \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

kabi yoziladi (55-chizma).



55-chizma.

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning **ekstremumi** deyiladi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da hosilaga ega bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b), x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bo'lib, shu x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya minimumga erishsin. Unda ta'rifga binoan $\Delta x > 0$ bo'lganda $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, ya'ni $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$, $\Delta x < 0$ bo'lganda $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, ya'ni $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad (\Delta x > 0)$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad (\Delta x < 0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tengsizliklarda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$f'(x_0) \geq 0, \quad f'(x_0) \leq 0$$

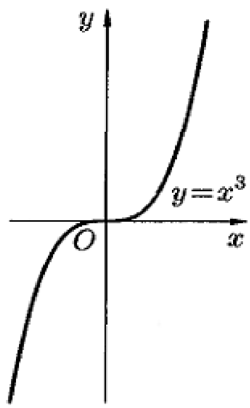
Demak,

$$f'(x_0) = 0. \triangleright$$

Bu teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

1-eslatma. Hosilasi nolga teng bo‘ladigan nuqtada funksiya ekstremumga erishmasligi mumkin.

Masalan, ushbu $f(x) = x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x) = 3x^2$ $x = 0$ nuqtada nolga teng bo‘ladi: $f'(0) = 0$. Biroq bu funksiya shu nuqtada ekstremumga erishmaydi, chunki $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ bo‘lib, u o‘suvchi bo‘ladi (56-chizma).

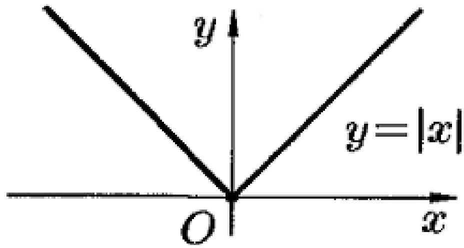


56-chizma.

2-eslatma. Funksiya hosila mavjud bo‘lmagan nuqtada ham ekstremumga erishishi mumkin. Masalan, ushbu

$$f(x) = |x|$$

funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo funksiya shu nuqtada minimumiga erishadi (57-chizma).



57-chizma.

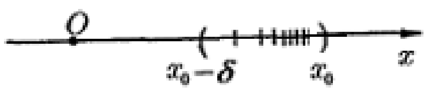
Yuqorida aytilganlaridan, hosilaga ega bo‘lgan funksiyalarning ekstremumga erishtiradigan nuqtalarni, hosila nolga teng bo‘ladigan nuqtalar orasidan (bunday nuqtalar funksiyaning **statsionar nuqtalari** deyiladi) izlash kerakligi kelib chiqadi.

Masala shu statsionar nuqtalarda funksiya ekstremumga erishadimi va erishsa maksimumgami yoki minimumgami, shuni topishdan iborat.

Ma’lumki, x_0 nuqtaning δ-**atrofi** ushbu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ intervaldan iborat edi, bunda δ ixtiyoriy musbat son:

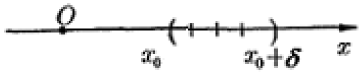
58-chizma.

Ushbu $(x_0-\delta, x_0)$ interval x_0 **nuqtaning chap atrofi**,



59-chizma.

ushbu $(x_0, x_0+\delta)$ interval esa, x_0 **nuqtaning o‘ng atrofi** deyiladi.



60-chizma.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda berilgan va x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ atrofida hosilaga ega bo‘lsin. Ayni paytda x_0 nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lsin:

$$f'(x_0) = 0.$$

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning hosilasi

1) $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) \geq 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) \leq 0$, bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi,

2) $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) \leq 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) \geq 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi,

3) $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) \geq 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) \geq 0$ yoki $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) \leq 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) \leq 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumi bo‘lmaydi.

$\triangleleft$ Aytaylik, $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) \geq 0, (x_0, x_0 + \delta)$ da $f'(x) \leq 0$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ uchun $[x, x_0]$ oraliqda Lagranj teoremasini qo‘llash natijasida

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \geq 0 \quad (x < c < x_0),$$

ya’ni

$$f(x) \leq f(x_0)$$

bo‘lishini topamiz.

Shunindek, ixtiyoriy $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ uchun $[x_0, x]$ oraliqda Lagranj teoremasini qo‘llash natijasida

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0) \leq 0 \quad (x_0 < c_1 < x),$$

ya'ni

$$f(x) \leq f(x_0)$$

bo'lishini topamiz. Demak, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Bu, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

Huddi shunga o'xshash teoremaning 2)-va 3)-bandlari isbotlanadi.$\triangleright$

Bu teoremani sxema tarzida quyidagicha ifodalash mumkin:

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$	$x = x_0$	$x_0 - \delta < x < x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	x_0
$f'(x)$ mavjud	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	maksimum
$f'(x)$ mavjud	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	minimum
$f'(x)$ mavjud	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	ekst.yo'q
$f'(x)$ mavjud	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	ekst.yo'q

Misol. Ushbu

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2$$

funksiyaning ekstremumi topilsin.

$\triangleleft$ Avvalo berilgan funksiyaning hosilasini hisoblab, uni nolga tenglab funksiyaning statsionar nuqtasini topamiz:

$$f'(x) = (2x^3 + 3x^2)' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1),$$

$$6x(x+1) = 0,$$

$$x_1 = 0, \ x_2 = -1.$$

$x_1 = 0$ nuqtaning chap atrofi $(-\delta, 0)$ va o'ng atrofi $(0, \delta)$ larni olamiz, bunda $0 < \delta < 1$.

$x \in (-\delta, 0)$ da $f'(x) = 6x(x+1) < 0$, $x \in (0, \delta)$ da $f'(x) = 6x(x+1) > 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga erishadi va $\min f(x) = f(0) = 0$ bo'ladi.

Endi $x_2 = -1$ statsionar nuqtaning chap atrofi $(-1 - \delta, -1)$ va o'ng atrofi $(-1, -1 + \delta)$ larni ularda funksiya hosilalarining ishoralarini aniqlaymiz.

$x \in (-1-\delta, -1)$ da $f'(x) = 6x(x+1) > 0$, $x \in (-1, -1+\delta)$ da $f'(x) = 6x(x+1) < 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x = -1$ nuqtada maksimumga erishadi va $\max f(x) = f(-1) = 1$ bo'ladi.$\rhd$

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lishi uning ekstremumlarini topishni birmuncha yengillashtiradi.

Masalan, $f(x)$ funksiya (a, b) da ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \quad (x_0 \in (a, b))$$

bo'lsa, u holda

$$f''(x_0) > 0$$

bo'lganda berilgan funksiya x_0 nuqtada minimumga, $f''(x_0) < 0$ bo'lganda maksimumga erishadi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

funksiyaning ekstremumlari topilsin.

$\lhd$ Avvalo berilgan funksiyaning statsionar nuqtalarini topamiz:

$$f'(x) = \left(2x + 3x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}},$$

$$f'(x) = 0, \quad 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0, \quad x_1 = -1$$

Endi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(2 + 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{4}{3}}.$$

Bu hosilaning $x_1 = -1$ nuqtadagi qiymati $f''(-1) = -\dfrac{2}{3} < 0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x_1 = -1$ nuqtada maksimumga erishadi va $\max f(x) = f(-1) = -2 + 3 = 1$ bo'ladi.$\rhd$

3°. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Funksiyaning ekstremum tushunchasidan, biror oraliqda berilgan funksiyaning shu oraliqda bir necha maksimum hamda bir necha minimum qiymatlarga ega bo‘lishi mumkinligi kelib chiqadi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. Bu funksiya Veyershtrass teoremasiga ko‘ra shu oraliqda o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bunday qiymatlar quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a, b) dagi barcha maksimum qiymatlari hamda $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ dagi eng katta qiymati bo‘ladi,

2) $f(x)$ funksiyaning (a, b) dagi barcha minimum qiymatlari hamda $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar ichida eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ dagi eng kichik qiymati bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$$

funksiyaning $[-4, 4]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

$\triangleleft$ Bu funksiyaning $(-4, 4)$ dagi maksimum va minimum qiymatlarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, \quad f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0;$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$f''(x) = (3x^2 - 6x - 9)' = 6x - 6,$$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0,$$

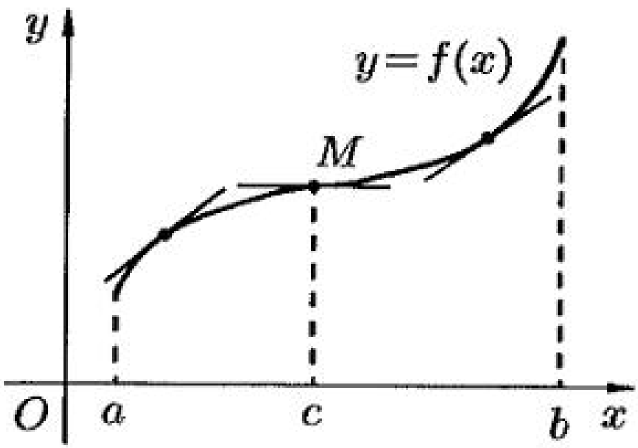
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0.$$

Demak funksiya $x_1 = -1$ nuqtada maksimumga, $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo‘lib, $\max f(x) = f(-1) = 40$, $\min f(x) = f(3) = 8$ bo‘ladi.

Bu qiymatlarni $f(-4) = -41$, $f(4) = 15$ qiymatlar bilan solishtirib, berilgan funksiyaning $[-4, 4]$ dagi eng katta qiymati 40, eng kichik qiymati esa -41 bo'lishini topamiz.▷

4°. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtalarini topishda hosilaning tatbiqi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da hosilaga ega bo'lsin. Unda funksiya grafigining har bir $(x, f(x))$ nuqtasidan o'tuvchi urinma $l(x)$ mavjud bo'ladi (61-chizma).



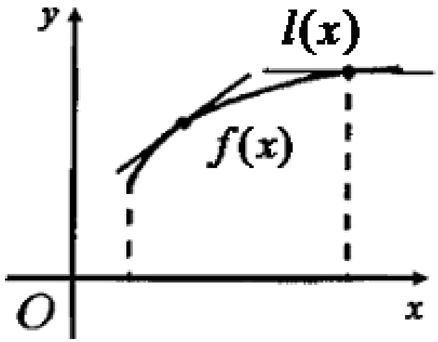
61-chizma.

Bu chizmadan, (a, b) ning ba'zi qismida $f(x)$ funksiya grafigi $l(x)$ urinmadan yuqorida, ba'zi qismida esa $l(x)$ urinmadan pastda joylashganini ko'ramiz.

3-ta'rif. Agar (a, b) intervalda $f(x)$ funksiya grafigi uning har bir nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda joylashsa, ya'ni

$$f(x) \le l(x) \quad (x \in (a, b))$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi **qavariq** deyiladi (62-chizma)

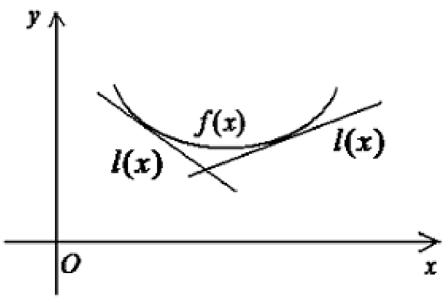


62-chizma.

4-ta’rif. Agar (a,b) intervalda $f(x)$ funksiya grafigi unung har bir nuqtasidan o‘tkazilgan urinmadan yuqorida joylashsa, ya’ni

$$f(x) \geq l(x) \quad (x \in (a,b))$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi **botiq** deyiladi (63-chizma).



63-chizma.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

4-teorema. Agar (a, b) da

$$f''(x) \leq 0$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi (a, b) da qavariq,

$$f''(x) \geq 0$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi (a, b) da botiq bo‘ladi.

5-ta’rif. Agar funksiya $x_0 - \delta < x < x_0$ oraliqda qavariq (botiq) bo‘lib, $x_0 < x < x_0 + \delta$ oraliqda botiq (qavariq) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0, f(x_0))$ **nuqtada egiladi** deyiladi. Bunda $(x_0, f(x_0))$ nuqtani $f(x)$ funksiya grafigining **egilish nuqtasi** deb ham yuritiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsin. Bu ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosila $(x_0 - \delta, x_0)$ da $f''(x) \leq 0$, $(x_0, x_0 + \delta)$ da $f''(x) \geq 0$ bo‘lsin. Unda 4-teoremaga ko‘ra $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0 - \delta, x_0)$ da qavariq, $(x_0, x_0 + \delta)$ da botiq bo‘ladi va $(x_0, f(x_0))$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.

Ayni paytda $f''(x) \leq 0$ bo‘lishda $f'(x)$ ning $(x_0 - \delta, x_0)$ da kamayuvchi, $f''(x) \geq 0$ bo‘lishdan $f'(x)$ ning $(x_0, x_0 + \delta)$ da o‘suvchi bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi. Unda

$$(f'(x))'_{x=x_0} = f''(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = e^{-x^2}$$

funksiya grafiginig qavariq, botiq bo‘lishi oraliqlari hamda egilish nuqtasi topilsin.

$\lhd$ Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})' = -2(e^{-x^2} + xe^{-x^2} \cdot (-2x)) = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}.$$

Endi $f''(x) \leq 0$, $f''(x) \geq 0$, $f''(x) = 0$ tengsizliklarni hamda tenglamani yechib, funksiya grafigining qavariq, botiq bo'lishi oraliqlarini hamda egilish nuqtasini topamiz:

$$4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} \leq 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} \leq 0 \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 0 \Rightarrow$$

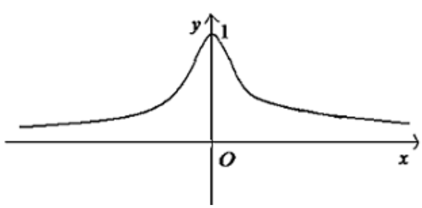
$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$-\infty < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < +\infty,$$

$$4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Demak, berilgan funksiya grafigi $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ oraliqda qavariq, $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ oraliqlarda botiq, ya'ni funksiya grafigining $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ nuqtalarida egiladi.$\rhd$

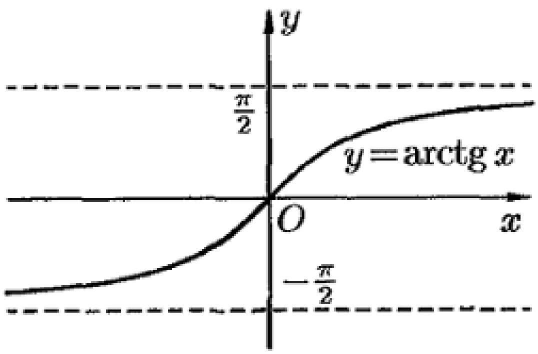


64-chizma.

5°. Funksiya grafigining asimptotalari

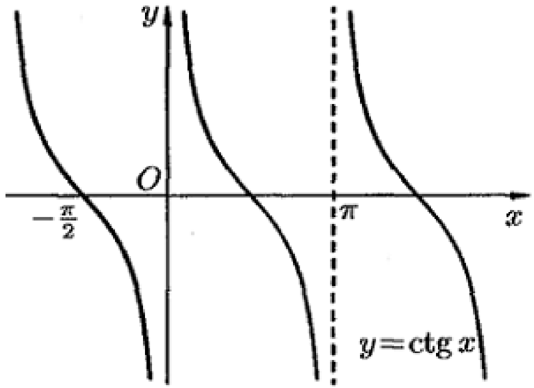
Differensiallanuvchi funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma urinish nuqtasining lokal (yetarli kichik) atrofida funksiya grafigiga $\ll$ *yaqin* $\gg$ joylashgan. Bundan biz funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalangan edik. Ba'zi amaliy masalalrda uchraydigan funksiyalar grafiklari argument x biror a (chekli yoki cheksiz son) ga yaqinlashganda biror to'g'ri chiziqqa global yaqinlashishi mumkin.

Masalan, 1) $y = \operatorname{arctg} x$ funksiya grafigi $x \to +\infty$ da $y = \dfrac{\pi}{2}$ to'g'ri chiziqqa, $x \to -\infty$ da $y = -\dfrac{\pi}{2}$ to'g'ri chiziqqa yaqinlashib boradi:



65-chizma.

2) $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya grafigi $x \to \pi \pm 0$da $x = \pi$ to'g'ri chiziqqa, $x \to \pm 0$ da $x = 0$ to'g'ri chiziqqa yaqinlashadi:



66-chizma.

3) $y = x - \dfrac{1}{x}$ funksiya grafigi $x \to \infty$ da $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa yaqinlashadi.

Ta’rif. Agar biror l to‘g‘ri chiziq uchun

$$\lim_{x \to a} |f(x) - l| = 0$$

(bu yerda $|f(x) - l|$ – funksiya grafigidagi nuqta bilan l to‘g‘ri chiziq orasidagi masofa) tenglik bajarilsa, l to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya uchun **asimptota** deyiladi.

Odatda $y = c$ to‘g‘ri chiziqlar gorizontal, $x = c$ to‘g‘ri chiziqlar vertikal, $y = kx + b(k \neq 0)$ to‘g‘ri chiziqlar og‘ma to‘g‘ri chiziqlar deyiladi. Ularga mos ravishda asimptotalar ham **vertikal**, **gorizontal** va **og‘ma asimptotalar** deyiladi.

Qanday shartlar bajarilganda asimptotalar mavjud bo‘ladi? Masalan, $y = x^2$ parabola, $y = \sin x$ sinusoidlar uchun hech qanday asimptota mavjud emas.

1-teorema. Agar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$$

bo‘lsa u holda

$$y = kx + b$$

to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo‘lsin. Ravshanki, $x \to \infty$ da

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b \quad \Rightarrow \quad (f(x) - kx) - b = \alpha(x) \to 0.$$

Keyingi tenglikdan

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo‘lishi kelib chiqadi, bunda $x \to \infty$ da $\alpha(x) \to 0$.$\rhd$

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$$

funksiya grafigining og‘ma asimptotasi topilsin.

$\lhd$ Yuqoridagi 1-teoremadan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2 + 2x}{x - 1} = 3.$$

Demak, og‘ma asimptota $y = 2x + 3$ bo‘ladi.$\rhd$

6°. Funksiya grafigini yasash

Ma’lumki, funksiyalar turli jarayonlarning matematik modellarini ifodalaydi. Jarayonlarning qanday kechishini aniqlashda, ya’ni funksiyalarning o‘zgarish xarakterini tasavvur qilishda ularning grafiklarini bilish muhimdir.

Funksiya grafigini yasash uchun, umuman aytganda quyidagi ma'lumotlarga ega bo'lish kerak bo'ladi:

1). Funksiyaning aniqlanish sohasi.

2). Funksiyaning juft, toq hamda davriyligi.

3). Funksiyaning o'suvchi, kamayuvchi oraliqlari hamda ekstremumi.

4). Funksiya grafigining qavariqligi va botiqlik oraliqlari hamda egilish nuqtasi.

5). Asimptotalari.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

funksiya grafigini yasalsin.

$\lhd$ 1). Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$ dan iborat.

2). $f(x)$ funksiya juft funksiya bo'ladi, chunki,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x).$$

Demak, berilgan funksiyaning grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $[0, +\infty)$ da aniqlash yetarli.

3). Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Ravshanki,

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Demak, $x = 0$ berilgan funksiyaning statsionar nuqtasi va $f''(0) = 4 > 0$ bo'lgani uchun $x = 0$ da funksiya minimumga erishib,

$$\min f(x) = -1$$

bo‘ladi. Ayni paytda $x \in [0, +\infty)$ da

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)} \geq 0$$

bo‘ladi. Bundan, berilgan funksiyaning $[0, +\infty)$ da o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi.

4). Ravshanki,

$$f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$f''(x) = \frac{4(1-x^2\cdot 3)}{(x^2+1)^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty,$$

$$f''(x) = \frac{4(1-2x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Demak, berilgan funksiya grafigi $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ oraliqda botiq, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ oraliqda qavariq bo‘lib, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ nuqta esa grafikning egilish nuqtasi bo‘ladi.

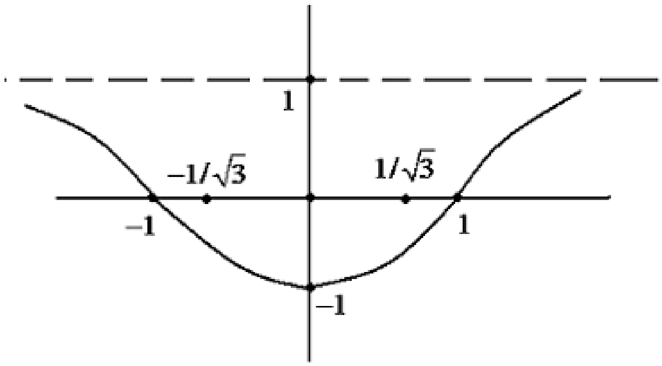
5). Ushbu

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

munosabatlardan $y = 1$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining asimptotasi ekanini topamiz (67-chizma).

Yuqorida keltirilgan ma’lumotlardan foydalanib berilgan funksiya grafigini chizamiz:



67-chizma.

3°. Hosila yordamida yechiladigan ba'zi masalalar

1-masala. Radiusi r, balandligi h ga teng doiraviy silindr shakldagi yopiq idishning to'la sirti S ga teng. r va h lar qanday munosabatda idishning hajmi eng katta bo'ladi.

$\lhd$ Ma'lumki, idishning to'la sirti

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

bo'ladi. Bu tenglikdan topamiz:

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r, \tag{1}$$

$$\frac{S}{r^2} = 2\pi + 2\pi\frac{h}{r}. \tag{2}$$

Ma'lumki, qaralayotgan idishning hajmi

$$V = \pi r^2 h$$

bo'ladi. Bu tenglikdagi h ning qiymatini qo'ysak, unda ushbu

$$V = \frac{S}{2}r - \pi r^3 = V(r)$$

funksiya hosil bo'ladi. Uning maksimumini topish maqsadida hosilalarini hisoblaymiz:

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2,$$

$$V''(r) = -6\pi r.$$

Ravshanki, $V'(r) = 0$, $\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Bu statsionar nuqtada

$$V''\left(\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right) = -6\pi \cdot \sqrt{\frac{S}{2\pi}} < 0$$

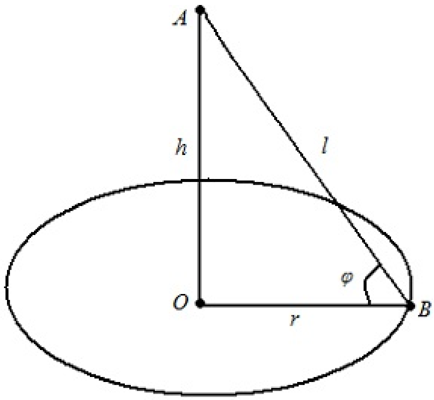
bo'lganligi sababli, $V(r)$ funksiya $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ da maksimumga erishadi. Endi (2) tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{S}{\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right)^2} = 2\pi + 2\pi \cdot \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad 6\pi = 2\pi + 2\pi \cdot \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{r} = 2.$$

Demak, $h = 2r$. Shunday qilib, silindrsimon yopiq idishning balandligini asos diametriga teng qilib olinganda, unung hajmi eng katta bo'ladi.$\rhd$

2-masala. Doira shakldagi stolning markazidan qanday balandlikda elektr lampasi osilganda stol sirtidagi yoritishi eng katta bo'ladi?

$\lhd$ Aytaylik, doira shakldagi stolning radiusi berilgan bo'lib, u r ga teng bo'lsin. Elektr lampasi esa A nuqtada joylashsin (68-chizma).



68-chizma.

Fizika kursidan ma'lumki, yoritilish

$$J = k \cdot \frac{\sin\varphi}{l^2}$$

bo'ladi, bunda k – o'zgarmas, proporsionallik koeffitsiyent. Ravshanki,

$$\cos\varphi = \frac{r}{l}.$$

Natijada yoritish ushbu

$$J = \frac{k}{r^2}\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi$$

ko'rinishga keladi. Bu $J = J(\varphi)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish uchun, uning hosilasini hisoblaylik:

$$J'(\varphi) = \frac{k}{r^2}(\cos^3\varphi - 2\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi).$$

Endi $J'(\varphi) = 0$ tenglikdan

$$\cos\varphi = 0; \quad \cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 0$$

natijaga kelamiz. $\cos\varphi = 0$ tenglama yechimi $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ funksiyaning minimum qiymatini, ya'ni A nuqta cheksiz uzoqlikda joylashgan holini anglatadi. Ikkinchi tenglamadan esa

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ekanligini topamiz. $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ fizik ma'noga ega emas. Demak,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35,3^0$$

bo'lganda $J(\varphi)$ o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Javobi:

$$J_{max} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

II qism. Aniqmas va aniq integral

I bob. Aniqmas integral

Funksiyaning hosilasini topish (topish amali) uni differensiallash, funksiyaning biror nuqtada hosilaga ega bo‘lishini esa, uni shu nuqtada differensiallanuvchi deyilishini aytib o‘tgan edik.

Ko‘p hollarda funksiyaning hosilasiga ko‘ra funksiyaning o‘zini topish lozim bo‘ladi. Masalan, harakatdagi moddiy nuqtani tezligiga ko‘ra harakat qonunini topishga to‘g‘ri keladi. Bunday masalalar differensiallash amaliga teskari bo‘lgan integrallash (integrallash amali) tushunchasiga olib keladi.

1-§. Aniqmas integral tushunchasi

Aytaylik, $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalari (a, b) da berilgan bo‘lib, $F(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar

$$F'(x) = f(x) \;\; (x \in (a, b))$$

bo‘lsa, (a, b) da $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning **boshlang‘ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2 \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

bo‘ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

Agar (a, b) da $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$F(x) + C$$

ham $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi, bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas son.

$\lhd$ Ma’lumki,

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Unda

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

bo‘lib, $F(x)+C$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi ekanini topamiz.$\rhd$

Aytaylik, (a, b) da $F(x)$ va $G(x)$ funksiyalari bitta $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin:

$$F'(x) = f(x),$$

$$G‘(x) = f(x).$$

Bu tengliklardan

$$F'(x) = G‘(x)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Unda

$$G(x) = F(x) + C$$

bo‘ladi, bunda C – o‘zgarmas son.

Shunday qilib, berilgan $f(x)$ funksiyaning bitta boshlang‘ich funksiyasi $F(x)$ ma’lum bo‘lganda uning boshqa barcha boshlang‘ch funksiyalari $F(x)$ ga ixtiyoriy o‘zgarmas sonni qo‘shishdan hosil bo‘ladi va

$$F(x) + C$$

ifoda $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalarning umumiy ko‘rinishini ifodalaydi.

2-ta'rif. Ushbu $F(x)+C$ ifoda $f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int x^6 dx$$

integral topilsin.

$\triangleleft$ Bu aniqmas integral shunday funksiyaki, (aniqrog'i, shunday funksiyalar to'plamiki) uning hosilasi (to'plamdagi har bir funksiyaning hosilasi) integral ostidagi funksiyaga, ya'ni x^6 ga teng. Ravshanki,

$$F(x) = \frac{x^7}{7}$$

deyilsa, unda

$$F'(x) = \left(\frac{x^7}{7}\right)' = \frac{1}{7} \cdot 7x^6 = x^6$$

bo'ladi. Demak,

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C. \triangleright$$

2. Ushbu

$$\int e^{3x} dx$$

aniqmas integral topilsin.

$\triangleleft$ Quyidagi

$$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$$

funksiya uchun

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3} e^{3x}\right)' = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C. \triangleright$$

Keyinchalik, aniqmas integral iborasi o‘rniga integral so‘zini ishlataveramiz.

1-eslatma. $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ch funksiyasi bo‘ladigan oraliq ko‘rsatilmagan holda oraliq sifatida funksiyaning aniqlanish sohasi tushuniladi.

2-eslatma. Har bir uzluksiz funksiyaning aniqmas integralining mavjud bo‘lishi keyinchalik ko‘rsatiladi.

2-§. Asosiy formulalar

Quyidagi eng sodda funksiyaning integrallarini keltiramiz:

1. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$, bunda C – o‘zgarmas, chunki, $(x + C)' = 1$ bo‘ladi.

2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $(n \neq -1)$ bo‘ladi, chunki $n \neq -1$ bo‘lganda $\displaystyle\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\right)' = x^n$ bo‘ladi. Agar $n = -1$ bo‘lib, $x > 0$ bo‘lganda
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$$
chunki
$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x};$$
$x < 0$ bo‘lganda
$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$
chunki $(\ln(-x) + C)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$ bo‘ladi. Umuman,
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$, chunki

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x \cdot \ln a}{\ln a} = a^x$$

bo'ladi.

4. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$, chunki $(e^x + C)' = e^x$.

5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$, chunki $(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x$.

6. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$, chunki $(\sin x + C)' = \cos x$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, chunki $(\arcsin x + C)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, chunki $(\operatorname{arctg} x + C)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Shuningdek,

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

12. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm k}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm k}| + C,$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ bo'ladi.

Integralning sodda xossalari

Aniqmas integrallarni hisoblashda ko'p foydalaniladigan xossalarni keltiramiz. (Aniqmas integral bilan bog'liq tengliklar o'zgarmas son aniqligidagi tengliklar deb qaraladi).

1). Agar

$$\int f(x)dx = F(x), \quad \int g(x)dx = G(x)$$

bo'lsa, u holda

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) \tag{1}$$

bo'ladi.

$\lhd$ Ravshanki,

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x),$$

$$\int g(x)dx = G(x) \quad \Rightarrow \quad G'(x) = g(x).$$

Unda

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

bo'lib, bu tenglikdan

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.$\rhd$

(1) tenglik quydagicha

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

yozilib, u yig'indining integrali integrallar yig'indisiga teng bo'lish qoidasini ifodalaydi.

2). Agar

$$\int f(x)dx = F(x)$$

bo‘lsa, u holda

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x) \tag{2}$$

bo‘ladi, bunda k – o‘zgarmas son $(k \neq 0)$.

$\lhd$ Ravshanki,

$$\int f(x)dx = F(x) \;\; \Rightarrow \;\; F'(x) = f(x).$$

Unda

$$(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

bo‘lib,

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x)$$

bo‘ladi. $\rhd$

(2) tenglik quydagicha

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

yozilib, u o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi ostidan chiqarish qoidasini ifodalaydi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int (10x^7 + 2x^5 - 7)dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Asosiy formulalar hamda integralning xossalaridan foydalanib berilgan integralni hisoblaymiz:

$$\int (10x^7 + 2x^5 - 7)dx = \int 10x^7dx + \int 2x^5dx - \int 7dx = 10 \int x^7dx +$$

$$+2 \int x^5dx - 7 \int dx = 10 \cdot \frac{x^8}{8} + 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 7x + C = \frac{5}{4}x^8 + \frac{1}{3}x^6 - 7x + C. \rhd$$

2. Ushbu

$$\int \frac{x^4 - x^3 + x + 1}{x^5} dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{x^4 - x^3 + x + 1}{x^5} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^5} - \frac{x^3}{x^5} + \frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx + \int x^{-5} dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + C. \rhd$$

3. Ushbu

$$\int x \sqrt[n]{x} dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integral quyidagisha hisoblanadi:

$$\int x \sqrt[n]{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{n}} dx = \int x^{\frac{1}{n}+1} dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1+1}}{\frac{1}{n}+1+1} + C = \frac{n}{2n+1} x^2 \cdot \sqrt[n]{x} + C. \rhd$$

3-§. Integrallash usullari

O‘zgaruvchini almashtirib integrallash usuli

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiyaning integrali

$$\int f(x) dx$$

berilgan bo‘lib, uni hisoblash kerak bo‘lsin.

Ba’zan, o‘zgaruvchi x ni almashtirish natijasida integralni hisoblash oson bo‘ladi.

Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin:

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Unda

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

bo‘ladi.

Endi $x = \varphi(t)$ deylik, bunda $\varphi(t)$ funksiya uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega.

Uhbu $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan hamda (1) dan foydalanib topamiz:

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Keyingi tenglikdan

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \tag{3}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

(2) va (3) munosabatlardan $x = \varphi(t)$ bo‘lganda

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{4}$$

bo‘lishini topamiz.

(4) formula **integralda o‘zgaruvchini almashtirish formulasi** deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int (2+3x)^{100}dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda

$$2 + 3x = t$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x = \frac{t-2}{3}, \;\; dx = \frac{1}{3}dt$$

bo‘lib,

$$\int (2+3x)^{100}dx = \int t^{100}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{100}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{101}}{101}+c = \frac{1}{303}(2+3x)^{101}+C$$

bo‘ladi. $\triangleright$

2. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} \quad (a>0)$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$x=\sqrt{a}\cdot t$$

aimashtirish bajaramiz. Unda $dx=\sqrt{a}\cdot dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int \frac{\sqrt{a}\cdot dt}{\sqrt{a-at^2}} = \int \frac{\sqrt{a}dt}{\sqrt{a}(\sqrt{1-t^2})} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C$$

bo‘ladi. $\triangleright$

3. Ushbu

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$x^2+x+1=t$$

almashtirish bajaramiz. Bu tenglikning har ikki tomonining differensiallarini hisoblab topamiz.

$$d(x^2+x+1)=dt,$$

$$(x^2+x+1)'dx=dt,$$

$$(2x+1)dx=dt.$$

Unda

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C$$

bo‘lib,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln|x^2+x+1| + C$$

bo‘ladi.$\triangleright$

4. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$\sqrt{x^2+a}+x=t$$

almashtirish bajaramiz. Bu tenglikning har ikki tomonining differensiallarini topamiz.

$$d\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)=dt,$$

$$\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)'\cdot dx=dt,$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot(2x)+1\right)dx=dt,$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)dx=dt,\quad \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}dx=dt.$$

Keyingi tenglikdan

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x}=\frac{dt}{t}$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+a}+x\right|+C$$

bo‘ladi.$\triangleright$

5. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Avvalo

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$$

ekanini e'tiborga olib, berilgan integralni

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ng $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$$

bo'lib,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$$

bo'ladi. $\triangleright$

Eslatma. Ixtiyoriy o'zgarmas a da

$$x + a,$$

$$ax \quad (a \neq 0)$$

lar uchun

$$d(x+a) = dx,$$

$$d(ax) = a dx, \quad dx = \frac{1}{a} d(ax) \quad (a \neq 0)$$

bo'lishi, ba'zi integrallarni hisoblashni birmuncha yengillashtiradi. Bu holda

$$\int f(x) dx = \int f(x) d(x+a),$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax)$$

bo'ladi. Masalan,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C,$$

$$\int \sqrt{x-3}\, dx = \int \sqrt{x-3}\, d(x-3) = \int (x-3)^{\frac{1}{2}} d(x-3) = \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$\int \cos 6x dx = \frac{1}{6} \int \cos 6x d(6x) = \frac{1}{6} \sin 6x + C,$$

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$(a, b$ – o‘zgarmas sonlar, $a \neq 0)$.

4-§. Bo‘laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar uzluksiz u' va v' hosilalarga ega bo‘lsin.

Ma’lumki,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int (u \cdot v)'dx = \int u' \cdot vdx + \int u \cdot v'dx.$$

Agar

$$\int (u \cdot v)'dx = u \cdot v$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, keyingi tenglikdan

$$\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int v \cdot u'dx \tag{1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. (1) tenglikni quyidagicha ham

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{1'}$$

yozish mumkin.

$(1')$ formula **bo‘laklab integrallash formulasi** deyiladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int xe^x dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda $u = x$, $dv = e^x dx$ deb,

$$du = dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

bo‘lishni topamiz. Bo‘laklab integrallash formulasi $(1')$ ga ko‘ra

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C. \triangleright$$

2. Ushbu

$$\int \ln x dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda $u = \ln x$, $dv = dx$ deyilsa, unda

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = x$$

bo‘ladi. $(1')$ formuladan foydalanib topamiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C. \triangleright$$

3. Ushbu

$$\int x \sin x dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda $u = x$, $dv = \sin x dx$ deyilsa, unda

$$du = dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

bo‘ladi. $(1')$ formuladan foydalanib topamiz:

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx = -x \cos x + \sin x + C. \triangleright$$

4. Ushbu

$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$ deb olamiz. Unda

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = x$$

bo‘lib,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = x \operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

bo‘ladi.$\triangleright$

5. Ushbu

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \ \ (n = 1, 2, 3, ...), \ \ a \neq 0$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ $n = 1$ bo‘lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2[1+(\frac{x}{a})^2]} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}dx}{1+(\frac{x}{a})^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

bo‘ladi.

Endi berilgan integralda

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx$$

deb topamiz:

$$du = d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^n = d((x^2+a^2)^{-n}) = -n(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2xdx =$$

$$= -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx, \ \ v = x.$$

Bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra

$$J_n = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\cdot x + 2n\int x \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx \tag{2}$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx -$$

$$-\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= J_n - a^2 J_{n+1}. \tag{3}$$

(2) va (3)- munosabatlardan topamiz:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}.$$

Keyingi tenglikdan esa

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n \tag{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Odatda, (4) tenglik **rekurrent formula** deyiladi. Ma'lumki,

$$J_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

(4) formula va J_1 ning qiymatidan foydalanib,

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

bo'lishini topamiz. (4) formula va J_2 ning qiymatidan foydalanib J_3 topiladi va hokazo.▷

5-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

1°. Sodda kasrlar va ularni integrallash

Ushbu

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^n},\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

funksiyalar **sodda kasrlar** deyiladi, bunda A, B, C, p, q $-$ o‘zgarmas sonlar, n $-$ natural son va x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas. Bu funksiyalarning integrallarini hisoblaymiz.

Ravshanki,

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\cdot \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= \frac{A}{1-n}\cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C\,(n\neq 1).$$

Endi

$$J = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

integralni hisoblaymiz. Integral ostidagi x^2+px+q kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q = x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = \Big(x+\frac{p}{2}\Big)^2 + a^2,$$

bunda $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4} > 0$. Natijada

$$J = \int \frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}dx$$

bo‘ladi. Bu integralda $x = t - \dfrac{p}{2}$ almashtirish bajaramiz. Unda

$$J = \int \frac{B(t-\frac{p}{2})+C}{t^2+a^2}dt$$

bo‘ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{B(t-\frac{p}{2})+C}{t^2+a^2}dt = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \Big(C-\frac{p}{2}B\Big)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= B\int \frac{d(t^2+a^2)}{2(t^2+a^2)} + \Big(C-\frac{p}{2}B\Big)\cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} = B\cdot \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+$$

$$+\Big(C-\frac{p}{2}B\Big)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Demak,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$
$$+2\left(C-\frac{p}{2}B\right)\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \qquad (*)$$

bo‘ladi.

Endi

$$J_n=\int\frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^n}dx\ (n>1)$$

integralni hisoblaymiz. Bu integralni hisoblashda yuqoridagi kabi belgilash va almashtirishlar bajaramiz.

Natijada

$$J_n=B\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)n}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{B}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}+$$
$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+$$
$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

bo‘ladi, bunda

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

integral rekkurent formuladan topiladi.

Masalan,

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

bo‘ladi.

2°. To‘g‘ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyish

Faraz qilaylik,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

kasr ratsional funksiya to‘g‘ri kasr sifatida berilgan bo‘lsin, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ lar ko‘phadlar bo‘lib, $P(x)$ ko‘phadning darajasi $Q(x)$ ko‘phadning darajasidan kichik. Aytaylik, bu to‘g‘ri kasrning mahraji $Q(x)$ ko‘phad quyidagicha

$$Q(x) = (x-a)^n(x-b)^m.....(x^2+px+q)^r \cdot (x^2+\bar{p}x+\bar{q})^s$$

ifodalansin, bunda a, b, ..., p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ $-$ haqiqiy sonlar, n, m, ..., r, s $-$ natural sonlar.

U holda

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + ... + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{B_{m-1}}{(x-b)^{m-1}} + ... +$$
$$+\frac{B_1}{x-b} + ... + \frac{C_r x + D_r}{(x^2+px+q)^r} + + \frac{C_{r-1}x + D_{r-1}}{(x^2+px+q)^{r-1}} + .. + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} +$$
$$+\frac{E_s x + F_s}{(x^2+\bar{p}x+\bar{q})^s} + \frac{E_{s-1}x + F_{s-1}}{(x^2+\bar{p}x+\bar{q})^{s-1}} + ... + \frac{E_1 x + F_1}{x^2+\bar{p}x+\bar{q}} \tag{1}$$

bo‘ladi, bunda $A_1, .., A_n, ..B_1, ..B_m, .., C_r, D_r..., C_1, D_1, E_s, F_s, ..E_1, F_s$ $-$ o‘zgarmas sonlar.

(1) tenglik to‘g‘ri kasrni sodda kasrlarga yoyilishini ifodalaydi.

(1) tenglikning o‘ng tomonidagi o‘zgarmas sonlar quyidagicha topiladi:

1) (1) tenglikni har ikki tomoni $Q(x)$ ga ko‘paytiriladi. Natijada mahrajdan qutilib

$$P(x) = R(x)$$

tenglikka kelinadi;

2) bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlar tenglashtiriladi. Natijada o‘zgarmas sonlarni topish uchun tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi;

3) tenglamalar sistemasi yechilib, izlanayotgan o‘zgarmas sonlar topiladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}$$

kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◁ Avvalo berilgan kasrning mahrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3-2x^2-x+2 = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

So‘ng (1) munosabatdan foydalanib, berilgan kasrni quyidagi

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

ko‘rinishida yozamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini $(x-1)(x+1)(x-2)$ ga ko‘paytirib topamiz:

$$5-7x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1) =$$

$$= (A+B+C)x^2 - (A+3B)x - 2A + 2B - C.$$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish natijasida

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A+3B=7, \\ -2A+2B-C=5 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Uni yechib topamiz:

$$A=1, \quad B=2, \quad C=-3.$$

Natijada

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2}$$

bo‘ladi.▷

2. Ushbu

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}$$

kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◁ Ravshanki,

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}.$$

(1) tenglikka ko‘ra

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan

$$x^2+1 = A(x^2-x) + B(x-1) + Cx^2$$

va

$$\begin{cases} A+C=1 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{cases}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu sistemani yechib

$$A=-1, B=-1, C=2$$

hamda

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

bo‘lishni topamiz. $\triangleright$

3. Ushbu

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$$

kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

$\triangleleft$ (1) munosabatga ko‘ra

$$\frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$x^2+2x-1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2+(C-B)x+A-C$$

va

$$\begin{cases} A+B=1, \\ C-B=2, \\ A-C=-1 \end{cases}$$

bo‘lishni topamiz. Sistemaning yechimi $A = 1, \quad B = 0, \quad C = 2$ bo‘lib,

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1}$$

bo‘ladi. $\triangleright$

4. Ushbu

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

$\triangleleft$ (1) tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Keyingi tenglikda mahrajdan qutilib, x ning oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab ushbu

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ E + D = 0, \\ 2A + B + E + D = 3, \\ B + C + E + D = 0, \\ A + C + E = 1 \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Uni yechib topamiz:

$$A = 1, \;\; B = 1, \;\; C = -1, \;\; D = -1, \;\; E = 1.$$

Demak,

$$\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{-x+1}{(x^2+1)^2}.\triangleright$$

3°. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ratsional funksiyani qaraylik, bunda $P(x)$ va $Q(x)$ – ko‘phadlar.

Agar

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

da suratidagi ko‘phadning darajasi mahrajdagi ko‘phadning darajasidan katta bo‘lsa, uning suratini mahrajiga bo‘lib, butun ratsional funksiya hamda to‘g‘ri kasr yig‘indisi ko‘rinishda quyidagicha ifodalab olinadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

U holda

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

bo‘ladi, bunda $\int R(x)dx$ – butun ratsional funksiyaning integrali sifatida oson hisoblanadi, $\displaystyle\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ to‘g‘ri kasrning integrali, integral ostidagi to‘g‘ri kasrni sodda kasrga yoyib hisoblanadi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Integral ostidagi to‘g‘ri kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x\cdot(x+2)^2,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2},$$

$$3x^2+8 = (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A,$$

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A=8 \end{cases}$$

$$A=2, \quad B=1, \quad C=-10,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Natijada

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = \int \left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right)dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x+2)}{x+2} - 10\int (x+2)^{-2}d(x+2) =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C$$

bo‘ladi.

2. Ushbu

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx$$

integral hisoblansin.

◁ Integral ostidagi to‘g‘ri kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

$$x^3+4x^2-2x+1 = A(x^3+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+x) =$$

$$= (A+B+C)x^3 + (C+D+B)x^2 + (B+D)x + A,$$

$$A+B+C=1,$$

$$C+D-B=4,$$

$$B+D=-2,$$

$$A=1,$$

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=2, \quad D=0,$$

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2-x+1}.$$

Natijada

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx = \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{d(x+1)}{x+1} + 2\int \frac{xdx}{x^2-x+1} =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right] + C$$

bo'ladi, bunda

$$\int \frac{xdx}{x^2-x+1},$$

integralni hisoblashda $(*)$ munosabatdan foydalaniladi.$\triangleright$

6-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Ko'p hollarda irratsional hamda trigonometrik funksiyalarni integrallash o'zgaruvchilarini almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi.

1) aytaylik, $f(x)$ funksiya x va uning turli kasr darajalari ustida arifmetik amallar bajarilishidan yuzaga kelsin. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[5]{x}}.$$

Bunday funksiyalarni integrallash

$$x = t^\alpha$$

almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi, bunda α son $f(x)$ ifodasidagi x ning darajalarida qatnashgan kasrlar mahrajlarining eng kichik umumiy karralisi.

Misollar 1. Ushbu

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Integral ostidagi funksiya

$$\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{(1+x^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{2}}}$$

ifodasidagi x ning darajalari $\frac{1}{2}$ va $\frac{1}{3}$ bo'lib, bu kasrlar mahrajlari 2 va 3 larning eng kichik umumiy karralisi 6 ga teng. Binobarin

$$x = t^6$$

almashtirishi lozim. Unda $dx = 6t^5dt$ bo'lib

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3}$$

bo'ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{6t^5dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

Demak,

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = 6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C. \rhd$$

2. Ushbu

$$\int \frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda $\sqrt[6]{x} = t$, ya'ni $x = t^6$ almashtirish bajaramiz. Unda

$$\sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x^2} = t^4, \quad dx = 6t^5dt$$

bo'lib,

$$\int \frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x} = \int \frac{6(t^6-1)t^5dt}{(t^3+t^4)t^6} = 6\int \frac{t^6-1}{t^4(1+t)}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t| + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3}\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + C\right)$$

bo'ladi.$\rhd$

2) aytaylik, $f(x)$ funksiya x va $ax+b$ ikki hadning (a, b – o'zgarmas sonlar) turli kasr darajalari ustida arifmetik amallar bajarilishidan hosil bo'lsin.

Masalan,

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x+1}},\quad f(x)=\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}},\quad f(x)=\frac{\sqrt{2x-5}}{1+\sqrt[3]{2x-5}}.$$

Bunday funksiyalarni integrallash

$$ax+b=t^{\alpha}$$

almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi, bunda α son $f(x)$ ifodasidagi $ax+b$ larning darajalarida qatnashgan kasrlar mahrajlarining eng kichik umumiy karralisi.

Misol. Ushbu

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1)\sqrt{3x+1}}$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda

$$3x+1=t^6$$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$dx=\frac{1}{3}\cdot 6t^5dt,\quad \sqrt[3]{3x+1}=t^2,\quad \sqrt{3x+1}=t^3$$

bo‘lib,

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1)\sqrt{3x+1}}=2\int\frac{t^5dt}{(t^2-1)t^3}$$

bo‘ladi. Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int\frac{t^5dt}{(t^2-1)t^3}=\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int 1dt+\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=t-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=t-\frac{1}{2}\left(\int\frac{d(t+1)}{t+1}-\int\frac{d(t-1)}{t-1}\right)=t-\frac{1}{2}\ln|\frac{t+1}{t-1}|+C.$$

Natijada

$$\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1)\sqrt{3x+1}}=2\left(\sqrt[6]{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt[6]{3x+1}-1}\right|\right)+C$$

bo'ladi.$\triangleright$

3) aytaylik, $f(x)$ funksiya x va

$$\frac{ax+b}{cx+d} \quad (a,b,c,d- \ \text{sonlar}, \ ad \neq bc)$$

ning turli kasr darajalari ustida arifmetik amallar bajarilishidan hosil bo'l-sin. Masalan,

$$f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}, \quad f(x)=\frac{\sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}}}{(2+x)^2(3-x)}, \quad f(x)=\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

Bunday funksiyalarni integrallash

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\alpha}$$

almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi, bunda α son $f(x)$ ifodasidagi $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ larning darajalarida qatnashgan kasrlar mahrajlarining eng kichik umumiy karralisi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$\frac{1+x}{x}=t^2$$

almashtirish bajaramiz. U holda

$$x=\frac{1}{t^2-1}, \quad dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$$

bo'lib,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=\int (t^2-1)\cdot t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$$

bo'ladi. Keyingi integralni hisoblaymiz:

$$\int (t^2-1)t\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$

$$= -2\left(t + \int \frac{dt}{t^2 - 1}\right) = -2\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C.$$

Natijada

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1\right)^2\right| + C$$

bo‘ladi. $\triangleright$

2. Ushbu

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{dx}{1-x}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

bo‘lib,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x}dx = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C.$$

Demak,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{dx}{1-x} = 2\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + C. \triangleright$$

4) Aytaylik, $f(x)$ funksiya x va $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (a, b, c — o‘zgarmas sonlar) ustida arifmetik amallar bajarilishidan hosil bo‘lsin.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1}{x\sqrt{x^2+x+1}}, \quad f(x) = \frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Bunday funksiyalarni integrallashda:

a) $a > 0$ bo'lganda

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} = t$$

almashtirish bilan,

b) $c > 0$ bo'lganda

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

almashtirish bilan,

d) $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad haqiqiy α va β ildizlarga ega bo'lganda

$$\sqrt{ax^2 bx + c} = t(x - \alpha)$$

almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi.

Misollar. 1.Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Bu integralda

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x = t$$

almashtirish bajaramiz (chunki, $a = 1 > 0$).

Unda

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x = t, \quad \sqrt{x^2 + 6x + 5} = x + t$$

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 2xt + t^2, \quad (6 - 2t)x = t^2 - 5,$$

$$x = \frac{t^2 - 5}{6 - 2t},$$

$$dx = \left(\frac{t^2 - 5}{6 - 2t}\right)' \cdot dt = 2\frac{-t^2 + 6t - 5}{(6 - 2t)^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} = \frac{-t^2 + 6t - 5}{6 - 2t}$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} = \int \frac{6-2t}{-t^2+6t-5} \cdot 2\frac{-t^2+6t-5}{(6-2t)^2}dt = \int \frac{2dt}{6-2t} =$$

$$= -\int \frac{d(3-t)}{3-t} = -\ln|3-t| + C$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} = -\ln\left|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}\right| + C. \quad \rhd$$

2.Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda

$$\sqrt{-x^2-3x+4} = xt+2$$

almashtirish bajaramiz (chunki, $c=4>0$)

Unda

$$\sqrt{-x^2-3x+4} = xt+2, \quad -x^2-3x+4 = x^2t^2+4xt+4$$

$$-x-3 = xt^2+4t, \quad x = -\frac{4t+3}{1+t^2}$$

$$dx = 2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}dt, \quad \sqrt{-x^2-3x+4} = -\frac{2t^2+3t-2}{t^2+1}$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}} = \int -\frac{t^2+1}{2t^2+3t-2} \cdot 2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\,\mathrm{arctg}\, t + C = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x} + C$$

bo‘ladi.$\rhd$

3. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

integral hisoblansin.

$\triangleright$ Ravshanki,

$$-x^2+4x-3=(x-1)(3-x).$$

Demak, $-x^2+4x-3$ kvadrat uchhad $\alpha=1$, $\beta=-3$ haqiqiy ildizlarga ega. Shuni e'tiborga olib, berilgan integralda

$$\sqrt{-x^2+4x-3}=(x-1)t$$

almashtirish bajaramiz.

Unda

$$\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{(x-1)(3-x)}=(x-1)t,$$

$$(x-1)(3-x)=(x-1)^2\cdot t^2,\quad 3-x=(x-1)t^2,\quad (t^2+1)x=t^2+3,$$

$$x=\frac{t^2+3}{t^2+1}\left(t=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}\right),\ dx=-\frac{4t}{t^2+1}dt,\ \sqrt{-x^2+4x-3}=\frac{2t}{t^2+1}$$

bo'lib,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot(-\frac{4t}{t^2+1})dt=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=-2\operatorname{arctg}t+C=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+C$$

bo'ladi.$\triangleright$

7-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ lar ustida arifmetik amallar bajarilishidan hosil bo'lsin.

Masalan,

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5},\ f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x},\ f(x)=\frac{\sin x+4\cos x}{\sin^2 x}.$$

Bunday funksiyalarni integrallash

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \quad (x = 2\operatorname{arctg} t)$$

almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keladi. Bu almashtirish yordamida $\sin x$, $\cos x$ lar t ning ratsional funksiyalarga aylanadi:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Misollar. 1. Ushbu

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$$

integral hisoblansin.

◁ Bu integralda

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} =$$

$$= 2\int (t+3)^{-2}d(t+3) = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$$

bo‘ladi.▷

2. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

integral hisoblansin

◁ Bu integralda ham $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C$$

bo'lishini topamiz.▷

Ayrim hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda

$$\sin x = t, \quad \cos x = t, \quad tgx = t$$

almashtirishlar qulay bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\int \frac{1}{cos^6 x} dx$$

integral hisoblansin.

◁ Bu integralda $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish bajaramiz. Unda

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \quad \frac{1}{\cos^4 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 = (1 + t^2)^2$$

bo'lib,

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + t^2)^2 dt =$$

$$= \int (1 + 2t^2 + t^4) dt = t + 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$$

bo'ladi.▷

Ushbu

$$\int \sin nx \sin mx \, dx, \quad \int \cos nx \cos mx \, dx$$

va

$$\int \sin nx \cos mx \, dx$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda quyidagi

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)], \tag{1}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

formulalardan foydalaniladi.

Misol. Ushbu

$$\int \sin nx \cdot \sin mx\, dx$$

integral hisoblansin.

◁ (1) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \int \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(n-m)x\, dx - \int \cos(n+m)x\, dx\right].$$

a) aytaylik, $n \neq m$ bo‘lsin. U holda

$$\int \cos(n-m)x\, dx = \int \cos(n-m)xd((n-m)x)\cdot\frac{1}{n-m} = \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x,$$

$$\int \cos(n+m)x\, dx = \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x$$

bo‘lib,

$$\int \sin nx\cdot\sin mx\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]+C$$

bo‘ladi.

b) aytaylik, $n = m$ bo‘lsin. U holda

$$\int \cos(n-m)x\, dx = \int dx = x,$$

$$\int \cos(n+m)x\, dx = \int \cos\ 2nx\, dx = \int \cos 2nx(2nx)\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\sin\ 2nx + C$$

bo‘lib,

$$\int \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]+C$$

bo‘ladi.▷

II bob. Aniq integral

1-§. Funksiyaning integral, yuqori va quyi integrallari yig‘indilari tushunchalari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. $[a,b]$ da

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, .., x_n = b$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n)$$

nuqtalarni qaraylik. Bu nuqtalar $[a,b]$ segmentini chekli sondagi

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_k, x_{k+1}], .., [x_{n-1}, x_n] \tag{1}$$

segmentlarga ajratadi. Boshqacha aytganda

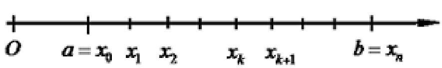
$$x_0, x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, .., x_n$$

nuqtalar $[a,b]$ da bo‘laklashni sodir etadi. Uni $[a,b]$ ning bo‘laklash nuqtalari deyiladi.

Bo‘laklashni

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

kabi belgilaymiz (1-chizma).



1-chizma.

(1) segmentlarning (bo‘lakchalarning) uzunliklari mos ravishda

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1,\ ...,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, .., \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

bo‘ladi. Ularning eng kattasini λ_p bilan belgilaylik:

$$\lambda_p = \max\{\Delta x_k\} \quad (k = 0, 1, 2, .., n-1).$$

Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da ixtiyoriy ξ_k nuqta ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$) olib, funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni topamiz.

1-ta'rif. Ushbu

$$\sigma = f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + ... + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k + ... + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning P bo'laklashga nisbatan **integral yig'indisi** deyiladi. Uni qisqacha

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

belgilanadi:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun u har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da ham uzluksiz bo'ladi. Veyrshtrass teoremasiga ko'ra funksiya $[x_k, x_{k+1}]$ da eng katta M_k va eng kichik m_k qiymatlarga erishadi:

$$M_k = \max\{f(x)\}, \;\; m_k = \min\{f(x)\}, \;\; x \in [x_k, x_{k+1}], \;\; k = 0, 1, 2.., n-1.$$

2-ta'rif. Ushbu

$$\overline{S} = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + ... + M_k \Delta x_k + ... + M_{n-1} \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

$$\underline{S} = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + ... + m_k \Delta x_k + ... + m_{n-1} \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

yig'indilar $f(x)$ funksiyaning P bo'laklashga nisbatan mos ravishda **yuqori integral yig'indi** va **quyi integral yig'indi** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^2$$

funksiyaning $[0, 1]$ segmentda quyidagi

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

bo‘laklashga nisbatan integral, yuqori integral va qiyi integral yig‘indilari topilsin.

◁ Ravshanki, P bo‘laklashda

$$\Delta x_k = \frac{1}{4}, \quad k = 0,1,2,3$$

bo‘lib

$$m_0 = 0, \quad m_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad m_2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad m_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$M_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad M_1 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad M_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \quad M_3 = 1$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\cdot\Delta x_3 = \frac{1}{4}\left(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right),$$

$$\overline{S} = M_0\cdot\Delta x_0 + M_1\cdot\Delta x_1 + M_2\cdot\Delta x_2 + M_3\cdot\Delta x_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1\right) = \frac{15}{32}$$

$$\underline{S} = m_0\cdot\Delta x_0 + m_1\cdot\Delta x_1 + m_2\cdot\Delta x_2 + m_3\cdot\Delta x_3 = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{32}$$

bo‘ladi.▷

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsin. $[a,b]$ segmentning

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

bo‘laklashga nisbatan $f(x)$ funksiyaning yuqori hamda quyi integral yig‘indilari

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \underline{S} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

ni qaraymiz:

1) har doim ushbu

$$\underline{S} \leq \overline{S} \tag{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$\lhd$ (2) tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi $m_k \leq M_k$ va $\overline{S}$, $\underline{S}$ yig‘indilar ta’rifidan kelib chiqadi. $\rhd$

2) har doim ushbu

$$\underline{S} \leq \sigma \leq \overline{S}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

$\lhd$ Ravshanki, ixtiyoriy $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

bo‘ladi. Bu tengsizliklarning hamma tomonlarini Δx_k ga ($\Delta x_k > 0$) ko‘paytirib topamiz:

$$m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq M_k \Delta x_k.$$

Keyingi tengsizliklarni k ning $0, 1, 2, .., n-1$ qiymatlarida yozib, so‘ng ularni hadlab qo‘shsak, natijada

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=o}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=o}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

ya’ni

$$\underline{S} \leq \sigma \leq \overline{S}$$

tengsizliklarga kelamiz.$\rhd$

3) agar $[a, b]$ segmenti

$$P = \{x_0, x_1, x_2, .., x_k, ..x_n\}$$

bo‘laklashining bo‘laklash nuqtalari qatoriga yangi bo‘laklash nuqtalarni qo‘shib, $[a, b]$ ning yangi P^* bo‘laklashi hosil qilingan bo‘lsa, u holda bu bo‘laklashga nisbatan $f(x)$ funksiyaning yuqori hamda quyi integral yig‘indilari

$$\underline{S}^*, \quad \overline{S}^*$$

uchun

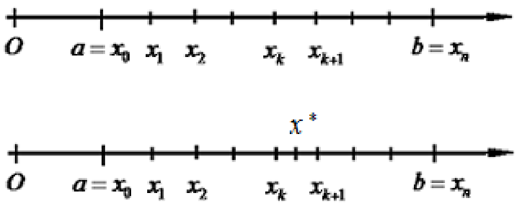
$$\overline{S}^* \leq \overline{S},$$

bo‘ladi.

$\lhd$ Soddalik uchun $[a, b]$ segmentning

$$P = \{x_0, x_1, .., x_{k+1}, .., x_n\}$$

bo‘laklashning bo‘laklash nuqtalari qatoriga qo‘shimcha bitta x^* nuqtani qo‘shib, $[a, b]$ ning yangi P^* bo‘laklashini hosil qilamiz. Aytaylik, x^* nuqta x_k va x_{k+1} nuqtalar orasida joylashsin:



2-chizma.

$f(x)$ funksiyaning P va P^* bo‘laklashlarga nisbatan yuqori integral yig‘indilari

$$\overline{S} = M_0\Delta x_0 + M_{\prime}\Delta x_{\prime} + ... + M_k\Delta x_k + ... + M_{n-1}\Delta x_{n-1},$$

$$\overline{S}^* = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + .. + M_k' \cdot \Delta x_k' + M_k'' \cdot \Delta x_k'' + ... + M_{n-1}\Delta x_{n-1}$$

bo‘ladi, bunda

$$M_k' = \max\{\ f(x)\},\ \ x \in [x_k, x^*],\ \ M_k'' = \max\{f(x)\},\ \ x \in [x^*, x_{k+1}]$$

va

$$\Delta x_k' = x^* - x_k,\ \ \Delta x_k'' = x_{k+1} - x^*.$$

Bu $\overline{S}$ va $\overline{S}^*$ yig‘indilarni solishtirib, ular bir-biridan, $\overline{S}$ yig‘indidagi $M_k\Delta x_k$ qo‘shuvchi o‘rnida $\overline{S^*}$ yig‘indida

$$M_k' \cdot \Delta x_k' + M_k''\Delta x_k''$$

ifoda boʻlishi bilangina farq qiladi. Ayni paytda,

$$M_k' \le M_k, \quad M_k'' \le M_k$$

boʻlganligi uchun

$$M_k'\Delta x_k' + M_k''\Delta x_k'' \le M_k\Delta x_k' + M_k \cdot \Delta x_k'' = M_k(\Delta x_k' + \Delta x_k'') =$$
$$= M_k(\Delta x_k' + \Delta x_k'') = M_k(x^* - x_k + x_{k+1} - x^*) = M_k \cdot \Delta x_k$$

boʻladi. Demak,

$$M_k\Delta x_k \ge M_k' \cdot \Delta x_k' + M_k'' \cdot \Delta x_k''$$

boʻlib,

$$\overline{S}^* \le \overline{S}$$

boʻladi.

Huddi shunga oʻxshash

$$\underline{S} \le \underline{S}^*$$

boʻlishi koʻrsatiladi.▷

Bu xossa $[a, b]$ segmenti P boʻlaklashining boʻlaklash nuqtalari soni oshirilib borilganda ularga mos boʻlgan yuqori integral yigʻindilarning kamaya borishini, quyi integral yigʻindilarning esa osha borishini ifodalaydi.

2-§. Yuqori hamda quyi integral yigʻindilarning limiti. Aniq integral

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz boʻlib,

$$P = \{x_0, x_1..., x_n\}$$

esa $[a, b]$ ning biror boʻlaklash boʻlsin. Bu boʻlaklashning boʻlaklash nuqtalari qatoriga yangi boʻlaklash nuqtalarni qoʻshib, $[a, b]$ ning P_1 boʻlaklashini; P_1 boʻlaklashning boʻlaklash nuqtalari qatoriga yangi boʻlaklash nuqtalarni qoʻshib, $[a, b]$ ning P_2 boʻlaklashini va bu jarayonni davom ettira borib, $[a, b]$ segmentining $P_3, P_4, .., P_n, ..$ boʻlaklashlarini hosil qilamiz.

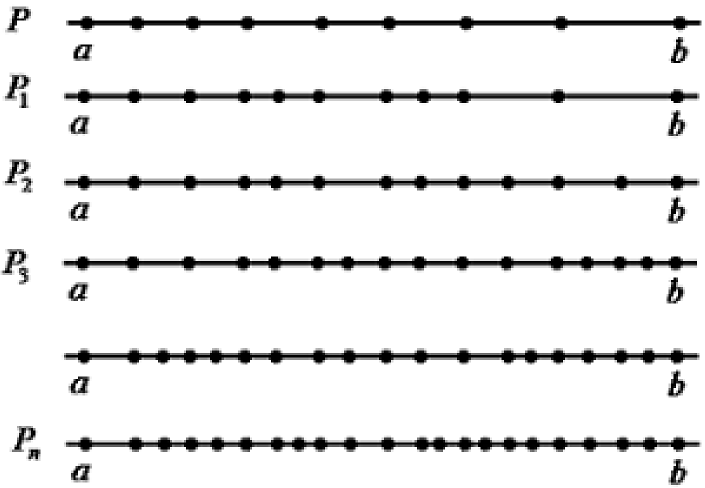
Bunda

$$P_1,\ P_2, ..., P_n.....$$

bo‘laklashlar ketma-ketligiga mos

$$\lambda_{P_1},\ \lambda_{P_2},\ ...,\ \lambda_{P_n},\ ...$$

sonlar ketma-ketligi $n \to \infty$ da nolga intilsin: $n \to \infty$ da $\lambda_{P_n} \to 0$.



Aytaylik, $P_1, P_2, ...P_n, ...$ bo‘laklashlarga nisbatan $f(x)$ funksiyaning yuqori integral yig‘indilari mos ravishda

$$\overline{S}_1,\ \overline{S}_2,\ ...,\ \overline{S}_n,\ ...,$$

quyi integral yigindilari esa mos ravishda

$$\underline{S}_1,\ \underline{S}_2,\ ...,\ \underline{S}_n,\ ...$$

bo‘lsin. Yuqori hamda quyi integral yig‘indilarining 3) xossasiga ko‘ra

$$\overline{S}_1 \geq \overline{S}_2 \geq ... \geq \overline{S}_n \geq ...,$$

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq .... \leq \underline{S}_n \leq ...$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$\underline{S}_n \leq \overline{S}_n \quad (n = 1, 2, 3, ..)$$

bo'ladi.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \overline{J}, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \underline{J}$$

limitlar mavjud bo'ladi, bunda $\overline{J}$ va $\underline{J}$ chekli sonlar.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgani uchun, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$|x'' - x'| < \delta \quad \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad (x', x'' \in [a, b])$$

bo'ladi.

Agar $[a, b]$ segmentining bo'laklashlarida

$$\lambda_{P_n} = \max_k \{\Delta x_k\} < \delta$$

bo'lsa unda

$$M_k - m_k \leq |f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

bo'lib,

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ayni paytda

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n - \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 0$$

bo‘lganligidan

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = J$$

bo‘lishini topamiz, bunda $J = \overline{J} = \underline{J}$

Eslatma. $\lambda_{P_n} \to 0$ da $\overline{S}_n$ va $\underline{S}_n$ larning limiti J $[a,b]$ segmentining $\lambda_{P_n} \to 0$ bo‘ladigan P_n bo‘laklashlarning tanlab olinishiga bog‘liq bo‘lmaydi.

Biz yuqorida $\lambda_{P_n} \to 0$ da

$$\lim \overline{S}_n = \lim \underline{S}_n = J \ (J - \text{ chekli son})$$

bo‘lishini ko‘rdik. 2)-xossasiga ko‘ra

$$\underline{S}_n \leq \sigma_n \leq \overline{S}_n$$

bo‘ladi, bunda

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Unda $\lambda_{P_n} \to 0$

$$\lim \sigma_n = J$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning integral yig‘indisi $n \to \infty$, $\lambda_{P_n} \to 0$ da chekli J songa intilar ekan:

$$\lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = J.$$

Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning integral yig‘indisining limiti J $f(x)$ **funksiyaning** $[a,b]$ **oraliq bo‘yicha aniq integrali** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi, a son integralning quyi chegarasi, b son esa yuqori chegarasi, $[a,b]$ segmenti integrallash oralig‘i deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\int_a^b cdx \ \ (c = const)$$

aniq integral topilsin.

$\lhd$ Avvalo $f(x) = c$ funksiyaning integral yig‘indisini topamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} c\cdot \Delta x_k = c\cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = c\cdot (b-a).$$

Unda

$$\lim_{\lambda_P\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c\cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda_P\to 0} c\cdot (b-a) = c\cdot (b-a)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b cdx = c\cdot (b-a).$$

Xususan, $c=1$ bo‘lsa,

$$\int_a^b dx = b-a$$

bo‘ladi.

1-eslatma. Agar $a>b$ bo‘lsa,

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx;$$

agar $a = b$ bo‘lsa,

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

deb qaraladi.

2-eslatma. Aniq integral ta’rifini keltirish jarayonida $[a, b]$ da uzluksiz $f(x)$ funksiyaning shu oraliq bo‘yicha integrallanuvchiligini ko‘rdik. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentining chekli sondagi nuqtalarda uzilishga ega (birinchi tur uzilishga ega) bo‘lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da integrallanuvchi bo‘ladi.

Masalan,

$$signx = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo‘lsa;} \\ 0, & \text{agar x=0 bo‘lsa;} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

funksiya $[-1, 1]$ oraliqda integrallanuvchi, ya’ni $\int\limits_{-1}^{1} signxdx$ integral mavjud bo‘ladi.

Aniq integralning xossalari

Engi aniq integralning xossalarini keltiramiz.

1) o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi ostidan chiqarish mumkin:

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (k = const).$$

$\triangleleft$ Haqiqatdan ham,

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda_{P_n} \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} kf(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= k \lim_{\lambda_{P_n} \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = k\int\limits_a^b f(x)dx. \triangleright$$

2) yig‘indining integrali integrallar yig‘indisiga teng:

$$\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

$\triangleleft$ Aniq integral ta’rifidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)+g(\xi_k))\Delta x_k = \lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k +$$

$$+\lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx. \triangleright$$

3) agar $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ixtiyoriy $x \in [a,b]$ da

$$f(x) \le g(x)$$

bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik,

$$F(x) = g(x) - f(x)$$

bo‘lsin. Ravshanki, $\forall x \in [a,b]$ da

$$F(x) \ge 0$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{\lambda_{P_n}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$$

va

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$$

bo‘lishida

$$\int_a^b F(x)dx \geq 0,$$

ya’ni

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Keyingi munosabatdan topamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \triangleright$$

Aniq integralning keyingi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

4) agar $f(x)$ $[a, b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, funksiya $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo‘ladi.

5) ushbu

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

6) ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3-§. O‘rta qiymat haqidagi teoremalar. Chegarasi o‘zgaruvchi aniq integrallar

1°. O‘rta qiymat haqidagi teoremalar. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. Unda Veyershtrass teoremasiga ko‘ra u chegaralangan, ya'ni shunday m va M sonlari topiladiki, ixtiyoriy $x \in [a,b]$ da

$$m \leq f(x) \leq M \tag{1}$$

bo'ladi.

1-teorema. $[a,b]$ segmentda shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$\lhd$ (1) tengsizliklarni hadlab integrallab topamiz:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx,$$

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\int_a^b dx,$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Keyingi tengsizliklarning har tomonini $b-a$ ga bo'lsa, unda

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

miqdor $[a,b]$ segmentida uzluksiz $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati m hamda eng katta qiymati M lar orasida bo'ladi. Uzluksiz funksiyaning xossasiga ko'ra $[a,b]$ da shunday c nuqta topildiki,

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\rhd$

Xuddi shunga o‘xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

2-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lib, $g(x)$ funksiya $[a,b]$ da ishora saqlansin ($\forall x \in [a,b]$ da har doim $g(x) > 0$ yoki har doim $g(x) < 0$.) U holda $[a,b]$ segmentda shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi.

Odatda, keltirilgan teoremalar **o‘rta qiymat haqidagi teoremalar** deb yuritiladi. Bu teoremalardan ko‘p foydalaniladi. Jumladan ulardan integrallarni baholashda foydalanish mumkin.

Misol. Ushbu

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+sin^2 x}$$

integral baholansin.

$\lhd$ Ravshanki, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ bo‘lganda

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+\sin^2 x} \le 1$$

bo‘ladi. Hadlab integrallab topamiz:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx \le \int_0^{\pi/2} dx,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx \le \frac{\pi}{2}.$$

Berilgan integralning taqribiy qiymati

$$J \approx \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) \approx \frac{1}{2}(0,79 + 1,57) = 1,18$$

bo‘ladi.$\triangleright$

4-§. Chegarasi o‘zgaruvchi aniq integrallar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. Aniq integralning xossasiga ko‘ra ushbu

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt$$

integral mavjud bo‘ladi, bunda $x \in [a,b]$. Bu integral $[a,b]$ dan olingan x ga bog‘liq bo‘ladi. Uni $F(x)$ deb belgilaymiz:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dx.$$

Natijada berilgan $f(x)$ funksiyaga ko‘ra boshqa bir funksiya $F(x)$ yuzaga keldi.

1-teorema. $F(x)$ funksiya $[a,b]$ da hosilaga ega va

$$F'(x) = f(x)$$

bo‘ladi.

$\triangleleft$ $x \in [a,b]$ nuqta bilan birga $x + \Delta x \in [a,b]$ nuqtani qaraymiz. So‘ng $F(x)$ funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int\limits_x^a f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_x^a f(t)\,dt + \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

O‘rta qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \quad (c = x+\theta\cdot\Delta x, 0<\theta<1)$$

bo‘ladi. Keyingi tengliklardan

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\cdot\Delta x) \tag{2}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz. Demak,

$$\Delta x \to 0 \;\text{ da }\; f(x+\theta\cdot\Delta x) \to f(x).$$

$\Delta x \to 0$ da

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \longrightarrow F'(x).$$

(2) tenglikda, $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tib

$$F'(x) = f(x)$$

bo‘lishini topamiz.$\rhd$

Bu teoremadan, $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lgan har qanday $f(x)$ funksiya shu oraliqda boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lishi kelib chiqadi. Bunda boshlang‘ich funksiya

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$$

bo‘ladi.

Endi quyi chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integral

$$\Phi(x) = \int\limits_{x}^{b} f(t)\,dt \quad x\in[a,b]$$

ni qaraymiz.

Aniq integralning xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = F(x) + \Phi(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Bundan

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikdan

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)' - F'(x) = 0 - F'(x) = -F'(x),$$

undan esa

$$\Phi'(x) = -f(x)$$

bo‘lishini topamiz.

5-§. Aniq integralni hisoblash

1°. Nyuton–Leybnits formulasi

Ma’lumki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

funksiya shu oraliqda $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang‘ich funksiyasi $\Phi(x)$ yuqoridagi boshlang‘ich funksiyadan ixtiyoriy o‘zgarmas qo‘shiluvchiga farqiladi:

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (C = const).$$

Demak,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Bu tenglikda $x = a$ deb

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = 0 + C = C,$$

so‘ng $x = b$ deb

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx + C$$

tengliklarni topamiz. Bu tengliklardan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

(1) formula **Nyuton−Leybnits** formulasi deyiladi.

(1) tenglikning o‘ng tomonidagi $\Phi(b) - \Phi(a)$ ayirma

$$\Phi(x)\Big|_a^b$$

kabi yoziladi:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Misollar. Quyida keltirilgan aniq integrallar Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblangan:

1) $\int\limits_1^2 x^9\,dx = \frac{x^{10}}{10}\Big|_1^2 = \frac{2^{10}}{10} - \frac{1^{10}}{10} = \frac{1}{10}(1023) = 102,3.$

2) $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1}+e^0 = 1-\frac{1}{e}$,

3) $\int\limits_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$,

4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$.

2°. O‘zgaruvchilarini almashtirish usuli bilan aniq integrallarni hisoblash

Ko‘pincha

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

integralni

$$x = \varphi(t)$$

almashtirish yordamida hisoblash qulay bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ va $x = \varphi(t)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz;

2) $x = \varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz, uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo‘lib, uning qiymatlari $[a,b]$ ni tashkil etsin;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

U holda

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \tag{2}$$

bo‘ladi.

◁ Faraz qilaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Unda

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad (a \le x \le b)$$

bo‘lib, aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish formulasiga ko‘ra

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

bo‘ladi, bunda $x = \varphi(t)$. Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib topamiz:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Ayni paytda

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

bo‘ladi. Keyingi ikki tengliklardan

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\rhd$

Misollar. 1. Ushbu

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda

$$x = \sqrt{t^2-1}$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x = 0 \ \text{ bo‘lganda } \ t = 1, \ \ x = 1 \ \text{ bo‘lganda } \ t = \sqrt{2},$$

$$x' = (\sqrt{t^2-1})' = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

bo‘lib, (2) formulaga ko‘ra

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2-1} \cdot \sqrt{t^2-1+1} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2\, dt$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int_1^{\sqrt{2}} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.\rhd$$

2.Ushbu

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$$

integral hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralda

$$\ln x = t$$

deb olamiz. Unda

$$x=1 \;\; \text{bo‘lganda} \;\; t=0, \;\; x=e \; \text{bo‘lganda} \;\; t=1,$$

$$\frac{1}{x}dx = dt$$

bo‘lib,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+ln^2x)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi. $\rhd$

3°. Bo‘laklab integrallash usuli bilan aniq integrallarni hisoblash

Faraz qilaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda uzluksiz va uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx \tag{3}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Demak, $u(x) \cdot v(x)$ funksiya $u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Unda

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b$$

bo‘lib, bu tenglikdan

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi.$\triangleright$

(3) tenglikni quyidagicha

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{3'}$$

ham yozish mumkin.

Misollar. 1. Ushbu

$$\int_1^2 x\,e^x\,dx$$

integral hisoblansin:

$\triangleleft$ Bu integralda

$$u = x, \quad dv = e^x\,dx$$

deb olamiz. Unda

$$du = dx, \quad v = \int e^x\,dx = e^x$$

bo‘lib, (3′) formulaga ko‘ra

$$\int_1^2 x\,e^x\,dx = x\,e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx = x\,e^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

bo‘ladi.$\triangleright$

2. Ushbu

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

integral hisoblansin:

◁ Bu integralda

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx$$

deb olib,

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad v = x$$

bo'lishini topamiz. Unda (3') formulaga ko'ra

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \ \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

bo'ladi.▷

4°. Teylor formulasining qoldiq hadining integral ko'rinishi

Ma'lumki Teylor formulasi quyidagi

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ko'rinishga ega edi, bunda

$$R(x) = o((x-a)^n)$$

Teylor formulasining qoldiq hadi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya a nuqtaning $\varepsilon > 0$ atrofida, ya'ni $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalda

$$f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$$

tartibdagi hosilalarga ega bo‘lib, ular $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ da uzluksiz bo‘lsin. Bu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intervalda ixtiyoriy x nuqtani olib, ushbu

$$\int\limits_a^x f'(t)dt$$

integralni qaraymiz. Ravshanki,

$$\int\limits_a^x f'(t)dt = f(t)\Big|_a^x = f(x) - f(a)$$

bo‘ladi va undan

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt \tag{4}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu tenglikdagi integralga (3) formulani qo‘llab topamiz:

$$u(t) = f'(t), \quad v(t) = -(x-t), \quad u'(t) = f''(t),$$

$$\int\limits_a^x f'(t)dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

$\int\limits_a^x f'(t)dt$ integralning bu topilgan ifodasini (4) tenglikdagi integral o‘rniga qo‘ysak, unda

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt \tag{5}$$

hosil bo‘ladi.

(5) tenglikdagi integralga (3) formulani qo‘llab topamiz:

$$u(t) = f''(t), \quad v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2, \quad u'(t) = f'''(t),$$

$$\int_a^x f''(t)(x-t)dt = -f''(t)\frac{1}{2}(x-t)^2\Big|_a^x + \int_a^x f'''(t)\frac{1}{2}(x-t)^2 dt =$$

$$= \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt. \qquad (6)$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!}\int_a^x f''(t)(x-t)^2\, dt$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shu jarayonni davom ettira borib, quyidagi

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \qquad (7)$$

formulaga kelamiz. Bu $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi bo‘lib, uning qoldiq hadi

$$R(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

bo‘ladi.

Eslatma. (7) formulaning qoldiq hadidagi integralga o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llab topamiz:

$$R(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_a^x (x-t)^n d(x-t) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

6-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Integrallanadigan funksiya murakkab bo‘lganda, ravshanki, ularni integrallarini hisoblash qiyin bo‘ladi. Bunday hollarda ularni taqribiy hisoblashga to‘g‘ri keladi.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblaydigan bir qancha usullar mavjud. Biz ulardan ayrimlarini keltiramiz.

$f(x)$ fuksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ni taqribiy hisoblash kerak bo‘lsin.

1. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli

$[a,b]$ segmentni $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ nuqtalar yordamida n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Aniq integral xossalariga ko‘ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

bo‘ladi.

Har bir

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

integralga o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llab topamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k) \cdot \Delta x_x \quad (x_k \le \xi_k \le x_{k+1}).$$

Ravshanki,

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n},\ ...,\ x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ ...,$$

$$x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Endi

$$\overline{x_k} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n} \quad (x_k < \overline{x}_k < x_{k+1})$$

deb,

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \quad (x_k \le \xi_k \le x_{k+1})$$

ni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(\xi_k)\Delta x_k = [f(\overline{x}_k) + f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)]\Delta x_k =$$

$$= f(\overline{x}_k)\cdot\Delta x_k + [f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)]\Delta x_k.$$

Natijada

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = f(\overline{x}_k)\Delta x_k + [f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)]$$

bo‘lib,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x}_k)\Delta x_k + R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x}_k) + R_n$$

bo‘ladi, bunda

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)]\Delta x_k.$$

Shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz. Unda $\forall\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topiladiki, $\lambda = \dfrac{b-a}{n} < \delta$ bo‘lganda

$$|f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib topamiz:

$$|R_n| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k) - f(\overline{x}_k)|\cdot\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu hol

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{x}_k)$$

deb olish imkonini beradi.

Shunday qilib berilgan aniq integralni hisoblash uchun ushbu

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(\overline{x}_0) + f(\overline{x}_1) + ... + f(\overline{x}_k) + ... + f(\overline{x}_{n-1})\right) \qquad (8)$$

taqribiy formulaga kelamiz, bunda

$$\overline{x}_k = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

(8) formula **to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi** deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lib, u uzluksiz bo‘lsa

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \quad (a < c < b)$$

bo‘ladi.

2. Trapetsiyalar usuli

Yuqoridagidek

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

tenglikning o‘ng tomonidagi har bir integralga o‘rta qiymat haqidagi teoremani qo‘llaymiz. Unda

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \quad (x_k \le \xi_k \le x_{k+1})$$

bo‘ladi.

Bu holda $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ ni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\Delta x_k + \left(f(\xi_k) - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)\Delta x_k.$$

Natijada

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\Delta x_k + \left(f(\xi_k) - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)\Delta x_k$$

bo‘lib,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} + \overline{R}_n$$

bo‘ladi, bunda

$$\overline{R}_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(\xi_k) - \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)\Delta x_k.$$

Endi $\overline{R}_n$ ni baholaymiz.

$$|\overline{R}_n| \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}(|f(\xi_k)-f(x_k)| + |f(\xi_k)-f(x_{k+1})|)\Delta x_k <$$

$$< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}+\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\cdot\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \varepsilon.$$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\overline{R}_n = 0.$$

Shunday qilib, ainq integralni hisoblash uchun quyidagi

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right) \qquad (9)$$

taqribiy formulaga kelamiz, bunda

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

(9) formula **trapetsiyalar formulasi** deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lib, u uzluksiz bo‘lsa,

$$\overline{R}_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad (a < c < b)$$

bo‘ladi.

3. Parabolalar (Simpson) usuli

$[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ni taqtibiy hisoblash uchun avvalo $[a,b]$ ni

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}, ..., x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2n})$$

nuqtalar yordamida $2n$ ta teng bo‘lakka bo‘lib, integralni ushbu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{2k} f(x)dx$$

ko‘rinishda yozib olamiz. So‘ng har bir

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \quad (k = 1, 2, 3, ..., n)$$

integralda $f(x)$ funksiya uchta

$$(x_{2k-2}, f(x_{2k-2})); (x_{2k-1}, f(x_{2k-1})); (x_{2k}, f(x_{2k}))$$

nuqtalardan o‘tuvchi

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

kvadrat uchhad (parabola) bilan taqriban almashtiriladi:

$$f(x) \approx \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Unda

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx$$

taqribiy formula hosil bo‘ladi. Bu formuladagi

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx$$

integralni hisoblaymiz:

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \alpha \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} + \beta \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} + \gamma x\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} =$$

$$= \alpha \frac{x_{2k}^3 - x_{2k-2}^3}{3} + \beta \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2} + \gamma(x_{2k} - x_{2k-2}) =$$

$$= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}[2\alpha(x_{2k}^2 + x_{2k}x_{2k-2} + x_{2k-2}^2) + 3\beta(x_{2k} - x_{2k-2}) + 6\gamma] =$$

$$= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}\Bigg[(\alpha x_{2k-2}^2 + \beta x_{2k-2} + \gamma) + 4\Bigg(\alpha\left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right)^2 +$$

$$+\beta \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} + \gamma\Bigg) + (\alpha x_{2k}^2 + \beta x_{2k} + \gamma)\Bigg] =$$

$$= \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}\left[f(x_{2k-2}) + 4f\left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right) + f(x_{2k})\right].$$

Natijada aniq integralni taqribiy ifodalaydigan quyidagi formulaga kelamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{2k} - x_{2k-1}}{2}\left[f(x_{2k-1}) + 4f\left(\frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}\right) + f(x_{2k})\right].$$

Agar

$$x_{2k-2} = a + (2k-2)\frac{b-a}{n},$$

$$x_{2k-1} = a + (2k-1)\frac{b-a}{n},$$

$$x_{2k} = a + 2k\frac{b-a}{n}, \quad x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$$

$(k = 1, 2, ..., n)$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda taqribiy formula quyidagicha bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{2n-1}))+$$

$$+2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n-2}))]. \tag{10}$$

(10) formula **parabolalar** (**Simpson**) **formulasi** deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da to'rtinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, u uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\overline{R}_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}[(f(x_0)+f(x_{2n})+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1}))+$$

$$+2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n-2}))]$$

uchun

$$\overline{R}_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot f^{(IV)}(c) \quad (a < c < b)$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu integral

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

taqribiy hisoblansin.

$\lhd$ Bu integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi (8) yordamida taqribiy hisoblaymiz.

$[0,1]$ segmentni 5 ta teng

$$\left[0,\frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5},1\right]$$

bo‘lakka bo‘lamiz. Bunda har bir bo‘lakning uzunligi $\frac{1}{5}$ga tang bo‘lib,

$$\overline{x}_0 = 0,1, \overline{x}_2 = 0,3, \overline{x}_2 = 0,5, \overline{x}_3 = 0,7; \overline{x}_4 = 0,9$$

bo‘ladi.

Endi $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4$ nuqtalardagi qiymatlarinin hisoblab,

$$f(\overline{x}_0) = 0,99005,$$

$$f(\overline{x}_1) = 0,91393,$$

$$f(\overline{x}_2) = 0,77680,$$

$$f(\overline{x}_3) = 0,61263,$$

$$f(\overline{x}_4) = 0,44486$$

bo‘lishini topamiz. Unda (8) formulaga ko‘ra

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 3,74027 \approx 0,74805. \triangleright$$

Eslatma. Bu integralni trapetsiyalar usuli bilan (9) formulaga ko‘ra taqribiy hisoblansa

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,74437,$$

parabolalar (Simpson) usuli bilan (10) formulaga ko‘ra taqribiy hisoblansa

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0,74682$$

bo‘ladi.

Taqribiy (8), (9) va (10) formulalar yordamida hisoblab topilgan

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integralning qiymatini, uning

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0,74685...$$

qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanligini ko‘ramiz.

7-§. Aniq integralning geometrik tatbiqlari

1°. Tekis shaklning yuzi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo‘lib, $\forall x \in [a, b]$ uchun $f(x) \geq 0$ bo‘lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan Ox o‘qi bilan chegaralangan shaklni qaraylik (1-chizma).

$[a, b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

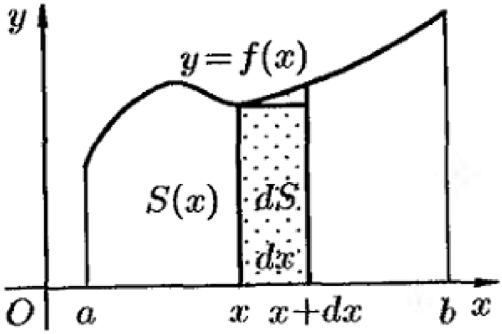
$$(a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b)$$

bo‘laklashni olamiz. Bo‘laklashning har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

bo‘lagidagi ixtiyoriy ξ_k nuqtada $f(x)$ funksiya qiymati $f(\xi_k)$ni shu bo‘lakcha uzunligiga ko‘paytiramiz:

$$f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta x_k.$$



1-chizma.

Bu miqdor asosi Δx_k, balandligi $f(\xi_k)$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini ifodalaydi (1-chizma).

Yuqoridagidek, asoslari

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1,\ ...,\ \Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

balandliklari mos ravishda

$$f(\xi_0),\ f(\xi_1),\ ...,\ f(\xi_{n-1})$$

bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalari topilib, ularning yig‘indisidan iborat ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{1}$$

miqdor qaralsa, uni taxminan D shaklning yuzi deb olish mumkin bo‘ladi.

Endi $[a, b]$ segmentning bo‘laklash sonni (yangi bo‘laklash nuqtalarini qo‘shib) shunday orttira boramizki, bunda $\max\limits_k \{\Delta x_k\}$ nolga intilib borsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

yig‘indining miqdori ham o‘zgara boradi va u tobora D shaklning yuzini aniqroq ifodalay boradi.

Ushbu

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

limit mavjud bo'lsa, D shakl yuzaga ega deyiladi, limit esa D shaklning yuzi deyiladi.

Ayni paytda (1) $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'ladi. Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, (1) yig'indining limiti mavjud va

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan D shakl yuzaga ega va uning yuzi S ushbu

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

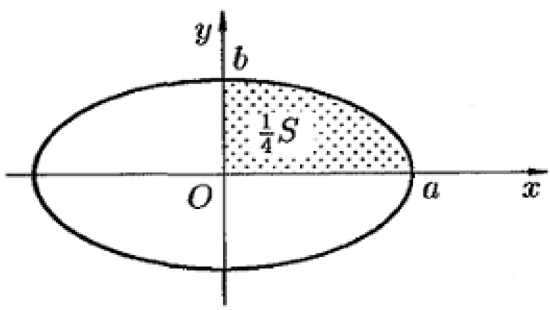
formula bilan topiladi

Misol. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellips va Ox, Oy o'qlarining musbat yo'nalishlaridagi qismlari bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

◁ Misolda aytilgan shakl 2-chizmada tasvirlangan.



2-chizma.

Ravshanki, qaralayotgan shaklning yuzi ellips yuzining $\frac{1}{4}$ qismi bo‘lib, u

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \le x \le a)$$

funksiya grafigi hamda $x = 0, x = a$ lar bilan chegaralangan shakldir.

(2) formulaga ko‘ra

$$S = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

bo‘ladi. Endi integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x = a\sin t & x = 0 & \text{da} & t = 0 \\ dx = a\cos t dt & x = a & \text{da} & t = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}a\cos t dt = \frac{b}{a}a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}ab \cdot \frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Demak,

$$S = \frac{\pi ab}{4}. \triangleright$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz bo‘lib, unda ishora saqlamasa, masalan,

$$x \in [a, c] \ \text{ da } \ f(x) \ge 0, \ \ x \in [c, b] \ \text{ da } \ f(x) \le 0$$

bo‘lsa, unda Ox o‘qining yuqorisidagi yuza musbat ishora bilan

$$+\int_a^c f(x)\, dx,$$

Ox o‘qining pastidagi yuza manfiy ishora bilan

$$-\int_c^b f(x)\,dx$$

olinadi.

Masalan, Ox o‘qi hamda $f(x) = \sin x$ funksiya grafigining $0 \leq x \leq 2\pi$ oraliqdagi qismi bilan chegaralangan shaklning yuzi Q quyidagicha bo‘ladi:

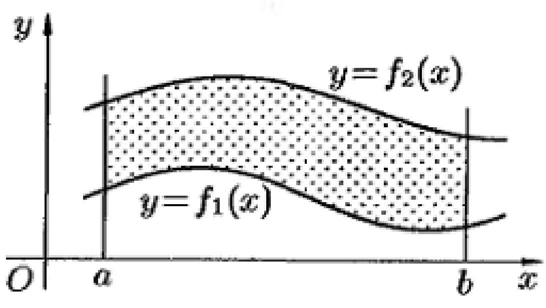
$$Q = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left[-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right] = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Aytaylik, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a, b]$ da uzluksiz bo‘lib, $\forall x \in [a, b]$ da

$$f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$$

bo‘lsin.

Tekislikda, yuqoridan $f_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $f_1(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan D shaklni qaraylik



3-chizma.

Bu shaklning yuzi S, yuqoridagi kabi aniqlangan

$$S_1 = \int_a^b f_2(x)\,dx, \quad S_2 = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

yuzalar orqali quyidagi

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \tag{3}$$

formula bilan topiladi.

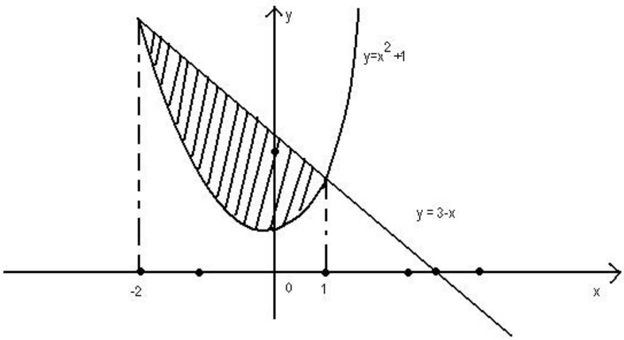
Misol. Ushbu

$$y = x^2 + 1, \quad x + y = 3$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

ega-

rala



4-chizma.

Parabola va to‘g‘ri chiziq tenglamalarini sistema qilib,

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

so‘ng uni yechib, $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$ bo‘lishini topamiz. Endi

$$a = -2, \;\; b = 1, \;\; f_1(x) = x^2 + 1, \;\; f_2(x) = 3 - x$$

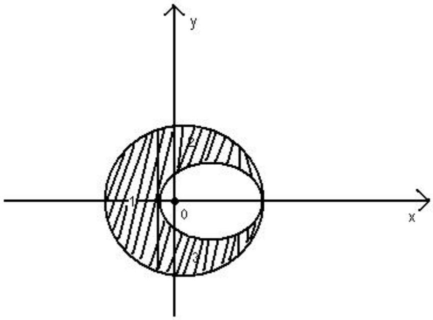
deb, (3) formuladan foydalanib, izlanayotgan shakl yuzi S ni topamiz:

$$S = \int_{-2}^{1} [(3-x) - (x^2+1)]dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) = 4\frac{1}{2}. \triangleright$$

Eslatma. Agar tekislikda yuzasi hisoblanadigan shakl murakkabroq ko‘rinishga ega bo‘lsa, ko‘pincha uni Oy o‘qiga parallel chiziqlar yordamida yuqorida qaralgan shakllarga ajratish mumkin bo‘ladi.

Masalan, quyidagi chizmada keltirilgan shaklni 3 ta sodda shaklga ajrati



5-chizma.

Bunda har bir bo‘lakning yuzini (2) yoki (3) formulalar bilan hisoblab, ularni qo‘shib chiqish natijasida shaklning yuzi topiladi.

Aniq integral yordamida tekislikdagi egri chiziqli sektor, ya’ni qutb koordinatalar sistemasida

$$\rho = \rho(\theta)$$

uzluksiz funksiya grafigi, $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ nurlar bilan chegaralangan shaklning yuzini ham topish mumkin.

Bunday shakl yuzaga ega bo‘lib, uning yuzi S ushbu

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta \tag{4}$$

formula bilan topiladi.

Misol. Ushbu

$$S = k \cdot \theta \quad (k = const)$$

Arhimed spiralining bir marta aylanishdan hosil bo‘lgan egri chiziq hamda qutb o‘qi bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

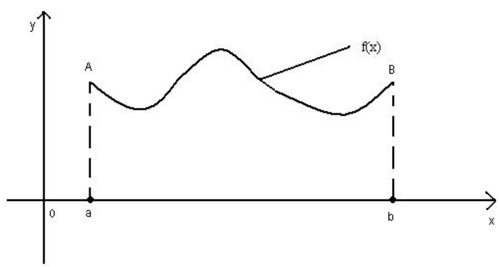
$\lhd$ Bu holda $\alpha, \beta = 2\pi, \rho = k\theta$ bo‘lib, shaklning yuzi (4) formulaga ko‘ra

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(k\theta)^2 d\theta = \frac{k^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\theta^2 d\theta = \frac{k^2}{2}\cdot\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}k^2\pi^3$$

bo‘ladi. $\rhd$

2°. Yoy uzunligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, uning grafigi tekislikda $\breve{AB}$ yoyini tasvirlasin



6-chizma.

$[a, b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$$

bo'laklashni olamiz. Bo'laklashning har bir bo'laklovchi

$$x_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

nuqtalaridan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularni $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishgan nuqtalarini

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

bilan belgilaymiz. Natijada $\breve{AB}$ yoyida $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$, ..., $A_k(x_k, f(x_k))$, $A_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, ..., $A_n(x_n, f(x_n))$ nuqtalar hosil bo'ladi ($A = A_0(a, f(a))$, $B = A_n(b, f(b))$).

Bu nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirish natijasida hosil bo'lgan siniq chiziq perimetri (uzunligi) ni ℓ bilan belgilaymiz. Bu siniq chiziqning A_k va A_{k+1} nuqtalari orasidagi qismining uzunligi

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

bo'lib, siniq chiziq perimetri

$$\ell = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

bo'ladi. Uni taxminan $\breve{AB}$ yoyining uzunligi deb qarash mumkin.

Endi $[a, b]$ segmentning bo'laklash nuqtalarining sonini shunday orttira boramizki, bunda $\max\{\Delta x_k\}$ nolga intilaborsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

yig'indining miqdori ham o'zgarib boradi va u tobora $\breve{AB}$ yoyning uzunligini aniqroq ifodalayboradi.

Ushbu

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

limit mavjud bo'lsa, $\breve{AB}$ yoy uzunlikka ega, limitning qiymati $\breve{AB}$ **yoyining uzunligi** deyiladi.

Endi yig'indining limitini aniqlash maqsadida, uning ifodasini o'zgartirib yozamiz.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}).$$

Natijada

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + f'^2(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k$$

bo'ladi.

Demak, siniq chiziq perimetri

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k$$

ga teng bo'ladi. Ayni paytda, bu yig'indi uzluksiz

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig'indisi bo'lib, uning limiti mavjud va

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\ \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $\breve{AB}$ yoyi uzunlikka ega va uning uzunligi

$$\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

ga teng:

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{5}$$

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \le x \le 4)$$

funksiya grafigini ifodalovchi yoyning uzunligi topilsin.

$\lhd$ $a = 0$, $b = 4$,

$$f'^2(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'^2 = \frac{9}{4}x, \;\; 1 + f'^2(x) = 1 + \frac{9}{4}x$$

bo'lishini e'tiborga olib, (5) formuladan foydalanib topamiz:

$$\ell = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \left[1+\frac{9}{4}x = t,\; x = 0 \text{ da } t = 1,\, x = 4 \text{ da } t = 0,\right.$$

$$\left. dx = \frac{4}{9}\,dt\right] = \int\limits_1^{10} \frac{4}{9}t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).\rhd$$

Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \tag{6}$$

funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz va uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. Bu funksiyalarning $t_0 \in [\alpha, \beta]$ nuqtadagi qiymatlari

$$x_0 = \varphi(t_0), \;\; y_0 = \psi(t_0)$$

dan tashkil topgan (x_0, y_0) juftlik, tekislikda koordinatalari x_0 va y_0 bo'lgan (x_0, y_0) nuqtani ifodalaydi.

t o‘zgaruvchi $[\alpha, \beta]$ da o‘zgarganida unga mos

$$x = \varphi(t), \ \ y = \psi(t)$$

funksiya qiymatlaridan tashkil topgan (x, y) juftliklar to‘plami tekislikda biror egri chiziqni tasvirlaydi.

(6) sistema egri chiziqning parametrik tenglamasi deyiladi, t esa parametr deyiladi.

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq (6) sistema bilan berilgan bo‘lsin. Uning uzunligi ushbu

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt \tag{7}$$

integral yordamida topiladi.

Misol. Ushbu

$$\varphi(t) = a(t - \sin t),$$

$$\psi(t) = a(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le \pi)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlangan egri chiziqning (sikloidaning) uzunligi topilsin.

$\lhd$ Ravshanki,

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad \psi'(t) = a \sin t$$

bo‘lib,

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)}$$

bo‘ladi. Endi $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ deb, (7) formuladan foydalanib, egri chiziqning uzunligini topamiz:

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \int\limits_{0}^{2\pi} a\sqrt{2(1 - cost)}\, dt = a \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{4 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} dt =$$

$$= 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\cdot d\left(\frac{t}{2}\right)\cdot 2 = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a. \triangleright$$

Faraz qilaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bunda $\rho = \rho(\theta)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega. Bu egri chiziq tenglamasini quyidagicha

$$\varphi(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta,$$

$$\psi(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$$

parametrik ko'rinishida yozib, so'ng (7) formuladan foydalanib, $\breve{AB}$ yoyining uzunligini topamiz:

$$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}\, d\theta = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta)\cdot\cos\theta)'^2 + (\rho(\theta)\sin\theta)'^2}\, d\theta =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\cdot\sin\theta]^2 + [\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta]^2}\, d\theta =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta.$$

Demak,

$$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta. \tag{8}$$

Misol. Ushbu

$$\rho = k\cdot\theta$$

Arximed spiralining bir aylanishdagi $(0 \le \theta \le 2\pi)$ uzunligi topilsin.

$\lhd$ (8) formuladan foydalanib topamiz:

$$\ell = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(k\cdot\theta)'^2 + (k\theta)^2}\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} k\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = k\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta =$$

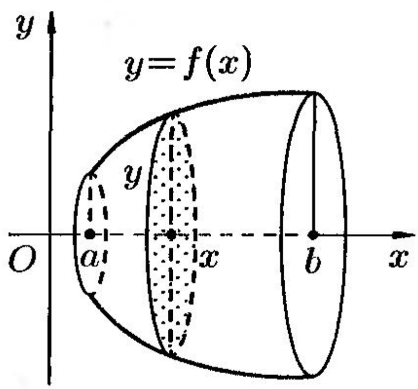
$$= k\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right|\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= k\left[\pi\sqrt{1+\pi^2\cdot 4} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right].\rhd$$

3°. Aylanma jismning hajmi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lib, unda $f(x)\geq 0$ bo‘lsin. Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlaridan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan Ox o‘qi bilan chegaralangan tekis shaklni Ox o‘qi atrofida aylantirishdan aylanma jism hosil bo‘ladi.

Masalan, quyidagi chizmada tasvirlangan shaklni Ox o‘qi atrofida aylantirishdan quyidagi aylanma jism hosil bo‘ladi:



7-chizma.

$[a, b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$(a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b)$$

bo‘laklashni olamiz. Bo‘laklashning har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, ..., n - 1)$$

bo‘lagidagi ixtiyoriy ξ_k nuqtada $f(x)$ funksiya qiymati $f(\xi_k)$ ni topib, ushbu

$$\pi f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

miqdorni qaraymiz. Bu miqdor, asosining radiusi $f(\xi_k)$, balandligi Δx_k ga teng bo‘lgan silindrning hajmini ifodalaydi. Bundan ko‘rinadiki,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$$

miqdorni taxminan qaralayotgan aylanma jismning hajmi deb qarash mumkin.

Endi $[a, b]$ segmentning bo‘laklash nuqtalarining sonini shunday orttirib boraylikki, bunda $\max\{\Delta x_k\}$ nolga intilib borsin. U holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$$

yig‘indining qiymati ham o‘zgarib boradi va u tobora aylanma jismning hajmini aniqroq ifodalaydi.

Ushbu

$$V = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$$

limit **aylanma jismning hajmi** deyiladi.

Ayni paytda

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

bo‘ladi. Demak, aylanma jismning hajmi

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{9}$$

bo‘ladi.

Misol. Radiusi r ga teng bo‘lgan shar hajmi topilsin.

$\lhd$ Bu sharni ushbu

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r$$

yarim doiraning Ox o‘qi atrofida aylantirishidan hosil bo‘lgan jism deb qarash mumikn.

(9) formuladan foydalanib topamiz:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi r^3 . \rhd$$

4°. Aylana sirtining yuzi

Yuqoridagidek, $[a,b]$ da uzluksiz $f(x)$ funksiya ($f(x) \ge 0$) grafigi $\breve{AB}$ yoyini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan sirtni qaraylik.

$[a,b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b)$$

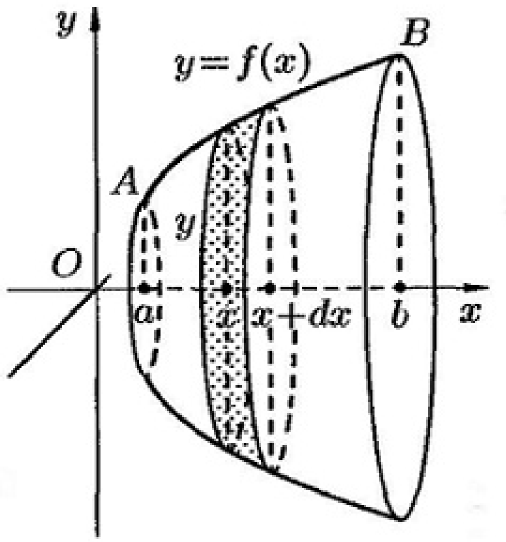
bo‘laklashni olamiz. Bo‘laklashning har bir bo‘laklovchi

$$x_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

nuqtalaridan Oy o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazib, ularning $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishgan nuqtalarini

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

bilan belgilaymiz. Natijada $\breve{AB}$ yoyida $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1)$, ..., $A_k(x_k, f(x_k)$, $A_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, ..., $A_n(x_n, f(x_n))$ $(A = A_0,\ B = B_n)$ nuqtalar hosil bo‘lib, ularni o‘zaro to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan birlashtirishdan L siniq chiziqqa ega bo‘lamiz. L siniq chiziqning Ox o‘qi atrofida aylanishidan kesik konus sirtlardan tashkil topgan sirt hosil bo‘ladi.



8-chizma.

L siniq chiziq A_kA_{k+1} bo‘lagining aylanishidan hosil bo‘lgan kesik konus sirti yuzi

$$2\pi\frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo‘ladi. Bunday sirtlar yuzalarining yig‘indilaridan iborat ushbu

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

miqdorni taxminan aylana sirtning yuzi deb qarash mumkin.

Demak, aylana sirt yuzi

$$S = \lim_{\lambda \to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{2} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, qaralayotgan $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin.

Unda aylana sirtning yuzi

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{10}$$

bo‘ladi.

Misol. Radiusi r ga teng bo‘lgan shar sirtining yuzi topilsin.

$\lhd$ Bu sirtni

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leq x \leq r)$$

yarim aylanani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan sirt deb qarash mumkin.

(10) formuladan foydalanib topamiz:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi r \cdot x \Big|_{-r}^{r} = 2\pi r(r + r) = 4\pi r^2. \rhd$$

8-§. Aniq integralning mexanik va fizik tatbiqlari

1°. O‘zgaruvchi kuchning bajargan ishi

Faraz qilaylik, biror jism Ox o‘qi bo‘ylab,

$$F = F(x)$$

kuch ta’sirida harakatda bo‘lib, bu kuchning yo‘nalishi harakat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushsin.

Bu kuch ta’sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o‘tkazishda bajarilgan ishni topish masalasini qaraylik.

Ma’lumki, $F(x) = c$ $(c = const)$ bo‘lsa, unda bajarilgan ish

$$A = c(b - a)$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $F = F(x)$ kuch $[a, b]$ da x o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyasi bo‘lsin.

$[a, b]$ segmentning biror

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n\}$$

$$(a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b)$$

bo‘laklashni olamiz. Bu bo‘laklashning har bir

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

bo‘lagidagi ixtiyoriy ξ_k nuqtada $F(x)$ funksiya qiymati $f(\xi_k)$ ni shu bo‘lakcha uzunligiga ko‘paytiramiz:

$$F(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = F(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Bu miqdor taxminan kuchning $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda bajargan ishini, ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig‘indi esa taxminan $F(x)$ kuch yordamida, jismni a nuqtadan b nuqtaga o‘tishda bajarilgan ishni ifodalaydi.

Agar $[a,b]$ segmentning bo‘laklash sonni shunday orttira borilsaki, bunda $\max\{\Delta x_k\}$ nolga intilib borsa, u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$$

yig‘indining miqdori ham o‘zgarib boradi va u tobora bajarilgan ishni aniqroq ifodalab boradi. Demak, bajarilgan ishni

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$$

deb qarash mumkin. Ayni paytda

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b F(x)\,dx$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, bajarilgan ish

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx \tag{1}$$

bo‘ladi.

Misol. Og‘irligi $P = 1,5t.$ bo‘lgan raketani yer sirtidan $H = 2000$ km. balandlikka ko‘tarishda raketa dvigatelining bajargan ishi topilsin.

$\lhd$ P og‘irlikdagi raketaning yerga tortilish kuchi F yer markazigacha bo‘lgan x masofaga bog‘liq bo‘lib,

$$F(x) = \frac{\lambda}{x^2}$$

bo‘ladi, bunda λ – o‘zgarmas.

Agar

$$P = \frac{\lambda}{R^2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\lambda = P \cdot R^2$$

bo'lib,

$$F(x) = \frac{P \cdot R^2}{x^2}$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda $R-$ yer shari radiusi raketani yer sirtidan H balandlikka ko'tarishda bajarilgan ish

$$A = \int_{R}^{R+H} F(x)\,dx = \int_{R}^{R+H} \frac{PR^2}{x^2}\,dx = P \cdot R^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{R}^{R+H} = \frac{P \cdot R \cdot H}{R+H}$$

bo'ladi.

$P = 1,5$ m, $H = 2000$ km, $R = 6400$ km bo'lganligi uchun $A = 2285714000$ kgm ≈ 22422854340 dj. bo'ladi.

Raketaning yerga tortilishidan to'liq qutilishi uchun bajarilgan ish

$$\lim_{H\to\infty} A = \lim_{H\to\infty} \frac{PRH}{R+H} = \lim_{H\to\infty} \frac{PRH}{H(\frac{R}{H}+1)} = PR,$$

ya'ni

$$9600000000 \text{ kgm} \approx 94176000000 dj.$$

bo'ladi. $\triangleright$

2° Inersiya momentlari

Ma'lumki, tekislikda t massaga ega bo'lgan $A = A(x, y)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = my^2, \quad J_y = mx^2, \quad J_0 = m(x^2 + y^2)$$

bo'ladi.

Tekislikda, har biri mos ravishda

$$m_0, m_1, ..., m_{n-1}$$

massaga ega bo‘lgan

$$A_0(x_0, y_0),\ \ A_1(x_1, y_1),\ \ ...,\ \ A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$$

moddiy nuqtalar sistemasining koordinata o‘qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k^2, \quad J_y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k^2, \quad J_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin. Bu funksiya grafigi tasvirlangan egri chiziq bo‘yicha massa tarqatilgan. Bu massali egri chiziq yoyining koordinata o‘qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \quad J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

bo‘ladi.

Misol. Radiusi a ga teng bir jinsli yarim aylananing, uning diametriga nisbatan inersiya momenti topilsin.

$\lhd$ Yarim aylananing markazini koordinata boshi, Ox o‘qini esa diametri bo‘yicha olingan deb qaraymiz.

Ravshanki,

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

bo‘ladi. Shuni e’tiborga olib topamiz:

$$J_x = \int_{-a}^{a} f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = 2\int_0^a f^2(x)\frac{a}{f(x)}dx = 2a\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx =$$

$$= 2a\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a = 2a\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\frac{1}{2}\pi a^3. \triangleright$$

9-§. Xosmas integrallar

Funksiyaning aniq integralini o‘rganishda integrallash oralig‘i $[a, b]$ ning chekliligi hamda $f(x)$ funksiyaning uzluksiz bo‘lishi talab etildi. Ba’zan bu ikki talabdan biri yoki ikkalasi bajarilmay qolishi mumkin. Mana shunday hollarda funksiya integrali tushunchasi yordamida hal qilinadigan masalalarning mavjudligi integral tushunchasining shu hollar uchun umumlashtirishni taqazo etadi.

1°. Cheksiz oraliq bo‘yicha integral

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lsin.

U holda

$$\int_a^A f(x)\,dx \quad (a < A < +\infty)$$

integral mavjud bo‘lib, uning qiymati A ga bog‘liq bo‘ladi.

Ushbu

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \tag{1}$$

limit $f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali deyiladi va quyidagicha $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ belgilanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx.$$

Misollar. 1. Ushbu

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

integral topilsin.

◁ Ravshanki,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

funksiya $[1, +\infty)$ da uzluksiz va

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = \int_1^A x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^A = -\frac{1}{x}\Big|_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

bo‘ladi. $A \to +\infty$ da limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1.$$

Demak,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1.\triangleright$$

2. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} x^3 dx$$

integral topilsin.

◁ Xosmas integral tushunchasidan foydalanib topamiz:

$$\int_0^{+\infty} x^3 dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^3 dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^4}{4}\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}A^4 = +\infty.\triangleright$$

3. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

topilsin.

◁ Bu $f(x) = \cos x$ funksiyaning $[0, +\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali mavjud bo‘lmaydi, chunki,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to+\infty}\sin x\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty}\sin A$$

limit mavjud emas.$\triangleright$

Agar (1) limit mavjud bo‘lib, u chekli bo‘lsa, (2) xosmas integral **yaqinlashuvchi** deyiladi.

Masalan,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar (1) limit cheksiz yoki u mavjud bo‘lmasa, (2) xosmas integral **uzoqlashuvchi** deyiladi. Masalan,

$$\int\limits_0^{+\infty} x^3 dx, \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$$

xosmas integrallar uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (a > 0,\ \alpha > 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\triangleleft$ Xosmas integral tushunchasiga ko‘ra

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} x^{-\alpha} dx = \lim_{A \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^A =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) \quad (\alpha \neq 1)$$

bo‘ladi.

Agar $\alpha > 1$ bo‘lsa

$$\lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) = -\frac{1}{a^{\alpha-1}}$$

bo‘lib,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi

Agar $0 < \alpha < 1$ bo'lsa,

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{A^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)=+\infty$$

bo'lib,

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

hosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to+\infty}\ln x\Big|_a^A=\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln a)=+\infty$$

bo'lib, qaralayotgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak,

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\quad(a>0,\alpha>0)$$

xosmas integral $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \le 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi.$\rhd$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ da uzluksiz bo'lishidan tashqari $\forall x \in [a, +\infty)$ da $f(x) > 0$ bo'lsin. U holda

$$\int\limits_a^A f(x)dx$$

(u olingan A ga bog'liq, $a < A < +\infty$) A ning funksiyasi sifatida o'suvchi bo'ladi.

$\lhd$ Haqiqatdan ham, $A' > A$ uchun

$$\int\limits_a^{A'} f(x)dx=\int\limits_a^A f(x)dx+\int\limits_A^{A'} f(x)dx$$

bo‘lib,

$$\int_A^{A'} f(x)dx > 0$$

bo‘lganligi sababli

$$\int_a^{A'} f(x)dx > \int_a^{A} f(x)dx$$

bo‘ladi. $\triangleright$

Bu holda ixtiyoriy A $(A > a)$ uchun

$$\int_a^{A} f(x)dx \le L \quad (L- \text{ o‘zgarmas son})$$

tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Faraz qilaylik,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lib, $f(x)$ funksiya boshlang‘ich $F(x)$ ga ega bo‘lsin $(F'(x) = f(x))$.

U holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^{A} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}(F(A)-F(a)) = \lim_{A\to+\infty} F(A)-F(a)$$

bo‘ladi. Agar

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = F(+\infty)$$

deyilsa, keyingi tenglikdan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \tag{3}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

integral hisoblansin.

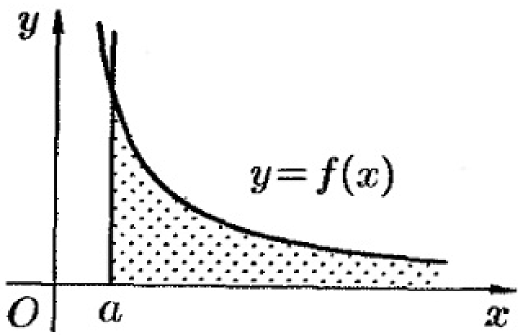
$\lhd$ Ravshanki, integral ostidagi $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ funksiya uchun $F(x) = \operatorname{arctg} x$ boshlang'ich funksiya bo'ladi. (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \rhd$$

Musbat funksiyaning

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrali $f(x)$ funksiya grafigi tasvirlovchi egri chiziq, Ox o'qi, hamda $x = a$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini ifodalaydi.



9-chizma.

Eslatma. Ushbu

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integrallar quyidagicha

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{a} f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

kiritiladi.

2°. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

Aytaylik, $f(x)$ funksiya b nuqtaning $(b-\delta, b)$ atrofida $(\delta > 0)$ chegaralanmagan bo‘lsin.

Ravshanki, bu funksiya $[a, b-\delta]$ da uzluksiz va

$$\int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$$

integral δ ga bog‘liq bo‘ladi.

Ushbu

$$\lim_{\delta\to0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx \tag{4}$$

limit chegeralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va quyidagicha

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \tag{5}$$

belgilanadi:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta\to0} \int\limits_{a}^{b-\delta} f(x)dx$$

Misollar. 1. Ushbu

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

integral topilsin.

$\lhd$ Integral ostidagi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

funksiya $[0, 1-\delta]$ da $(\delta > 0)$ uzluksiz va

$$\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\int\limits_0^{1-\delta} (1-x)^{-\frac{1}{2}} d(1-x) = -\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^{1-\delta} = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{1-\delta} =$$

$$= -2((1-(1-\delta))^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}) = -2(\delta^{\frac{1}{2}} - 1) = 2 - 2\sqrt{\delta}$$

bo'ladi. $\delta \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\delta\to 0}(2 - 2\sqrt{\delta}) = 2.$$

Demak,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2. \rhd$$

2. Ushbu

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

integral topilsin.

$\lhd$ Xosmas integral tushunchasidan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} \frac{d(1-x)}{1-x} = -\lim_{\delta\to 0} \ln(1-x)\Bigg|_0^{1-\delta} =$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}(\ln(1-1+\delta) - \ln(1-0)) = \lim_{\delta\to 0} \ln\delta = +\infty. \rhd$$

Agar (4) limit mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, (5) xosmas integral **yaqinlashuvchi** deyiladi.

Masalan,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi.

Agar (4) limit cheksiz yoki u mavjud bo‘lmasa (5) xosmas integral **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Masalan,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

xosmas integral uzoqlashuvchi.

Faraz qilaylik,

$$\int_a^b f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lib, $[a,b]$ da uzluksiz $F(x)$ funksiya uchun

$$F'(x) = f(x) \quad (a \leq x < b)$$

bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}(F(b-\delta) - F(a)) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} F(b-\delta) - F(a) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

bo‘ladi. Bu

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \tag{6}$$

formula yoqdamida xosmas integrallar hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Integral ostidagi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

funksiya uchun boshlang‘ich funksiya

$$F(x) = \arcsin(2x-1)$$

bo‘ladi, chunki

$$F'(x) = (\arcsin(2x-1))' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4(1-x)x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

(6) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$\arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.\triangleright$$

III bob. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar

Biz oliy matematikaning dastlabki boblarida funksiya (bir o‘zgaruvchili funksiya) tushunchasi bilan tanishdik, bunday funksiyalarning limiti, uzluksizligi, hosila va differensiallari hamda integrallarini o‘rgandik.

Ko‘p hollarda, tabiatda hamda texnikada uchraydigan miqdorlar bir nechta o‘zgaruvchilarga bo‘g‘liq bo‘ladi. Masalan,

1) Klapeyron formulasiga ko‘ra m massali gazning hajmi ikki o‘zgaruvchi T – temperatura va P – bosimga bog‘liq bo‘lib,

$$V = C\frac{T}{P}$$

bo‘ladi, bunda C – const,

2) asosining radiusi R, balandligi H bo‘lgan doiraviy ko‘nus hajmi

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

bo‘lib, u ham ikki o‘zgaruvchi R va H larga bog‘liq bo‘ladi.

Umuman, ikki va undan ortiq o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan miqdorlar haqidagi masalalarni hal etish ko‘p o‘zgaruvchili funksiya tushunchasiga olib keladi va ularni o‘rganishni taqazo etadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarda ham funksiya limiti, uzluksizligi, hosila va diferrensiallari hamda integrallari o‘rganiladi. Bunda ko‘p tushunchalar va tasdiqlar bir argumentli funksiya o‘xshash bo‘lganligi sababli ulardan muttasil foydalana boramiz va ma’lumotlarni qisqa bayon etamiz.

Soddalik uchun ikki o‘zgaruvchiga bog‘liq funksiyalarni (ikki argumentli funksiyalarni qaraymiz).

1-§. Tekislik va undagi to‘plamlar

Ma’lumki, $\mathbb{R}$ – barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to‘plamdan iborat.

Aytaylik, x o'zgaruvchi bo'lib, uning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'lsin. Uni, odamda $x \in \mathbb{R}$ kabi yoziladi.

Aytaylik, y ikkinchi o'zgaruvchi bo'lib, uning qabul qiladigan qiymatlari ham haqiqiy sonlar bo'lsin: $y \in \mathbb{R}$.

Endi x o'zgaruvchining biror x_0 qiymatini $(x = x_0)$, y o'zgaruvchining biror y_0 qiymatini olib $(y = y_0)$, ulardan (x_0, y_0) juftlikni hosil qilamiz. Bu juftlik tekislikda (Dekatr koordinatalari sistemasida) biror nuqtani (tekislik nuqtasini) tasvirlaydi. (Odatda x_0 tekislikni nuqtasining abssissasi, y_0 esa ordinatasi deyiladi.)

Ravshanki, x va y o'zgaruvchilarning turli qiymatlari turli (x, y) juftliklarni hosil qiladi. Barcha

$$\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

juftliklar to'plami tekislikni tashkil etadi.

Demak, tekislik barcha (x, y) juftliklar to'plamidan iborat. Uni $\mathbb{R}^2$ kabi belgilanadi:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Faraz qilaylik,

$$(x_1, y_2), (x_2, y_2)$$

lar tekislikning, ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsin. Ushbu

$$d((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor ikki nuqta orasidagi masofa deyiladi. Masofa quyidagi xossalarga ega:

a) har doim $\quad d((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \geq 0$ va

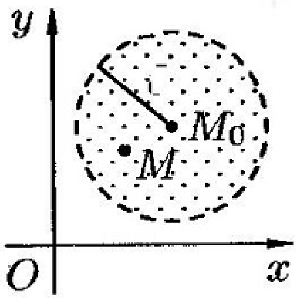
$$d((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,$$

b) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d((x_2, y_2), (x_1, y_1))$,

d) $d\left((x_1,y_1),(x_3,y_3)\right) \le d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) + d\left((x_2,y_2),(x_3,y_3)\right)$, bunda $(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$

Aytaylik, biror $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ nuqta va musbat r soni berilgan bo‘lsin. Endi tekislikning shunday (x,y) nuqtalaridan iborat to‘plamni qaraymizki, bu to‘plamning ixtiyoriy nuqtasidan (a,b) nuqtagacha bo‘lgan masofa r dan kichik bo‘lsin. Bunday (x,y) nuqtalar to‘plami markazi (a,b) nuqtada, radiusi r ga teng bo‘lgan doira deyiladi (1-chizma). Uni quyidagicha belgilanadi:

$$B_r((a,b)) = \{(x,y) : d\left((x,y),(a,b)\right) < r\}.$$



1-chizma.

Tekislikning shunday (x,y) nuqtalaridan iborat to‘plamni qaraymizki, bu to‘plamning ixtiyoriy nuqtasidan (a,b) nuqtagacha bo‘lgan masofa r ga teng bo‘lsin. Bunday (x,y) nuqtalar to‘plami markazi (a,b) nuqtada, radiusi r ga teng bo‘lgan aylana deyiladi. Uni quyidagicha belgilanadi:

$$B_r^{\circ}((a,b)) = \{(x,y) : d((x,y),(a,b)) = r\}.$$

Tekislikni shunday (x,y) nuqtalaridan iborat to‘plamini qaraymizki, bu to‘plamni ixtiyoriy nuqtasi ushbu

$$a < x < b, \quad d < y < c$$

tengsizlikni qanoatlantirsin. Bunday (x, y) nuqtalaridan iborat to'plamni tekislikda to'g'ri to'rtburchak shaklida ifodalaydi.

Tekislikni shunday (x, y) nuqtalaridan iborat to'plam qaraymizki, ixtiyoriy nuqtasi ushbu

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Bunday (x, y) nuqtalar to'plami uchburchak shaklini ifodalaydi.

Nuqtaning atrofi. Ochiq hamda yopiq to'plamlar

Biror $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqta va δ musbat son berilgan bo'lsin. Markazi (x_0, y_0) nuqtada radiusi δ bo'lgan doira (x_0, y_0) **nuqtaning atrofi** (δ-**atrofi**) deyiladi. Uni $U_\delta((x_0, y_0))$ kabi belgilanadi. Demak, (x_0, y_0) nuqtaning atrofi tekislikni shunday (x, y) nuqtalaridan iborat to'plam ekanki, bu to'plamning istalgan nuqtasidan (x_0, y_0) nuqtagacha bo'lgan masofa δ dan kichik bo'ladi:

$$U_\delta((a, b)) = \{(x, y) : d((x, y), (a, b)) < \delta\}.$$

Aytaylik, tekislikda, biror M to'plam berilgan bo'lib, (x_0, y_0) shu to'plamning nuqtasi bo'lsin: $(x_0, y_0) \in M$.

Agar bu nuqtaning biror atrofi shu M to'plamga tegishli bo'lsa, (x_0, y_0) nuqta M to'plamning **ichki nuqtasi** deyiladi.

Agar to'plam faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, u **ochiq to'plam** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan

$$B_r((a, b)) = \{(x, y) : d((x, y), (a, b)) < r\}$$

doira ochiq to'plam bo'ladi.

Aytaylik, (x_1, y_1) nuqta ochiq M to'plamga tegishli bo'lmagan nuqta bo'lsin. Bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida M to'plamning nuqtalari bo'lsa, (x_1, y_1) nuqta M to'plamning **chegaraviy nuqtasi** deyiladi.

M to'plamning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to'plam M **to'plamning chegarasi** deyiladi va uni $\partial(M)$ kabi belgilanadi.

Ochiq to'plam uning chegarasidan tashkil topgan to'plam yopiq to'plam deyiladi. Masalan,

$$B_r((a, b)) = \{(x, y) : d((x, y), (a, b)) < r\}$$

ochiq to'plamning chegarasi ushbu

$$\partial(B_r((a, b))) = \{(x, y) : d((x, y), (a, b)) = r\}$$

aylanadan iborat bo'lib, $B_r((a, b))$ va $\partial(B_r((a, b)))$ lardan tashkil topgan ushbu

$$\{(x, y) : d((x, y), (a, b)) \leq r\}$$

to'plam yopiq to'plam bo'ladi.

2-§. Ikki o'zgaruvchi funksiya, uning limiti hamda uzluksizligi

1. Ikki o'zgaruvchili funksiya tushunchasi.

Faraz qilaylik, tekislikda biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset \mathbb{R}^2$.

1-ta'rif. Agar E to'plamdagi har bir (x, y) nuqtaga biror f qoidaga ko'ra bitta haqiqiy u son mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda ikki o'zgaruvchili funksiya berilgan deyiladi. Uni

$$u = f(x, y)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning **aniqlanish** (**berilish**) **to'plami** (**sohasi**), x, y lar (erkli o'zgaruvchilar) funksiya **argumentlari**, u esa x va y larning funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, $u = f(x, y)$ funksiya E to‘plamda berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamdagi (x_0, y_0) nuqtaga mos keluvchi u_0 son $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi **xususiy qiymati** deyiladi va $u_0 = f(x_0, y_0)$ kabi yoziladi. Barcha xususiy qiymatlardan iborat ushbu

$$\{u = f(x, y) : (x, y) \in E\}$$

sonlar to‘plami $u = f(x, y)$ funksiya **qiymatlari to‘plami** deyiladi.

Har bir (x, y) ga bitta u ni mos qo‘yadigan qoida turlicha bo‘ladi. Ko‘pincha x, y va u lar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x, y larning har bir qiymatiga mos keladigan u funksiya qiymati x va y lar ustida analimitik amallar bajaralishi natijasida topiladi. Bunday funksiyalarga quyidagilar misol bo‘ladi:

$$1)\ u = x^2 + y^2,$$

$$2)\ u = 1 - x - y,$$

$$3)\ u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$4)\ u = \ln(4 - x^2 + y^2).$$

Formulalar yordamida berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi mazkur formula ma’noga ega bo‘ladigan tekislik nuqtalaridan iborat to‘plam bo‘ladi.

Masalan,

$$u = x^2 + y^2$$

tenglik, tekislikni har bir nuqtasida ma’noga ega. Binobarin, bu funksiyaning aniqlanish sohasi tekisligini barcha nuqtalaridan iborat to‘plam, ya’ni $\mathbb{R}^2$ to‘plam bo‘ladi.

Ushbu

$$u = \ln(4 - x^2 + y^2)$$

funksiyaning aniqlanish sohasining nuqtalarida

$$4 - x^2 - y^2 > 0$$

ya'ni

$$x^2 + y^2 < 4$$

bo'lishi lozim. Demak, bu funksiyaning aniqlanish sohasi markazi $(0, 0)$ nuqtada radiusi 2 ga teng quyidagi

$$\{(x, y) : d((x, y), (0, 0)) < 2\}$$

doiradan iborat.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning geometrik tasviri

Faraz qilaylik,

$$u = f(x, y)$$

funksiya biror E to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Fazoda to'g'ri burchakli Dekatr koordinatalar sistemasini qaraymiz.

E to'plamda biror (x_0, y_0) nuqtani olib, $u = f(x, y)$ funksiyaning shu nuqtasidagi qiymatini topamiz:

$$u_0 = f(x, y).$$

Natijada

$$(x_0, y_0, u_0) \quad (u_0 = f(x_0, y_0))$$

uchlik hosil bo'lib, u fazoda bitta nuqtani ifodalaydi.

Agar (x, y) nuqta E to'plamda o'zgara borsa, unda ularga mos ravishda $u = f(x, y)$ funksiya ham turli qiymatlarga ega bo'lib, (x, y, u) uchlilar fazoda nuqtalar to'plamini hosil qiladi. Bu nuqtalar to'plami, umuman aytganda biror sirtni ifodalaydi. Bu sirt $u = f(x, y)$ funksiyaning geometrik tasviri (funksiya grafigi) bo'ladi.

Masalan,

$$u = 1 - x - y$$

funksiya grafigi fazoning $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi tekislik bo'ladi.

Ko'pincha ikki o'zgaruvchili funksiyalarni geometrik tasvirlash (grafiklarini yasash) katta qiyinchiliklar tug'diradi. Bunday hollarda ikki o'zgaruvchili funksiyalarni qandaydir vositalar yordamida geometrik tassavur yetishiga harakat qilinadi. Ulardan biri sath chizig'i yordamida tassavur etishidir.

Aytaylik, ikki o'zgaruvchili

$$u = f(x, y)$$

funksiya berilgan bo'lsin.

Tekislikni shunday (x, y) nuqtalarini qaraymizki, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymati har doim o'zgarmas bo'lsin:

$$f(x, y) = c \quad (c = const) \tag{1}$$

Tekislikni bunday nuqtalari to'plami sath chizig'i deyiladi. Ravshanki, (1) tenglama sath chizig'ining tenglamasi bo'ladi.

(1) tenglamada c ga turli qiymatlar berib, har gal turli sath chizig'iga ega bo'lamiz. Natijada sath chiziqlar to'plami hosil bo'lib, u berilgan $u = f(x, y)$ funksiyaning geometrik tasavvur etishga beradi. Masalan,

$$u = x^2 + y^2$$

funksiyaning sath chizig'i ushbu

$$x^2 + y^2 = c \quad (0 \leq c < +\infty)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bunda c ga turli qiymatlar berib, masalan,

$$c = 0, 1, 2, 3, ...$$

deb, turli sath chiziqlari va uning to'plamiga ega bo'lamiz.

Bunda har bir sath chiziq $u = c$ tekislikda joylashgan markazi $(0, 0, c)$ nuqtada, radiusi $\sqrt{c}$ ga teng aylana bo'ladi.

Bunday aylanalar to'plami $f(x, y)$ funksiyaning grafigi aylana sirt bo'lishidan darak beradi.

Ma'lumki, $u = x^2 + y^2$ tenglama aylanma paraboloidni tasvirlaydi. Demak, berilgan funksiyaqning grafigi aylanma paraboloid bo'ladi.

3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi

Mazkur kursda sonlar ketma-ketligi va uning limiti tushunchalari bayon etilgan edi. Xuddi shuncha o'xshash tekislik nuqtalaridan tuzilgan ketma-ketlik va uning limiti tushunchalari kiritiladi.

Aytaylik, tekislik nuqtalaridan iborat $\{(x_n, y_n)\}$:

$$(x_1, y_1,)(x_2, y_2,), ...(x_n, y_n), ... \tag{1}$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Ravshanki, bu nuqtalarning koordinatalari ushbu

$$x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...,$$

$$y_1, y_2, y_3, \cdots y_n, \cdots\cdot,$$

sonlar ketma ketliklarini hosil qiladi.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

bo'lsa, (x_0, y_0) nuqta (1) ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$

yoki

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$$

kabi belgilanadi.

(1) ketma-ketlik hadlari bilan (x_0, y_0) nuqta orasidagi masofa

$$d_n((x_n, y_n), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$$

n ga bo'gliq bo'lib,

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$$

bo'lsa, u holda

$$d_n((x_n, y_n), (x_0, y_0)) \to 0$$

bo'ladi va aksincha.

Faraz qilaylik, $u = f(x, y)$ funksiya $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtaning biror atrofi

$$U_\delta((x_0, y_0)) = \{(x, y) : d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta\} \quad (\delta > 0)$$

da berilgan bo'lsin. (Bu funksiya (x_0, y_0) nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin).

Endi shu atrofga tegishli va limiti (x_0, y_0) ga teng bo'lgan ixtiyoriy

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ...(x_n, y_n), ... \quad ((x_n, y_n) \neq (x_0 y_0))$$

ketma-ketligini olamiz:

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0).$$

Bu nuqtalar ketma-ketligining har bir hadida $u = f(x, y)$ funksiya qiymatlarini topib, ulardan ushbu

$$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), , ...f(x_n, y_n), ... \tag{2}$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

Agar (2) sonlar ketma-ketligi A limitiga ega, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A$$

bo'lsa, A sonni $f(x, y)$ funksiyaning $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dagi **limiti** deyiladi va

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = A$$

kabi belgilanadi.

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 2, y\to 1}(2x^2 - 3xy)$$

limit topilsin.

$\lhd$ (2,1) nuqtaga intiladigan ixtiyoriy $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikni ($x_n \to 2$, $y_n \to 1$) olib, ketma-ketlik hadlarida $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$ funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$f(x_n, y_n) = 2x_n^2 - 3x_n y_n.$$

Ravshanki, $x_n \to 2, y_n \to 1$ da

$$f(x_n, y_n) = 2x_n^2 - 3x_n y_n \to 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2\cdot 1 = 2$$

bo'ladi, Demak,

$$\lim_{x\to 2, y\to 1}(2x^2 - 3xy) = 2. \rhd$$

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0, y\to 1}\frac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}$$

limit topilsin.

$\lhd$ (0,1) nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{(x_n, y_n)\}$ ketma-ketlikni

$$x_n \to 0, y_n \to 1$$

olib, bu ketma-ketlikni hadlarida

$$f(x,y) = \frac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}$$

funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\sin(x_n - y_n + 1)}{x_n - y_n + 1}$$

Ravshanki, $x_n \to 0, y_n \to 1$ da $\alpha_n = x_n - y_n + 1 \to 0$. Demak,

$$\lim_{x_n\to 0, y_n\to 1}\frac{\sin(x_n - y_n + 1)}{x_n - y_n + 1} = \lim_{\alpha_n\to 0}\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1$$

Shanday qilib berilgan limit

$$\lim_{x\to 0, y\to 1} \frac{\sin(x-y+1)}{x-y+1} = 1$$

bo‘ladi.$\triangleright$

Agar

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} \alpha(x,y) = 0$$

bo‘lsa, $\alpha(x,y)$ cheksiz kichik funksiya deyiladi. Quyidagi tasdiq o‘rinli:

$(x,y) \to (x_0,y_0)$ da $f(x,y)$ funksiya A limitiga ega bo‘lishi uchun

$$f(x,y) - A = \alpha(x,y)$$

funksiyaning cheksiz kichik funksiya bo‘lishi zarur va yetarli.

Endi limitiga ega bo‘lgan funksiyaning xossalarini keltiramiz:

1) agar $(x,y) \to (x_0,y_0)$ da $f(x,y)$ funksiya limitiga ega bo‘lsa, u yagona bo‘ladi;

2) o‘zgarmas sonni limiti o‘ziga teng bo‘ladi;

3) agar

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = A, \qquad \lim_{x\to x_0, y\to y_0} g(x,y) = B$$

bo‘lsa, u holda:

$$a) \lim_{x\to x_0, y\to y_0} Cf(x,y) = C\cdot A, \quad (C = const),$$
$$b) \lim_{x\to x_0, y\to y_0} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B,$$
$$v) \lim_{x\to x_0, y\to y_0} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = A \cdot B,$$
$$g) \lim_{x\to x_0, y\to y_0} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

bo‘ladi.

Eslatma. Bir o‘zgaruvchili funksiya limiti haqidagi ma’lumotlar hamda yuqorida aytilganlardan

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = A,$$

$$\lim_{x\to y_0, y\to y_0} f(x,y) = +\infty$$

va h.k. larni anglash qiyin emas.

Masalan,

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to \infty, y\to \infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

bo'ladi.

Aytaylik, $u = f(x,y)$ funksiya tekislikidagi E to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) shu E to'plamga tegishli nuqta bo'lsin: $(x_0, y_0) \in E$.

Ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

bo'lsa,$f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz deyiladi.

Demak, $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

1) $(x,y) \to (x_0, y_0)$ da $f(x,y)$ funksiya chekli A limitiga ega;

2) $A = f(x_0, y_0)$ bo'lishi kerak.

Masalan, $u = 2x - 3y + 1$ funksiya ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0, y\to y_0} (2x - 3y + 1) =$$

$$= \lim_{x\to x_0, y\to y_0} 2x - \lim_{x\to x_0, y\to y_0} 3y + 1 = 2x_0 - 3y_0 + 1 = f(x_0, y_0).$$

Funksiyaning uzluksizligi shartini ifodalovchi (1) munosabatni unga teng kuchli bo'lgan, ayni paytda tatbiq uchun qulay ko'rinishga keltirish mumkin.

Ravshanki,

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

tenglik, ushbu

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} [f(x,y) - f(x_0, y_0)] = 0$$

tenglikka teng kuchli.

Agar

$$\triangle x = x - x_0, \quad \triangle y = y - y_0,$$

$$\triangle u = \triangle f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

deyilsa, unda (1) munosabatni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} \triangle u = \lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} \triangle f(x_0, y_0) = 0. \tag{1'}$$

Odatda, $\triangle x$ va $\triangle y$ larga argument orttirmalari, $\triangle u = \triangle f$ ga esa funksiya orttirmasi (funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi to‘liq orttirmasi) deyiladi.

Demak, $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada uzluksizligi, bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta’riflanishi mumkin.

Agar $f(x, y)$ funksiya E to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, funksiya E to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Misol. Ushbu $f(x, y) = u = x^2 + y^2$ funksiya $\mathbb{R}^2$ to‘plamda uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilsin.

$\lhd$ Ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtani olib, bu nuqta koordinatasiga mos ravishda $\triangle x$ va $\triangle y$ orttirmalari beramiz. Natijada berilgan $f(x, y)$ funksiya ham

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

orttirmaga ega bo‘ladi. Uni hisoblaymiz:

$$\triangle f(x_0, y_0) = (x_0 + \triangle x)^2 + (y_0 + \triangle y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) =$$

$$= 2x_0 \triangle x + 2y_0 \triangle y + \triangle x^2 + \triangle y^2.$$

Unda

$$\lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} \triangle f(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} (2x_0 \triangle x + 2y_0 \triangle y + \triangle x^2 + \triangle y^2) = 0$$

bo‘ladi. Berilgan funksiya ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada, demak $\mathbb{R}^2$ to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.$\triangleright$

Endi ikki ozgaruvchili uzluksiz funksiyaning xossalarinin keltiramiz:

1) agar $f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq E to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u chegaralangan bo‘ladi;

2) agar $f(x, y)$ chegaralangan yopiq E to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda shunday $(x, y) \in E$ nuqta topiladigan, ixtiyoriy $(x_*, y_*) \in E$ uchun $f(x, y) \geq f(x_*, y_*)$, shuningdek, shunday $(x^*, y^*) \in E$ nuqta topiladiki, ixtiyoriy $(x, y) \in E$ uchun $f(x, y) \leq f(x_*, y_*)$, bo‘ladi;

3) agar $f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq E to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u E to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, ixtiyoriy $(x', y') \in E, (x'', y'') \in E$ da $d((x', y'), (x'', y)) < \delta$ bo‘lganda

$$|f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$$

bo‘ladi;

4) agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar E to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$f(x, y) \pm g(x, y), \quad f(x, y) \cdot g(x, y), \quad \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad (g(x, y) \neq 0)$$

funksiyalar ham E ga uzluksiz bo‘ladi.

3-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiallari

1. Funksiyaning xususiy hosilalari

Faraz qilaylik, tekislikdagi biror E to‘plamda $(E \subset \mathbb{R}^2)$ $u = f(x, y)$ funksiya berilgan bo‘lib,

$$(x_0, y_0) \in E \quad f(x_0 + \triangle x, y_0) \in E, \quad (x_0, y_0 + \triangle y) \in E$$

bo‘lsin. Ushbu

$$\triangle_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\triangle_y f(x_0, y_0) = (x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

ayirmalar mos ravishda $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi x o‘zgaruvchi bo‘yicha hamda y o‘zgaruvchi bo‘yicha **xususiy orttirmalari** deyiladi.

Ravshanki, berilgan $f(x, y)$ funksiya va berilgan (x_0, y_0) nuqtada $\triangle_x f(x_0, y_0)$ xususiy orttirma $\triangle x$ ga, $\triangle_y f(x_0, y_0)$ xususiy orttirma esa $\triangle y$ ga bog‘liq bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi x o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{yoki} \quad f'_x(x_0, y_0)$$

kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\triangle_x \to 0} \frac{\triangle x f(x_0, y_0)}{\triangle x}.$$

Agar

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y f(x_0, y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi y o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ yoki $f'_y(x_0, y_0)$ kabi belgilanadi:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\triangle_y f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

Keltirilgan ta’rifdan ko‘rinadiki, $f(x, y)$ funksiyaning x o‘zgaruvchisi bo‘yicha hosila qaralganda y ni o‘zgarmas; y o‘zgaruvchisi bo‘yicha hosila qolganida esa x ni o‘zgarmas deyilar ekan. Bu esa $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari o‘rganilgan bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi ekanligini bildiradi. Demak, $f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblashda bir o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasining hisoblashdagi ma’lum bo‘lgan qoida va jadvallardan to‘liq foydalanish mumkin.

Misol. Quyidagi funksiyaning xususiy hosilalari hisoblansin:

1) $u = 5x^2 + 8xy^2 + y^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (5x^2 + 8xy^2 + y^3)'_x = (5x^2)'_x + (8xy^2)'_x + (y^3)'_x =$$

$$= 10x + 8y^2 + 0 = 10x + 8y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (5x^2 + 8xy^2 + y^3)'_y = (5x^2)'_y + (8xy^2)'_y + (y^3)'_y =$$

$$= 0 + 16xy + 3y^2 = 16xy + 3y^2.$$

2) $u = \dfrac{xy}{x+y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(xy)'_x \cdot (x+y) - xy \cdot (x+y)'_x}{(x+y)^2} = \frac{y(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{xy + y^2 - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(xy)'_y \cdot (x+y) - xy \cdot (x+y)'_y}{(x+y)^2} = \frac{x(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + xy - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2},$$

3) $u = y\sin x + \cos(x-y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y\sin x + \cos(x-y))'_x = y\cos x - \sin(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (y\sin x + \cos(x-y))'_y = \sin x + \sin(x-y).$$

Faraz qilaylik, $u = f(x,y)$ funksiya E to‘plamda ($E \subset \mathbb{R}^2$) berilgan bo‘lib, $(x_0,y_0) \in E$ nuqtada $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Aytaylik, bu funksiyaning grafigi biror sirtni ifodalasin. Bu sirt bilan $x = x_0$ va $y = y_0$ tekisliklarning kesisishi natijasida Γ_1 va Γ_2 egri chiziqlarga (x_0, y_0, u_0) nuqtada o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsiyentlari bo'ladi.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning differensaillanuvchiligi. Zaruriy va yetarli shartlar

Aytaylik, $u = f(x, y)$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plamda berilgan bo'lib,

$$(x_0, y_0) \in E, \quad (x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \in E$$

bo'lsin, Ma'lumki, funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi orttirmasi

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$$

bo'lib, u $\triangle x$ va $\triangle y$ larga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar funksiya orttirmasi ushbu

$$\triangle f(x_0, y_0) = A\triangle x + B\triangle y + \alpha\triangle x + \beta\triangle y \tag{3}$$

ko'rinishda yozilish mumkin bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda A va B lar $\triangle x$ va $\triangle y$ larga bo'g'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar, α va β lar $\triangle x$ va$\triangle y$ larga bo'gliq va $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ da $\alpha \to 0, \beta \to 0$ bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

funksiya $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi, chunki, (x_0, y_0) nuqtada berilgan funksiya orttirmasi

$$\triangle f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \triangle x)^2 +$$

$$+ (y_0 + \triangle y)^2 - (x_0^2 + y_0^2) = 2x_0\triangle x + 2y_0\triangle y + \triangle x^2 + \triangle y^2$$

bo'lib, unda

$$A = 2x_0, \quad B = 2y_0, \quad \alpha = \triangle x, \quad \beta = \triangle y$$

deyilsa,

$$\triangle f(x_0, y_0) = A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y + \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y$$

bo'ladi. Bu esa $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi ekanini bildiradi.

Endi differensiallanuvchi funksiyaning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya $(x_0, y_0) \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik, $f(x, y)$funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga binoan

$$\triangle f(x_0, y_0) = A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y + \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} \triangle f(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} (A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle y + \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y) = 0$$

Demak,$f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz.$\triangleright$

2-teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya (x_0, y_0) nuqtada xususiy hosilalariga ega va

$$f'_x(x_0, y_0) = A, f'_y(x_0, y_0) = B$$

bo'ladi.

$\triangleleft$ $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\triangle f(x_0, y_0) = A\triangle x + B\triangle y + \alpha\triangle x + \beta\triangle y$$

bo'ladi.

Agar keyingi tenglikda $\triangle x \neq 0, \triangle y = 0$ deyilsa,

$$\triangle_x f(x_0, y_0) = A \cdot \triangle x + \alpha \cdot \triangle x; \tag{4}$$

$\triangle x = 0, \triangle y \neq 0$ deyilsa,

$$\triangle_y f(x_0, y_0) = B \cdot \triangle y + \beta \cdot \triangle y \tag{5}$$

bo‘ladi.

(4) va (5) munosabatidan foydalanib topamiz:

$$\frac{\triangle_x f(x_0,y_0)}{\triangle x} = A+\alpha, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\triangle_x f(x_0,y_0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle x\to 0}(A+\alpha) = A,$$

demak

$$f'_x(x_0,y_0) = A,$$

shuningdek

$$\frac{\triangle_y f(x_0,y_0)}{\triangle y} = B+\beta, \lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle_y f(x_0,y_0)}{\triangle y} =$$

$$= \lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle y} = \lim_{y\to 0}(B+\beta) = B,$$

demak

$$f'_y(x_0,y_0) = B.\triangleright$$

Natija. Agar $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa u holda

$$\triangle f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\triangle x + f'_y(x_0,y_0)\triangle y + \alpha\cdot\triangle x + \beta\cdot\triangle y$$

bo‘ladi.

Eslatma. $f(x,y)$ funksiyaning biror (x_0,y_0) nuqtada $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ xususiy hosilalarining mavjud bo‘lishidan, funksiyaning shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, ushbu

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $(0,0)$ nuqtada xususiy hosilalrga ega. Uni ta’rifga ko‘ra topamiz:

$$f'_x(0,0) = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(0+\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sqrt{|\triangle x \cdot 0|}}{\triangle x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, 0 + \triangle y) - f(0,0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, \triangle y)}{\triangle y} =$$

$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{\sqrt{|\triangle y \cdot 0|}}{\triangle y} = 0.$$

Ravshanki, qaralayotgan funksiyaning $(0,0)$ nuqtadagi orttirmasi

$$\triangle f(0,0) = f(0 + \triangle x, 0 + \triangle y) - f(0,0) = f(\triangle x, \triangle y) = \sqrt{|\triangle x \cdot \triangle y|}$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qaralayotgan $f(x,y)$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$\triangle f(0,0) = f'_x(0,0)\triangle x + f'_y(0,0)\triangle y + \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y = \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y$$

bo‘ladi. Keyingi ikki tenglikdan topamiz:

$$\sqrt{|\triangle x \cdot \triangle y|} = \alpha \cdot \triangle x + \beta \cdot \triangle y.$$

Agar $\triangle x = \triangle y > 0$ deyilsa, unda

$$\triangle x = \triangle x(\alpha + \beta),$$

ya’ni

$$\alpha + \beta = 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ da $\alpha \to 0, \beta \to 0$ bo‘lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga berilgan funksiyaning $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin deyilishidir. Demak, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ funksiya $(0,0)$ nuqtada differensiallanuvchi emas.

Shunday qilib $f(x,y)$ funksiyaning biror nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalariga ega bo‘lishi funksiyaning shu nuqtada differensialanuvchi bo‘lishining zaruriy sharti bo‘ladi.

Endi $f(x,y)$ funksiyaning biror nuqtada differensialanuvchi bo'lishining yetarli shartini ifodolovchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

3-teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning biror atrofida $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalariga ega bo'lib, bu xususiy hosilalar (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

Agar $f(x,y)$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

4-§. Yo'nalish bo'yicha hosila. Gradiyent

Faraz qilaylik, $u = f(x,y)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, (x_0,y_0) esa shu to'plamning biror nuqtasi bo'lsin.Bu nuqtadan o'tuvchi biror to'g'ri chiziqni qayarlik. Undagi ikki yo'nalishdan birini musbat yo'nalish, ikkinchisini manfiy yo'nalish deb qabul qilamiz. Yo'nalishga ega bo'lgan bu to'g'ri chiziqni l bilan belgilaymiz.

Agar l ning musbat yo'nalishi bilan Ox va Oy koordinatalar o'qlarining musbat yo'nalishlari orasidagi burchakni mos ravishda α va β deyilsa, unda

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = \cos\alpha, \frac{y-y_0}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = \cos\beta, \tag{1}$$

bo'ladi. Odatda ular l ning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Ravshanki, (x_0,y_0), $(x = x_0+\triangle x, y = y_0+\triangle x)$ nuqtalar orasida masofa

$$d((x_0,y_0),(x,y)) = \sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}$$

bo'ladi. l yo'nalishidagi (x,y) nuqta shu l bo'yicha (x_0,y_0) ga intilganda $(x \to x_0, y \to y_0)$ da ya'ni $(\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ da) ushbu

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} = \frac{f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}$$

nisbatini limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi l yo'nalish bo'yicha hosila deyiladi va $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\lim_{x\to x_0,y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0,\triangle y\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}. \qquad (2)$$

1-teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtadagi differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya (x_0,y_0) nuqtada har qanday yo'nalish bo'yicha hosilaga ega va

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cdot\cos\beta$$

bo'ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\triangle f(x_0,y_0)=f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\cdot\triangle x+$$

$$+f'_y(x_0,y_0)\cdot\triangle y+\alpha(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle x+\beta(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle y$$

bo'ladi, bunda, $(\triangle x\to 0,\triangle y\to 0)$ da $\alpha(\triangle x,\triangle y)\to 0,\beta(\triangle x,\triangle y)\to 0$.

Bu tenglikni har ikki tomonini $\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}$ ga bo'lib, $\triangle x=x-x_0$, $\triangle y=y-y_0$ bo'lishini hamda (2) munosabatini e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{f(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}=f'_x(x_0,y_0)\frac{x-x_0}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}+$$

$$+f'_y(x_0,y_0)\frac{y-y_0}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}+\alpha(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle x+\beta(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle y+$$

$$+f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta+\frac{\alpha(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle x+\beta(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle y}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}. \qquad (3)$$

Ravshanki ,

$$\lim_{\triangle x\to 0,\triangle y\to 0}\frac{\alpha(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle x+\beta(\triangle x,\triangle y)\cdot\triangle y}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}}=0.$$

(3) tenglikda $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ da limitiga o'tib, (1) va (2) munosabatlarini e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta. \triangleright$$

Misol. Ushbu

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

funksiyaning $(1, 1)$ nuqtada $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ vektor yo'nalish bo'yicha hosilasini topamiz.

$\triangleleft$ Ravshanki, bu holda

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$f'_x(x, y) = (x^2 + y^2)'_x = 2x, f'_x(1, 1) = 2,$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 + y^2)'_y = 2y, f'_y(1, 1) = 2$$

bo'ladi. Yuqoridagi formuladan foydalanib topamiz:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial l} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}. \triangleright$$

Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya E to'plamda differensiallanuvchi bo'lsin. Unda bu to'plamning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

xususiy hosilalar mavjud. Koordinatalari shu xususiy hosilalaridan iborat bo'lgan vektorni tuzamiz:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\overrightarrow{j}, \tag{4}$$

bunda $\overrightarrow{i}$ va $\overrightarrow{j}$ lar koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan birlik vektorlar. Bu vektor $f(x, y)$ funksiyaning gradiyenti deyiladi va $gradf$ kabi belgilanadi:

$$gradf = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\overrightarrow{j}.$$

Demak, $gradf\ E$ to‘plamning har bir (x,y) nuqtadagi bitta vektorni mos qo‘yuvchi qoida, boshqacha aytganda ikki o‘zgaruvchili vektor funksiya bo‘ladi.

$f(x,y)$ funksiyaning $\overrightarrow{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ vektor yo‘nalishi bo‘yicha $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ hosilasini uning gradiyenti orqali ifodalash mumkin. Haqiqatdan ham, $gradf$ va $\overrightarrow{e}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$$\overrightarrow{e}\,gradf=\cos\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

bo‘lib, u $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ ga teng bo‘ladi:

$$\overrightarrow{e}\,gradf=\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}.$$

Ayni paytda $\overrightarrow{e}$ va $gradf$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi shu vektor uzunliklari ko‘paytmasini ular orasidagi burchak kosinusiga ko‘paytirilganiga teng bo‘ladi:

$$\overrightarrow{e}\,gradf=|gradf|\cdot|\overrightarrow{e}|\cos(\overrightarrow{e},gradf).$$

Ravshanki, $|\overrightarrow{e}|=1$. Keyingi munosabatlaridan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}=|gradf|\cos(\overrightarrow{e},gradf)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu tenglikdan ko‘rinadiki, $\overrightarrow{e}$ va $gradf$ vektorlar parallel bo‘lganda $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ ning qiymati eng katta va u

$$|gradf|=\sqrt{f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}$$

ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, $gradf$ funksiyaning (x,y) nuqtadagi eng tez o‘sadigan tomonga yo‘nalgan bo‘lib, uning uzunligi shu yo‘nalishi bo‘yicha o‘sish tezligiga teng.

Misol. Ushbu

$$f(x,y)=x^2+2y^2$$

funksiyaning $(1,1)$ nuqtada eng tez o‘sadigan yo‘nalishi aniqlansin va yo‘nalish bo‘yicha o‘sish tezligi topilsin.

◁ Ravshanki,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y, \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = 4$$

bo‘lib,

$$gradf(1,1) = 2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j},$$

$$|gradf(1,1)| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$$

bo‘ladi.▷

4. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning differensiali. Taqribiy formula

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $E \subset \mathbb{R}^2$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x_0,y_0) \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Unda ta’rifga ko‘ra funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmasi

$$\triangle f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\triangle x + f'_y(x_0,y_0)\triangle y + \alpha\triangle x + \beta\triangle y \qquad (1)$$

bo‘ladi, bunda $\triangle x \to 0, \triangle y \to 0$ da $\alpha \to 0, \beta \to 0$.

1-ta’rif. $f(x,y)$ funksiyaning $\triangle f(x_0,y_0)$ orttirmasidan

$$f'_x(x_0,y_0)\triangle x + f'_y(x_0,y_0)\triangle y$$

ifoda $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi differensial (to‘liq differensiali) deyiladi va $df(x_0,y_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\triangle x + f'_y(x_0,y_0)\triangle y.$$

Demak, $f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi differensialli $\triangle x$ va $\triangle y$ larga bog‘liq bo‘lib, ularning chiziqli funksiyasi bo‘ladi.

Erkli o'zgaruvchilar x va y larning $\triangle x$ va $\triangle y$ orttirmalarini ularning differensiallariga almashtirib ($\triangle x = dx, \triangle y = dy$), keyingi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy. \tag{2}$$

Misol. Ushbu

$$u = x^3 \cos y$$

funksiyaning differensiali topilsin.

$\lhd$ Berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \cos y, \frac{\partial u}{\partial x} = -x^3 \sin y.$$

Unda funksiyaning differensiali

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 3x^2 \cos y dx - x^3 \sin y dy$$

bo'ladi.$\rhd$

Aytaylik, $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar $E \subset \mathbb{R}^2$ to'plamda berilgan bo'lib, (x, y) nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda

$$1)\ d(f(x, y) + g(x, y)) = df(x, y) + dg(x, y),$$

$$2)\ d(f(x, y) \cdot g(x, y)) = g(x, y)df(x, y) + f(x, y)dg(x, y),$$

$$3)\ d\left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right) = \frac{g(x, y)df(x, y) - f(x, y)dg(x, y)}{g^2(x, y)} \quad (g(x, y) \neq 0)$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$u = f(x, y) \tag{3}$$

funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0) \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda bu funksiya tasvirlagan sirt (x_0, y_0, u_0) nuqtada $(u_0 = f(x_0, y_0))$ urinma tekislikka ega bo'lib, uning tenglamasi quyidagicha

$$z - u_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

bo'lar edi. Keyingi ikki tenglikdan topamiz:

$$df(x_0, y_0) = Z - u_0.$$

Shunday qilib, $u = f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi differensiali bu funksiya grafigi $(x_0, y_0, u_0 = f(x_0, y_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik applikatasi orttirmasini ifodalar ekan

Ravshanki,

$$\triangle f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \alpha \triangle x + \beta \triangle y.$$

Bu tenglikdan

$$\lim_{\triangle x \to 0, \triangle y \to 0} \frac{\triangle f(x_0, y_0)}{df(x_0, y_0)} = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\triangle x$ va $\triangle y$ lar yetarligicha kichik bo'lganda

$$\triangle f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$$

bo'ladi. Bu taqribiy formulaning mohiyati shundaki, funksiyaning orttirmasi $\triangle x, \triangle y$ larni umuman aytganda murakkab funksiyasi bo'lgan holda funksiyaning differensiali $\triangle x, \triangle y$ larning chiziqli funksiyasi bo'lishidadir.

Keltirilgan taqribiy formulani quyidagicha

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{4}$$

ham yozsa bo'ladi.

Xususan, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ bo'lganda

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$a = 1,08^{3,96}$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

$\lhd$ Bu miqdorni ushbu

$$f(x,y) = x^y$$

funksiyaning $x = 1,08, y = 3,96$ nuqtadagi qiymati deb qarash mumkin. (x_0, y_0) nuqta sifatida $(1,4)$ nuqtani olib, (ya'ni $x_0 = 1, y_0 = 4$,) bu nuqtada $f(x,y)$ funksiya va uning xususiy hosilalarining qiymatini hisoblaymiz:

$$f(1,4) = 1^4 = 1; f'_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}, f'_x(1,4) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4,$$

$$f'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x, \ \ f'_y(1,4) = 1^4 \cdot \ln 1 = 0.$$

(4) taqribiy formuladan foydalanib topamiz:

$$f(1,08;3,96) = 1,08^{3,96} \approx 1 + 4 \cdot 0,08 + 0 \cdot (-0,06) = 1,32.$$

Demak,

$$a = 1,08^{3,96} \approx 1,32. \rhd$$

5-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari. Teylor formulasi

1. Yuqori tartibli xususiy hosilalar. Faraz qilaylik, $u = f(x,y)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, $(x,y) \in E$ nuqtaning atrofida f'_x va f'_y xususiy hosilalarga ega bo'lsin. Bu $f'_x(x,y)$ va $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar x, y ning funksiyalari bo'lib, ular ham o'z navbatida xususiy hosilalarga ega bo'lishi mumkin:

$$(f'_x(x,y))'_x, \ \ (f'_x(x,y))'_y, \ \ (f'_y(x,y))'_y, \ \ (f'_y(x,y))'_x.$$

Odatda, bu xususiy hosilalar berilgan $f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deyiladi va ular quyidagicha belgilanadi: $f''_{x^2}(x,y)$ yoki $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $f''_{xy}(x,y)$ yoki $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $f''_{y^2}(x,y)$ yoki $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $f''_{yx}(x,y)$ yoki $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Demak,

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Misol. Ushbu

$$u = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$$

funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilasi topilsin.

$\triangleleft$ Avvalo berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \frac{\partial u}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan foydalanib, ikkinchi tartibli xususiy hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3 + 8xy^3 + 7y) = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 8xy^3 + 7y) = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^2 + 7x) = 24x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^2 + 7x) = 24xy^2 + 7. \triangleright$$

Turli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan f''_{xy}, f''_{yx} ikkinchi tartibli xususiy hosilalar aralash hosilalar deyiladi. Bu aralash hosilalar bir-biriga teng bo'lishi mumkin, teng bo'lmasligi mumkin. Ammo quyidagi tasdiq o'rinli:

– agar $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning atrofida f''_{xy}, f''_{yx} xususiy hosilalarga ega bo'lib, ular (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

bo‘ladi.

$f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to‘rtinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalari xuddi yuqoridagiga o‘xshash ta’riflanadi.

Masalan,

$$u = x^2 y^3$$

funksiyaning u'''_{xy^2} uchinchi tartibli hosilasi quyidagicha topiladi:

$$u'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3,\ u''_{xy} = (u'_x)'_y = (2xy^3)'_y = 6xy^2,$$

$$u'''_{xy^2} = (6xy^2)'_y = 12xy.$$

2. Yuqori tartibli differensiallar

Faraz qilaylik,

$$u = f(x, y)$$

funksiya E to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x, y) \in E$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. Ma’lumki, uning differensiali

$$du = df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy$$

bo‘ladi. Bunda x va y lar erkli o‘zgaruvchilar,

$$dx = \triangle x, dy = \triangle y$$

lar esa argumentlarning ixtiyoriy orttirmalari bo‘lib, ular x va y larga bog‘liq emas (ya’ni x va y larga nisbatan o‘zgarmaslar). Modomiki, $df(x, y)$ x va y larga bog‘liq ekan, uning differensialini qarash mumkin:

$$d(df(x, y)).$$

Bu miqdor $f(x, y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va $d^2 f(x, y)$ kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x, y) = d(df(x, y)).$$

$f(x, y)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va h.k. tartibli differensiallari xuddi yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi. Umuman, $f(x, y)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli differensialining differensiali $f(x, y)$ funksiyaning n-tartibli differensiali deyiladi va $d^n f(x, y)$ kabi belgilanadi:

$$d^n f(x, y) = d(df^{n-1}(x, y)).$$

Bu differensiallar $f(x, y)$ funksiyaning yuqori tartibli differensiallari deyiladi.

$f(x, y)$ funksiya differensiallarini funksiyaning xususiy hosilalari orqali ifodalanishini ko'rsatamiz.

Ikkinchi tartibli differensial ta'rifi va differensiallash qoidalaridan foydalanib topamiz:

$$d^2 f(x, y) = d(df(x, y)) = d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)dy = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_x dx + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'_y dy\right)dx +$$

$$+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_x dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)'_y dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Demak,

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi

Aytaylik, $f(x, y)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, y_0) \in E$ nuqtaning biror atrofida $(n+1)-$tartibli barcha xususiy hosilalarga ega va ular uzluksiz bo'lsin. Bu atrofga tegishli bo'lgan $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ nuqtani olamiz. Ravshanki,

$\begin{array}{l} x = x_0 + t \cdot \triangle x, \\ y = y_0 + t \cdot \triangle y \end{array}$ $(0 \le t \le 1)$ sistema (x_0, y_0) va $(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)$ larni birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq kesmasi ham yuqorida aytilgan atrofga tegishli bo‘ladi.

Endi $f(x, y)$ funksiyani shu to‘g‘ri chiziq kesmasida qaraymiz:

$$f(x, y) = f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y).$$

Natijada $f(x, y)$ funksiya bu kesmada bitta o‘zgaruvchi t ning funksiyasiga aylanadi. Uni $F(t)$ bilan belgilaymiz:

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y) \quad (0 \le t \le 1).$$

Ravshanki,

$$F(0) = f(x_0, y_0), F(1) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y). \tag{1}$$

$F(t)$ funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$F'(t) = (f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y))'_t = f'_x(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y)\triangle x+$$

$$+f'_y(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y)\triangle y = df(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y),$$

$$F''(t) = (f'_x(x_0+t\cdot\triangle x, y_0+t\cdot\triangle y)\triangle x + f'_y(x_0+t\cdot\triangle x, y_0+t\cdot\triangle y)\triangle y)'_t =$$

$$= d^2 f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2}$$

$$F^{(n)}(t) = d^n f(x_0 + t \cdot \triangle x, y_0 + t \cdot \triangle y),$$

$$F^{(n+1)}(t) = d^{(n+1)} f(x, y).$$

Endi $F(t)$ funksiyaning Teylor formulasini yozamiz:

$$F(t) = F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+...+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \ (0 < \theta < 1).$$

Xususan, $t = 1$ da

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + ... + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \tag{3}$$

bo'ladi.

Agar (2) tengliklarda $t = 0$ deyilsa, hamda (1) tenglikni e'tiborga olsak, u holda (3) tenglik ushbu ko'rinishga keladi:

$$f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) = f(x_0, y_0)+df(x_0, y_0)+\frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!}+...+\frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!}+$$

$$+\frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\triangle x, y_0 + \theta\triangle y)}{(n+1)!}.$$

Bu ikki o'zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasidir.

6-§. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari

1. Funksiya ekstremumi tushunchalari

$u = f(x, y)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, (x_0, y_0) nuqtaning atrofi $U_\delta(x_0, y_0)$ shu to'plamga tegishli bo'lsin: $U_\delta(x_0, y_0) \subset E$. Endi berilgan funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi qiymati $f(x_0, y_0)$ ni (bu tayin son) funksiyaning (x_0, y_0) nuqta atrofidagi $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ nuqtalardagi qiymatlari (bular sonlar bo'ladi) bilan solishtiramiz.

Agar ixtiyoriy $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ uchun

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga ega bo'ladi deyiladi. Bunda (x_0, y_0) maksimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0, y_0)$ songa esa $f(x, y)$ funksiyaning maksimum qiymati deyiladi va

$$f(x_0, y_0) = \max f(x, y)$$

kabi belgilanadi.

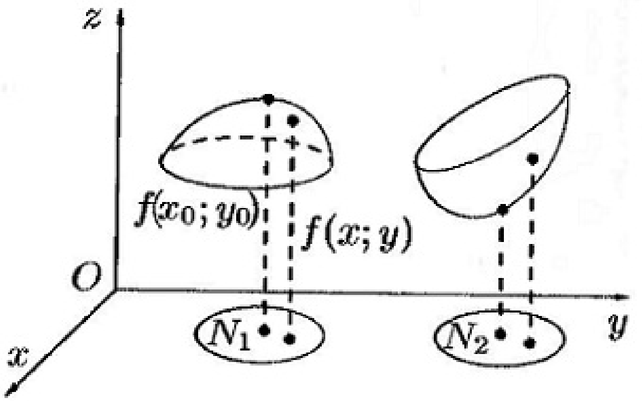
Agar ixtiyoriy $(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ uchun

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga ega bo‘ladi deyiladi. Bunda (x_0,y_0) minimum qiymat beradigan nuqta, $f(x_0,y_0)$ songa esa $f(x,y)$ funksiyaning minimum qiymati deyiladi va

$$f(x_0,y_0)=\min f(x,y)$$

kabi belgilanadi.



2-chizma.

Funksiyaning maksimumi hamda minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumi deyiladi.

Ma’lumki, ushbu

$$\triangle f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

ayirma $f(x,y)$ funksiyaning to‘la orttirmasi deyiladi. Demak, (x_0,y_0) nuqtaning atrofidagi (x,y) nuqtalar uchun

$$\triangle f(x_0,y_0)\leq 0$$

bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada maksimumga,

$$\triangle f(x_0,y_0)\geq 0$$

bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada minimumga erishadi.

2. Funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti

$u = f(x, y)$ funksiyani (x_0, y_0) nuqtaning atrofida qaraymiz.

1-teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga erishsa va shu nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalarga ega bo‘lsa, u holda

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

bo‘ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada minimumga erishsin. U holda (x_0, y_0) nuqtaning atrofidagi (x, y) nuqtalarda

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

tengsizlik bajariladi. Jumladan

$$f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0)$$

bo‘ladi. Ravshanki, $f(x, y_0)$ funksiya bitta x o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘ladi. Keyingi tengsizlik esa bu funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishini bildiradi. Teoremaning shartiga ko‘ra u x_0 nuqtada f'_x hosilaga ham ega. Unda bir o‘zgaruvchili funksiya ekstremumga erishishining zaruriy shartiga ko‘ra

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

bo‘lishi isbotlanadi.$\triangleright$

Eslatma. Agar $f(x, y)$ funksiya biror (x_0, y_0) nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalarga ega bo‘lib, shu nuqtada

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

bo‘lishidan berilgan funksiyaning shu nuqtada ekstremumga erishishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$u = xy$$

funksiya uchun $u'_x = y$, $u'_y = x$ bo‘lib, $(0,0)$ nuqtada $u'_x(0,0) = 0$, $u'_y(0,0) = 0$ bo‘ladi. Biroq bu funksiya $(0,0)$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

1-teorema funksiya ekstremumga erishishining zaruriy shartini ifodalaydi.

3. Funksiya ekstremumga erishishining yetarli sharti

$u = f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtaning $U_\delta(x_0,y_0)$ atrofida berilgan bo‘lib, u quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x,y)$ funksiya $U_\delta(x_0,y_0)$ da uzluksiz va uzluksiz f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} xususiy hosilalarga ega;

2) (x_0,y_0) nuqtada f'_x, f'_y xususiy hosilalar nolga teng:

$$f'_x(x_0,y_0) = 0, f'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Endi $f(x,y)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarining (x_0,y_0) nuqtadagi qiymatlarini quyidagicha

$$f''_{x^2}(x_0,y_0) = a_{11},\;\; f''_{xy}(x_0,y_0) = a_{12},\;\; f''_{y^2}(x_0,y_0) = a_{22}$$

belgilab, ushbu

$$\triangle = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}^2$$

ayirmani hosil qilamiz.

Agar:

1) $\triangle > 0$ bo‘lib, $a_{11} > 0$ bo‘lsa, $f(x,y)$ funksiya (x_0,y_0) nuqtada minimumga erishadi;

2) $\triangle > 0$ bo‘lib, $a_{11} < 0$ bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada maksimumga erishadi;

3) $\triangle < 0$ bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtada ekstremumi mavjud bo‘lmaydi;

4) $\triangle = 0$ bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtada ekstremumga erishishi ham mumkin, ekstremumga erishmasligi ham mumkin.

Misol. Ushbu

$$u = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

$\lhd$ Avvalo berilgan funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$u'_x(x, y) = 2x + y - 2, u'_y(x, y) = x + 2y - 3.$$

Bu hosilalarni nolga tenglab quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{4}{3}.$$

Demak, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nuqtada berilgan funksiyaning xususiy hosilalari nolga teng bo‘ladi:

$$u'_x\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0, \quad u'_y\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0.$$

Endi berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblab, a_{11}, a_{12}, a_{22} larni topamiz:

$$u''_{x^2}(x, y) = (2x + y - 2)'_x = 2, \quad u''_{xy}(x, y) = (2x + y - 2)'_y = 1,$$

$$u''_{y^2}(x, y) = (x + 2y - 3)'_y = 2.$$

Demak,

$$a_{11} = u''_{x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2, \; a_{12} = u''_{xy}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 1, \; a_{22} = u''_{y^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2$$

bo‘lib,

$$\triangle = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

bo‘ladi.

$\triangle > 0$ va $a_{11} > 0$ bo‘lgani uchun berilgan funksiya $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nuqtada minimumga erishadi.$\triangleright$

7-§. Karrali integrallar

Mazkur kursning yuqoridagi boblarida funksiyaning aniq integrali (bir o‘zgaruvchili funksiyaning integrali) tushunchasi bilan tanishdik, integralning mavjudligi, xossalari, hisoblash va integralning ba’zi bir tatbiqlarini o‘rgandik. Jumladan, aniq integralning tatbiqlarida tekis shakl, uning yuzi, shaklning yuzini hisoblash bayon etildi. Xususan, tekislikda D soha bo‘lib, uning yuzi $\triangle D$ bo‘lsin.

Endi ikki o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan funksiyaning integrali karrali integralini qaraymiz. Karrali integrallarda ham, aniq integrallardagidek, integral tushunchasi, integralning mavjudligi, uning xossalari, karrali integrallarni hisoblash, integralning tatbiqlari o‘rganiladi. Bunda aniq integral haqidagi ma’lumotlardan foydalana boriladi. Shuningdek, ikki karrali integrallar haqidagi ma’lumotlar (tushunchalar, tasdiqlar xossalar va h.k.) bayonida yuritiladigan fikr va mulohazalar aniq integraldagiga o‘xshashligini e’tiborga olib, ko‘p hollarda, ularni karrali integrallarga nisbatan isbotsiz keltirish bilan kifoyalanamiz.

1. Ikki karrali integral tushunchasi.

Aytaylik,

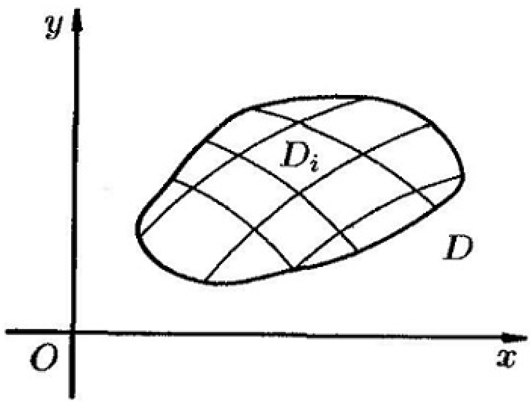
$$u = f(x, y)$$

funksiya tekislikdagi soha D da berilgan va chegaralangan bo'lsin. Bu D sohani 3-chizmada ko'rsatilganidek D_1, D_2, D_3, $\ldots$, D_n sohalarga ajratamiz.

Ravshanki, bu sohalar yuzalarga ega bo'ladi. Ularni

$$\triangle D_1, \triangle D_2, \triangle D_3, ..., \triangle D_n$$

deylik, bunda $\triangle D_1 + \triangle D_2 + \triangle D_3 + ... + \triangle D_n = \triangle D$ bo'ladi.



3-chizma.

Endi har bir $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ sohalardan ixtiyoriy ravishda bittadan

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), ..., (\xi_n, \eta_n)$$

nuqtalarni olamiz. Berilgan $f(x, y)$ funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari

$$f(\xi_1, \eta_1), f(\xi_2, \eta_2), ..., f(\xi_n, \eta_n)$$

ni mos ravishda $\triangle D_1, \triangle D_2, \triangle D_3, ..., \triangle D_n$ larga ko'paytirib, ushbu

$$\sigma = f(\xi_1, \eta_1)\triangle D_1 + f(\xi_2, \eta_2)\triangle D_2 + ... + f(\xi_n, \eta_n)\triangle D_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\triangle D_k \tag{1}$$

yig‘indini tuzamiz. Bu yig‘indi $f(x,y)$ funksiyaning integral yig‘indisi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ sohalar yordamida D soha bo‘laklarga ajraladi. Shuning uchun $D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ lar to‘plami bo‘laklash deyiladi va u P bilan belgilanadi:

$$P = \{D_1, D_2, D_3, ..., D_n\}.$$

$D_1, D_2, D_3, ..., D_n$ sohalarining nuqtalari orasidagi uzunliklarining kattasi P bo‘laklashning diametri deyiladi va uni λ_P kabi belgilanadi. Endi D sohaning shunday

$$P_1, P_2, ..., P_m, ... \tag{2}$$

ketma-ketliklarini qaraymizki, ularning mos diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, ..., \lambda_{P_m}, ...$$

ketma-ketlik nolga intilsin. Bu jarayonda D sohaning bo‘lakchalarini maydalash sodir bo‘ladi. (2) bo‘laklashlarga nisbatan $f(x,y)$ funksiyaning integral yig‘indilarini tuzamiz. Ular ushbu

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m, ...$$

ketma-ketlikni hosil qiladi va bu ketma-ketlikning har bir hadi (ξ_k, η_k) nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar har qanday (2) bo‘laklashlarga nisbatan tuzilgan

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m, ...$$

integral yig‘indilar ketma-ketligi ((ξ_k, η_k) nuqtalarni tanlab olinishiga bog‘liq bo‘lmagan holda) I songa intilsa, $f(x,y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi, I son esa $f(x,y)$ funksiyaning D soha bo‘yicha ikki karrali integrali deyiladi. Uni

$$\iint\limits_D f(x,y)dD \quad \text{yoki} \quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\triangle D_k.$$

Masalan,

$$f(x,y)=c \quad (c=const)$$

funksiya ixtiyoriy to‘g‘ri to‘rtburchak sohada integrallanuvchi va

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D cdxdy = c\cdot\triangle D$$

bo‘ladi, bunda $\triangle D$ to‘g‘ri to‘rtburchak sohaning yuzi.

Haqiqatdan ham, bu funksiyaning integral yig‘indisi

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\triangle D_k = \sum_{k=1}^{n} c\triangle D_k = c\sum_{k=1}^{n}\triangle D_k = c\cdot\triangle D$$

bo‘lib,

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\triangle D_k = \lim_{\lambda_P\to 0} c\cdot\triangle D = c\cdot\triangle D$$

bo‘ladi.

2. Ikki karrali integralning mavjudligi va integrallanadigan funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya to‘g‘ri to‘rtburchak D sohada berilgan va chegaralangan bo‘lsin. Bu sohani

$$P=\{D_1,D_2,D_3,...,D_n\}$$

bo‘laklashini olaylik. Qaralayotgan funksiya har bir D_k da $(k=1,2,...,n)$ chegaralangan bo‘lib, u shu sohada aniq yuqori

$$M_k=\sup\{f(x,y)\},\quad (x,y)\in D_k$$

hamda aniq quyi

$$m_k=\inf\{f(x,y)\},\quad (x,y)\in D_k$$

chegaralarga ega bo‘ladi Odatda,

$$\omega_k = M_k - m_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

ayirma $f(x, y)$ funksiyaning D_k sohachadagi tebranishi deyiladi.

Aytaylik, D sohaning ushbu

$$P_1, P_2, ..., P_m, ...$$

bo‘laklashlarning ularga mos bo‘lgan diagonallari ketma-ketligi

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, ..., \lambda_{P_m}, ...$$

nolga intilsin. Agar har bir bunday bo‘laklashlar ketma-ketligining har bir hadiga nisbatan

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k$$

yig‘indi tuzilsa, unda quyidagi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k\right)_{P_1}, \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k\right)_{P_2}, ...$$

sonlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi.

Quyidagi teorema $f(x, y)$ funksiyaning integrallanuvchi bo‘lishining yetarli shartini ifodalaydi.

1-teorema. Agar

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k = 0 \tag{3}$$

bo‘lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo‘ladi.

2-teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya to‘g‘ri to‘rtburchak D sohada uzluksiz bo‘lsa, u shu sohada integrallanuvchi bo‘ladi.

$\triangleleft$ Shartga ko‘ra $f(x, y)$ funksiya

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchakda uzluksiz. Bu funksiya shu sohada tekis uzluksiz bo‘ladi. Unda D sohani yuqorida qaralgan bo‘laklashni shunday qilib olish mumkinki, bo‘laklashning har bir D_k bo‘lakchasidagi $f(x, y)$ funksiyaning tebranishi ω_k har qanday kichik $\varepsilon > 0$ sondan ham kichik bo‘ladi: $\omega_k < \varepsilon$.

Natijada

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \triangle D_k = \varepsilon \cdot \triangle D$$

bo‘lib,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle D_k = 0$$

bo‘ladi. Bu esa $f(x, y)$ funksiyaning integrallanuvchi bo‘lishini bildiradi.$\triangleright$

Masalan, $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiya $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kvadrat sohada uzluksiz. Binobarin bu funksiya 2-teoremaga ko‘ra integrallanuvchi.

3. Ikki karrali integralning xossalari

Ikki karrali integrallar ham aniq integralning xossalari singari xossalarga ega. Ularni isbotsiz keltiramiz.

Aytaylik, $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalari to‘g‘ri to‘rtburchak D sohada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda:

1) $cf(x, y)$ funksiya ($c - const$) D sohada integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iint\limits_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint\limits_D f(x, y) dx dy$$

bo‘ladi;

2) $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo‘lib,

$$\iint\limits_D [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint\limits_D f(x, y) dx dy \pm \iint\limits_D g(x, y) dx dy$$

bo‘ladi;

3) $|f(x,y)|$ funksiya D sohada integrallanuvchi bo‘lib,

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

bo‘ladi;

4) agar ixtiyoriy $(x,y) \in D$ da $f(x,y) \ge 0$ bo‘lsa, u holda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$$

bo‘ladi;

5) agar to‘g‘ri to‘rtburchak D soha ikkita to‘g‘ri to‘rtburchak D' va D'' sohalarga ajralgan bo‘lsa,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D''} f(x,y)dxdy$$

bo‘ladi;

6) agar $f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda shunday $(x_0,y_0) \in D$ nuqta topiladiki,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0) \cdot \triangle D$$

bo‘ladi, bunda $\triangle D$ miqdor D sohaning yuzi.

Odatda, bu xossa o‘rta qiymat haqidagi teorema deb yuritiladi.

8-§. Ikki karrali integrallarni hisoblash usullari

1. To‘rtburchak bo‘yicha ikki karrali integralni hisoblash

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya to‘g‘ri to‘rtburchak

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

sohada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. Yuqorida keltirilgan teoremaga ko‘ra

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

ikki karrali integral mavjud. Bu integral quyidagicha mulohazalar asosida hisoblanadi:

a) $f(x,y)$ funksiyaning x argumentini tayinlab (o‘zgarmas deb hisoblab), uni bitta y o‘zgaruvchining $[c,d]$ da aniqlangan funksiyasi deb qaraladi. (Bu funksiya $[c,d]$ da uzluksiz bo‘ladi);

b) $f(x,y)$ ni y o‘zgaruvchini funksiyasi sifatida qaralganda $[c,d]$ oraliq bo‘yicha integrallanuvchi, ya’ni

$$\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

mavjud. Ravshanki, bu integral tayinlangan x ga bog‘liq, ya’ni x ning funksiyasi bo‘ladi:

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy; \tag{1}$$

d) $I(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘ladi. Uni $[a,b]$ oraliq bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big]dx.$$

Keyingi integral qaralayotgan ikki karrali integralga teng bo‘ladi:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big]dx. \tag{2}$$

Xuddi yuqoridagidek

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \Big[\int\limits_a^b f(x,y)dx\Big]dy \tag{3}$$

bo‘ladi.

(2) va (3) integrallar, tuzilishiga ko‘ra, ikki argumentli funksiyadan avval bir argumentli bo‘yicha (bunda ikkinchi argumentni o‘zgarmas hisob-

lanadi), so‘ng ikkinchi argumenti bo‘yicha olingan integrallardir. Bunday integrallarni takroriy integrallar deyiladi.

Shunday qilib,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

sohada uzluksiz bo‘lgan $f(x, y)$ funksiyaning ikki karrali integrali

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy$$

ni hisoblash takroriy integrallarni hisoblashga keltirilar ekan. Takroriy integralni hisoblash esa ikkita oddiy bir argumentli funksiyaning integralini ketma-ket hisoblashdan iborat.

Misol. Ushbu

$$\iint\limits_D (x^2 + 2y) dxdy$$

integral hisoblansin, bunda D soha quyidagi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

to‘g‘ri to‘rtburchak sohadan iborat.

$\triangleleft$ Berilgan ikki karrali integralni (2) formulaga ko‘ra hisoblaymiz:

$$\iint\limits_D (x^2 + 2y) dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^2 (x^2 + 2y) dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[x^2 y + 2 \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^2 + 4) dx = \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}.$$

Qaralayotgan ikki karrali integralni (3) formula bo‘yicha ham hisoblash mumkin:

$$\iint\limits_D (x^2 + 2y) dxdy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^1 (x^2 + 2y) dx \right] dy = \int\limits_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + 2xy \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y\right) dy = \left(\frac{1}{3}y + 2 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}.$$

2. Tekislikdagi chegaralangan yopiq soha (to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lmagan soha) bo‘yicha ikki karrali integrallar

Faraz qilaylik,$f(x, y)$ funksiya tekislikdagi biror chegaralangan yopiq G sohada aniqlangan va chegaralangan bo‘lsin. Bu G sohani o‘z ichiga olgan to‘g‘ri to‘rtburchak sohani olib, uni D deylik.

D sohada $F(x, y)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

1. G sohaning barcha (x, y) nuqtalarida $F(x, y) = f(x, y)$

2. D sohaning G sohaga tegishli bo‘lmagan barcha nuqtalarida $F(x, y) = 0$, ya’ni

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{agar } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{agar } (x, y) \in D \setminus G. \end{cases}$$

Agar $F(x, y)$ funksiya to‘g‘ri to‘rtburchak D sohada integrallanuvchi bo‘lsa, $f(x, y)$ funksiya G sohada integrallanuvchi bo‘ladi deb qaraymiz. Bunda

$$\iint_D F(x, y)dxdy$$

integralning qiymati $f(x, y)$ funksiyaning G soha bo‘yicha ikki karrali integrali deyiladi:

$$\iint_G f(x, y)dxdy = \iint_D F(x, y)dxdy.$$

Bu G soha bo‘yicha olingan ikki karrali integral

$$\iint_G f(x, y)dxdy$$

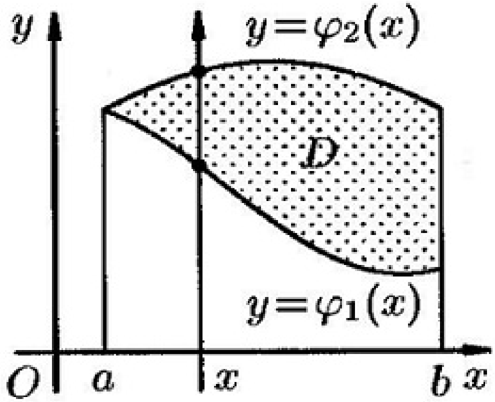
ham 3-bandda keltirilgan xossalar kabi xossalarga ega bo‘ladi.

Endi bunday integrallarni hisoblash masalasini qaraymiz.

Aytaylik, G soha yuqoridan $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan $\varphi_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan $\varphi_1(x)$ funksiya grafigi ($\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$) yon tomonlardan $x = a, x = b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lsin:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

(4-chizma).



4-chizma.

Teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya G sohada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_G f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right] dx$$

bo'ladi.

$\lhd$ Aytaylik, ushbu

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, c_1 \le y \le d_1\}$$

to'g'ri to'rtburchak soha G sohani o'z ichiga olsin. Agar

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{agar } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{agar } (x, y) \in D \setminus G. \end{cases}$$

deyilsa, u holda

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_D F(x,y)dxdy.$$

bo‘ladi. 4-bandda aytilganiga ko‘ra

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{c_1}^{d_1} F(x,y)dy\right]dx$$

bo‘ladi.

Endi $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x)$ deb, integralning xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_{c_1}^{d_1} F(x,y)dy = \int_{c_1}^{y_1} F(x,y)dy + \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)dy + \int_{y_2}^{d_1} F(x,y)dy$$

Ammo $a_1 \le y \le y_2$ va $y_2 \le y \le d_1$

$$F(x,y) = 0$$

va $y_1 \le y \le y_2$ bo‘ganda esa,

$$F(x,y) = f(x,y)$$

bo‘lgani uchun

$$\int_{c_1}^{d_1} F(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

bo‘lib,

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

bo‘ladi.$\rhd$

Eslatma. Agar tekislikdagi G soha quyidagicha

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$$

bo‘lib, $f(x,y)$ va $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ funksiyalar tegishli shartlarni qanoatlantirganda

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \Bigg[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Bigg]dy$$

bo‘lishi yuqorida yuritilgan mulohaza asosida isbotlanadi.

1-misol. Ushbu

$$\iint\limits_G (x+y)dxdy$$

integral hisoblansin, bunda G soha $y = x$ va $y = x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha, ya’ni

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}.$$

$\lhd$ Integralni (2) formulaga ko‘ra hisoblaymiz. Bu holda $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$ bo‘lib,

$$\iint\limits_G (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 \Bigg[\int\limits_{x^2}^{x} (x+y)dy\Bigg]dx$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x+y)dy = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)_{x^2}^{x} = \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\iint\limits_G (x+y)dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)_0^1 = \frac{3}{20}. \rhd$$

2-misol. Ushbu

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$$

integral hisoblansin, bunda G soha $y = x$, $y = x+a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$ chiziqlar bilan chegaralangan soha.

$\triangleleft$ Integrallash G soha parallelogrammdan iborat bo‘ladi. G sohani quyidagicha

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-a \leq x \leq y, a \leq y \leq 3a\}$$

yozib, ikki karrali integralni (3) formulaga ko‘ra hisoblaymiz:

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_a^{3a} \left[\int\limits_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx \right] dy = \int\limits_a^{3a} \left[\frac{x^3}{2} + y^2 x \right]_{y-a}^{y} dy =$$

$$= \int\limits_a^{3a} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{(y-a)^3}{3} + y^3 - y^2(y-a) \right) dy = \frac{81a^4}{12} - \frac{16a^4}{12} + \frac{27a^4}{3} - \frac{a^4}{12} -$$

$$- \frac{a^4}{3} = 14a^4. \triangleright$$

3. Ikki karrali integral qutb koordinatalarida

Ma’lumki, tekislikda nuqtaning to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari x va y lar shu nuqtaning qutb koordinatalari r va φ lar bilan quyidagi

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

munosabat orqali bog‘langan. Bu munosabatlar yordamida ushbu

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy$$

ikki karrali integral quyidagi

$$\iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$$

integral orqali ifodalanadi.

Agar integrallash sohasi G quyidagi

$$r = \alpha, \quad r = \beta \ \ (\alpha < \beta)$$

nurlar hamda

$$r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi) \ \ (r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi); \ \ \alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

egri chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lsa, u holda

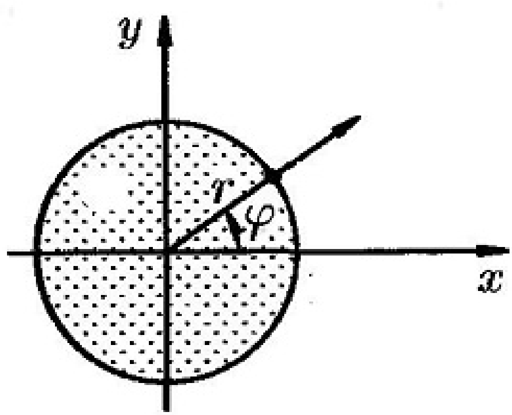
$$\iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \Bigg[\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \Bigg] d\varphi$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\iint\limits_G \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

integral hisoblansin, bunda G soha markazi koordinata boshida, radiusi 1 ga teng bo‘lgan doiradan iborat (5-chizma):



5-chizma.

◁ Qaralayotgan integralda

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

deymiz. Unda

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}=\sqrt{1-r^2}$$

bo‘ladi. G sohada

$$0\le r\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi$$

bo‘lgani uchun

$$\iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\Big[\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr\Big]d\varphi$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(1-r^2)=-\frac{1}{2}\left[\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

bo‘lib,

$$\iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\varphi=\frac{2\pi}{3}$$

bo‘ladi.$\rhd$

9-§. Ikki karrali integrallarning ba’zi tatbiqlari

Ikki karrali integrallardan matematika, fizika, texnika va h.k. masalalarini hal etishda foydalaniladi.

Biz quyida tekis shaklning yuzi, jismning massasi ikki karrali integral orqali ifodalanishini keltiramiz.

1. Tekis shaklning yuzi. Tekislikda yuzaga ega bo‘lgan G shakl berilgan bo‘lsin. Bu shaklning yuzi

$$\triangle G=\iint\limits_G dxdy \tag{1}$$

bo‘ladi. (1) munosabatning to‘g‘riligi ikki karrali integral ta’rifidan bevosita kelib chiqadi.

Misol. Ushbu

$$y^2 = 2x$$

parabola va uning $(2,-2),(8,4)$ nuqtalarini birlashtiruvchi to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

$\lhd$ $(2,-2)$ va $(8,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq $y = x-4$ bo‘ladi. Demak, G shakl (soha) berilgan shaklni ifodalaydi. Uning yuzi

$$\triangle G = \iint_G dxdy$$

bo‘ladi. Bu integralni hisoblash uchun G sohani $x = 2$ to‘g‘ri chiziq bilan G_1 va G_2 sohalarga ajratamiz:

$$G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}\}$$

$$G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 8, x-4 \le y \le \sqrt{2x}\}$$

Natijada

$$\triangle G = \iint_G dxdy = \iint_{G_1} dxdy + \iint_{G_2} dxdy$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\iint_{G_1} dxdy = \int_0^2 \Big[\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy\Big]dx = \int_0^2 y\Big|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dx = \int_0^2 2\sqrt{2x}dx = \frac{16}{3},$$

$$\iint_{G_2} dxdy = \int_2^8 \Big[\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} dy\Big]dx = \int_2^8 y\Big|_{x-4}^{\sqrt{2x}} dx = \int_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4)dx = \frac{38}{3}.$$

Demak, G shaklning yuzi

$$\triangle G = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18$$

bo‘ladi.$\triangleright$

2. Tekislikdagi shaklning massasi. Aytaylik, tekislikda massaga ega bo‘lgan moddiy G shakl berilgan bo‘lib, uning har bir $(x, y) \in G$ nuqtasidagi zichligi $\rho(x, y)$ bo‘lsin.

Agar $\rho(x, y) = c \quad (c = const)$ bo‘lsa, u holda G shaklning massasi

$$m = c \cdot \triangle G$$

bo‘ladi, bunda $\triangle G - G$ shaklning yuzi.

Agar $\rho(x, y)$ ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo‘lsa, shaklning massasini topish uchun G ning

$$P = \{G_1, G_2, ..., G_n\}$$

bo‘laklashini va har bir $G_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$ da ixtiyoriy ξ_k, η_k nuqtani olamiz. Har bir G_k da $\rho(x, y)$ ni o‘zgarmas va uni $\rho(\xi_k, \eta_k)$ ga teng deyilsa, u holda G_k ning massasi taxminan

$$\rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \triangle G_k$$

ga teng bo‘lib,G shaklning massasi esa taxminan

$$\sum_{k=1}^{k} \rho(\xi_k, \eta_k) \cdot \triangle G_k \qquad (2)$$

ga teng bo‘ladi.

P bo‘laklashning diametri $\lambda_P \to 0$ da (2) yig‘indining limiti izlanayotgan G shaklning massasini ifodalaydi.

Ayni paytda (2) yig‘indi $\rho(x, y)$ funksiyaning integral yig‘indisi va $\rho(x, y)$ funksiya G da uzluksiz bo‘lganligi sababli bu yig‘indining limiti

$$\iint\limits_G \rho(x, y) dxdy$$

bo‘ladi. Demak,G shaklning massasi

$$m = \iint_G \rho(x,y)dxdy \tag{3}$$

integral orqali aniqlanadi.

Misol. Tekislikda a radiusli doiraviy plastinka berilgan bo‘lib, uning har bir $A(x,y)$ nuqtasidagi zichligi shu nuqtadan koordinatalar boshigacha bo‘lgan masofaga proporsional. Doiraviy plastinkaning massasi topilsin.

$\lhd$ Dekart koordinatalar sistemasining koordinatalar boshiga doiraviy plastinkaning markazini joylashtiramiz. Unda plastinkaning $A(x,y)$ nuqtasidan koordinatalar boshigacha bo‘lgan masofa

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

bo‘lib, plastinkaning zichligi

$$\rho(x,y) = k \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

bo‘ladi, bunda k – proporsionallik koeffitsiyenti (3) formulaga ko‘ra plastinkaning massasi

$$m = \iint_G k \cdot \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

bo‘ladi, bunda $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2\}$.

Ikki karrali integralda

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

deb, uni hisoblaymiz:

$$m = \iint_G k \cdot \sqrt{x^2+y^2}dxdy = k\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a r \cdot rdr\right]d\varphi =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^a d\varphi = \frac{2}{3}k\pi a^3. \rhd$$

10-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning integrali haqida qo‘shimcha ma’lumotlar. Egri chiziqli integrallar. Grin formulasi

Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun karrali integral tushunchasi kiritildi va o‘rganildi. Shuni ham aytish kerakki, ikki o‘zgaruvchili funksiyalar uchun integral tushunchasi boshqacha ham kiritilishi mumkin. Egri chiziqli integrallar shular jumlasidandir. Ular konkrekt amaliy masalalardan yuzaga kelgan.

1. Birinchi tur egri chiziqli integrallar. Aytaylik tekislikda ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \tag{1}$$

sistema bilan aniqlangan ℓ egri chiziq berilgan bo‘lsin. Bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo‘lib, $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ bo‘lsin. Odatda, bunday egri chiziqni sodda egri chiziq deyiladi. Ushbu

$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$$

nuqtalar egri chiziqning mos ravishda boshi va oxirgi nuqtalari bo‘ladi. Ko‘pincha bunday egri chiziqni $\breve{AB}$ yoy deb ham yuritiladi. Agar A va B nuqtalar ustma-ust tushsa, unda egri, yopiq egri chiziq deyiladi.

(1) sistema egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.

Sodda $\breve{AB}$ egri chiziq uzunlikka ega bo‘lib, uning uzunligi

$$|\breve{AB}| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

ga teng bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $f(x, y)$ funksiya $\breve{AB}$ egri chiziqda berilgan bo‘lib, u shu chiziqda uzluksiz bo‘lsin. Modomiki, $f(x, y)$ funksiya $\breve{AB}$ da berilgan ekan, unda

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

bo‘lib, $f(x,y)$ bitta t o‘zgaruvchining funksiyasiga aylanadi:

$$f(x,y)=f(\varphi(t),\psi(t)).$$

Bu funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz, binobarin u $[\alpha,\beta]$ da integrallanuvchi. Ayni paytda

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

funksiya ham $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz bo‘ladi. Demak,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

integral mavjud.

Ta’rif. Ushbu

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \tag{2}$$

integral $f(x,y)$ funksiyaning $\breve{AB}$ egri chizig‘i bo‘yicha birinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi. U

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)d\ell$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)d\ell=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Agar tekislikdagi $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$y=y(x) \quad (a\le x\le b, A=A(a,y(a)), B=B(b,y(b))$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lib, $y(x)$ funksiya $[a, b]$ uzluksiz $y'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya esa shu $\breve{AB}$ egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx \qquad (3)$$

bo'ladi.

Birinchi tur egri chiziqli integrallar ham avval o'rganilgan integralning xossalari kabi xossalarga ega.

Birinchi tur egri chiziqli integrallar (2) va (3) formulalar yordamida hisoblanadi.

Misol. Ushbu

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}d\ell$$

egri chiziqli integral hisoblansin, bunda $\breve{AB}$ egri chiziq markazi koordinatalar boshida, radiusi r $(r > 0)$ ga teng bo'lgan aylananing yuqori yarim tekislikdagi qismi.

$\lhd$ Ravshanki, bu $\breve{AB}$ egri chiziq quyidagi

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Qaralayotgan egri chiziqli integralni (2) formula yordamida hisoblaymiz.

$\breve{AB}$ egri chiziqda $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya quyidagicha bo'ladi:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2} = r.$$

(2) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}d\ell = \int\limits_0^\pi r^2 dt = \pi r^2. \rhd$$

Birinchi tur egri chiziqli integrallar yordamida yoy uzunligini, jismning massasini, og‘irlik markazini topish mumkin. Tekislikda, sodda $\breve{AB}$ egri chiziqda $f(x,y) = 1$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $\breve{AB}$ da uzluksiz. Uning birinchi tur egri chiziqli integrallari mavjud bo‘lib, ular (2) va (3) formulaga ko‘ra

$$\int\limits_{\breve{AB}} d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} d\ell = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

bo‘ladi. Bu integrallar $\breve{AB}$ yoyning uzunligini ifodalaydi. Demak, birinchi tur egri chiziqli integrallar yordamida yoy uzunligini topish mumkin.

2. Ikkinchi tur egri chiziqli integrallar. Faraz qilaylik,$\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq x \leq \beta) \tag{1}$$

sistema bilan (parametrik formada) berilgan bo‘lsin. Bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ oraliqda uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo‘lib,

$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$$

bo‘lsin.

t parametr α dan β ga qarab o‘zgarganda

$$(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$$

nuqta A dan B gacha qarab $\breve{AB}$ yoyni chiza borsin.

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $\breve{AB}$ egri chiziqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Ravshanki, ushbu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt$$

integrallar mavjud bo'ladi.

Ta'rif. Ushbu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt$$

integrallar $f(x,y)$ funksiyaning $\breve{AB}$ egri chizig'i bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrallari deyiladi. Ular mos ravishda

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dx, \int_{\breve{AB}} f(x,y)dy$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt, \tag{4}$$

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt. \tag{5}$$

Faraz qilaylik, $\breve{AB}$ egri chiziqda ikkita $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ funksiyalar berilgan bo'lib,

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx, \int_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$$

lar esa ularning ikkinchi tur egri chiziqli integrallari bo'lsin. Ushbu

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$$

yig'indi ikkinchi tur egri chiziqli integralning umumiy ko'rinishi deyiladi va u

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$$

Ravshanki,

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \Big] dt \tag{6}$$

bo'ladi.

Eslatma. a) ikkinchi tur egri chiziqli integrallar $\breve{AB}$ egri chiziqning yo'nalishiga bog'liq bo'lib,

$$\int\limits_{\breve{BA}} f(x,y)dx = -\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx$$

$$\int\limits_{\breve{BA}} f(x,y)dy = -\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dy$$

bo'ladi;

b) agar$\breve{AB}$ egri chiziq Ox o'qiga (Oy o'qiga) perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lsa, u holda

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx = 0 \quad \left(\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dy = 0 \right)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq sodda yopiq egri chiziq bo'lsin, ya'ni A va B nuqtalar ustma-ust tushsin. Bu yopiq chiziqni K deb belgilaylik. Yopiq chiziqda ham ikki yo'nalish bo'ladi. Ulardan biri musbat yo'nalish, ikkinchisini esa manfiy yo'nalish deb qabul qilamiz. Shunday yo'nalishni musbat deb qabul qilamizki, kuzatuvchi yopiq chiziq bo'ylab harakat qilganda, yopiq chiziq bilan chegaralangan soha unga nisbatan har doim chap tomonda yotsin.

Faraz qilaylik, K sodda yopiq chiziqda $f(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu K chiziqda ixtiyoriy ikkita turli nuqtalarni olib, ularni A va B bilan belgilaymiz. Natijada K yopiq chiziq ikkita $A\breve{a}B$ va $B\breve{b}A$ chiziqlarga ajraladi.

Ushbu

$$\int\limits_{A\breve{a}B} f(x, y)dx + \int\limits_{B\breve{b}A} f(x, y)dx$$

integrallar yig'indisi $f(x, y)$ funksiyaning K yopiq chiziq bo'yicha ikkinchi tur egri chiziqli integrali deyiladi va

$$\int\limits_{K} f(x, y)dx \quad yoki \quad \oint\limits_{K} f(x, y)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int\limits_{K} f(x, y)dx = \int\limits_{A\breve{a}B} f(x, y)dx + \int\limits_{B\breve{b}A} f(x, y)dx.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\int\limits_{K} f(x, y)dy$$

hamda, umumiy holda

$$\int\limits_{K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

integrallar ta'riflanadi.

Xususan, $\breve{AB}$ egri chiziq

$$y = y(x) \quad (a \le x \le b)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lib, $y(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz $y'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, (4) va (6) formulalar quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y(x))dx \tag{7}$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b \Big[P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\Big]dx.$$

Shuningdek, $\breve{AB}$ egri chiziq

$$x = x(y) \quad (c \le y \le d)$$

tenglama bilan aniqlangan bo‘lib, $x(y)$ funksiya $[c, d]$ da uzluksiz $x'(y)$ hosilaga ega bo‘lsa, (5) va (6) formulalar quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)dx = \int\limits_c^d f(x(y), y)dy, \tag{8}$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_a^b \Big[P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)\Big]dy.$$

Misol. Ushbu

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2dx + x^2dy$$

ikkinchi tur egri chiziqli integral hisoblansin, bunda $\breve{AB}$ egri chiziq

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsning yuqori yarim tekislikdagi qismi.

◁ Ma'lumki, ellipsning parametrik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

$A = A(a, 0)$ nuqtaga parametr t ning $t = 0$ qiymatiga, $B = B(-a, 0)$ nuqtaga esa $t = \pi$ qiymatiga mos kelib, t parametr 0 dan π gacha o'zgarganda (x, y) nuqta A dan B ga qarab ellipsning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizib chiqadi. Ravshanki,

$$P(x, y) = y^2, Q(x, y) = x^2$$

funksiyalar $\breve{AB}$ da uzluksiz.

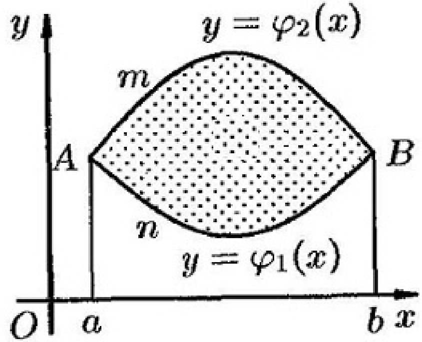
Yuqoridagi (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2 dx + x^2 dy = \int\limits_0^{\pi} \Big[b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 tb\cos t \Big] dt =$$

$$= ab \int\limits_0^{\pi} (a\cos^3 t - b\sin^3 t) dt = -\frac{4}{3} ab^2. \triangleright$$

3. Grin formulasi. Grin formulasi soha bo'yicha olingan ikki karrali integralni shu soha chegarasi bo'yicha olingan egri chiziqli integral bilan bog'laydigan formula.

Yuqoridan $y = \varphi_2(x)$ $(a \le x \le b)$ uzluksiz funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan $y = \varphi_1(x)$ $(a \le x \le b)$ uzluksiz funksiya grafigi bilan chegaralangan sohani (odatda uni egri chiziqli trapetsiya deyiladi) qaraylik. Bu sohani G bilan, uning chegarasi yopiq egri chiziqni $\partial(G)$ bilan belgilaylik (6-chizma):



6-chizma.

Ravshanki, $\breve{AB} - \varphi_2(x)$ funksiya grafigi, $\breve{DC} - \varphi_1(x)$ funksiya grafigi, $\partial(G) = \breve{DC} + CB + \breve{BA} + AD$ bo‘ladi.

Aytaylik, $P(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan, uzluksiz bo‘lib, u shu sohada uzluksiz $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda ushbu

$$\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy$$

karrali integral mavjud bo‘lib,

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \Big] dx$$

bo‘ladi.

Endi

$$\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))$$

bo‘lishini e’tiborga olib quyidagini topamiz:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx.$$

Yuqorida keltirilgan (7) formulaga binoan

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x))dx = \int_{\breve{AB}} P(x, y)dx,$$

$$\int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx = \int_{\breve{DC}} P(x, y)dx$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = \int_{\breve{AB}} P(x, y)dx - \int_{\breve{DC}} P(x, y)dx =$$

$$= -\int_{\breve{BA}} P(x, y)dx - \int_{\breve{DC}} P(x, y)dx.$$

Ravshanki,

$$\int_{\breve{CB}} P(x, y)dx = 0, \quad \int_{\breve{DC}} P(x, y)dx = 0.$$

Bu tenglamalarni e’tiborga olib topamiz:

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = -\int_{\breve{DC}} P(x, y)dx - \int_{\breve{CB}} P(x, y)dx - \int_{\breve{BA}} P(x, y)dx -$$

$$-\int_{\breve{DC}} P(x, y)dx = -\Big[\int_{\breve{DC}} P(x, y)dx + \int_{\breve{CB}} P(x, y)dx +$$

$$+\int_{\breve{BA}} P(x, y)dx + \int_{\breve{DC}} P(x, y)dx\Big] = -\int_{\partial(G)} P(x, y)dx.$$

Demak,

$$\iint_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial(G)} P(x, y)dx. \tag{9}$$

Endi, yuqoridan $y = c$ pastdan $y = d$ chiziqlar, yon tomonlardan esa uzluksiz $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ funksiyalar grafiklari bilan chegaralangan sohani (bu sohani ham egri chiziqli trapetsiya deyiladi) qaraylik. Bu sohani G bilan, uning chegarasi yopiq egri chiziqni $\partial(G)$ bilan belgilaylik.

Aytaylik, $Q(x, y)$ funksiya G sohada aniqlangan, uzluksiz bo‘lib, u shu sohada uzluksiz $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsin. U holda ushbu $\iint\limits_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dxdy$ karrali integral mavjud bo‘lib,

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\partial(G)} Q(x, y)dy \tag{10}$$

bo‘ladi.

Bu (10) formulaning to‘g‘riligi yuqoridagidek mulohaza yuritish bilan isbotlanadi.

Endi tekislikda qaralayotgan G soha yuqoridagi ikki holda qaralgan sohaning har birining xususiyatiga ega bo‘lgan soha bo‘lsin, $\partial(G)$ esa uning chegarasi bo‘lsin. Bu sohada ikkita $P(x, y)$ va $Q(x, y)$ funksiyalar aniqlangan bo‘lib, ular shu sohada uzluksiz $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Bu holda (9) va (10) formulalar o‘rinli bo‘ladi. Ularni hadlab qo‘shib topamiz:

$$\int\limits_{\partial(G)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy. \tag{11}$$

(11) formula Grin formulasi deyiladi.

IV bob. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar

1-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi. Funksiyaning limiti, uzluksizligi

Ma’lumki, ushbu

$$z = x + iy \quad (x \in R, y \in R, i = \sqrt{-1})$$

ko‘rinishdagi son kompleks son deyiladi. Barcha kompleks sonlardan iborat to‘plam kompleks sonlar to‘plami deyiladi va u $\mathbb{C}$ kabi belgilanadi:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{C}$ to‘plamdagi olingan har bir kompleks $z = x+iy$ son tekislikda koordinatasi (x, y) bo‘lgan bitta nuqtani tasvirlaydi va aksincha. Shuning uchun $\mathbb{C}$ to‘plam kompleks tekislik deb yuritiladi.

Kompleks sonlar tekisligi $\mathbb{C}$ da biror E to‘plamni ($E \subset \mathbb{C}$) qaraylik.

Ta’rif. Agar E to‘plamdagi har bir z kompleks songa biror f qoidaga ko‘ra $w \quad (w = n + iv, n \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R})$ kompleks son mos qo‘yilgan bo‘lsa, E to‘plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$f : z \to w \ \text{ yoki } \ w = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to‘plami, z- funksiya argumenti, w esa z o‘zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Endi

$$w = f(z)$$

da $z = x + iy$, $w = u + iv$ bo‘lishini e’tiborga olib,

$$u + iv = f(x + iy)$$

va undan

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Demak, E to'plamda $w = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda ikkita ikki o'zgaruvchili

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

funksiyalarning berilishidan iborat.

Odatda, $u = u(x, y)$ funksiya $f(z)$ ning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ funksiya esa $f(z)$ funksiyaning mavhum qismi deyiladi va

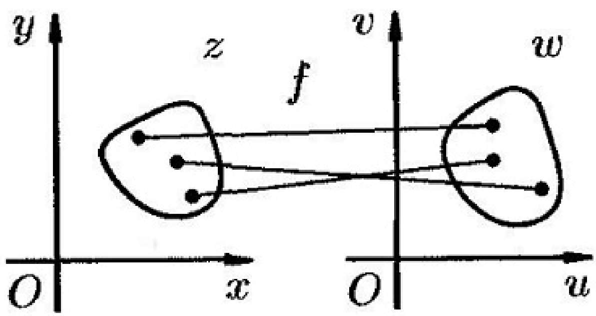
$$u(x, y) = Ref(z), \quad v(x, y) = Jmf(z)$$

kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $E \subset C$ to'plamda

$$w = f(z)$$

funksiyaning berilishi Oxy kompleks tekisligidagi E to'plamni Ouv kompleks tekislikdagi F (funksiya qiymatlar to'plami) ga aks ettirish bo'ladi (1-chizma).



1-chizma.

Aytaylik, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya $E \subset C$ to'plamda berilgan bo'lib, $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqta E ning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{x\to x_0,\quad y\to y_0} u(x,y)=\alpha, \qquad \lim_{x\to x_0,\quad y\to y_0} u(x,y)=\beta$$

bo'lsa,

$$A=\alpha+i\beta$$

kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z\to z_0$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{z\to z_0,} f(z)=A$$

kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu

$$\lim_{z\to 0}\frac{zRez}{|z|} \quad (z\neq 0)$$

limit hisoblansin.

$\lhd$ Ravshanki,

$$f(z)=\frac{zRez}{|z|}=\frac{(x+iy)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Demak,

$$u(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad v(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ma'lumki,

$$\lim_{x\to 0,\quad y\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \lim_{x\to 0,\quad y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Unda

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{zRez}{|z|}=0$$

bo'ladi.$\rhd$

Odatda, $z-z_0$ ayirma argument orttirmasi deyilib, uni $\triangle z$, $f(z)-f(z_0)$ ayirma esa funksiya orttirmasi deyilib, uni $\triangle f$ kabi belgilanadi.

Agar

$$\lim_{\triangle z\to 0}\triangle f=0$$

bo‘lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

funksiya ixtiyoriy $z_0 \in C$ nuqtada $(z_0 \neq 0)$ uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilsin.

$\lhd$ Berilgan funksiyaning orttirmasi

$$\triangle f = f(z_0 + \triangle z) = \frac{1}{z_0 + \triangle z} - \frac{1}{z_0} = -\frac{\triangle z}{z_0(z_0 + \triangle z)}$$

bo‘lib,

$$\lim_{\triangle z \to 0} \triangle f = \lim_{\triangle z \to 0} -\frac{\triangle z}{z_0(z_0 + \triangle z)} = 0$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya z_0 nuqtada uzluksiz.$\rhd$

Quyidagi tasdiq o‘rinli bo‘ladi. Ushbu

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiyaning $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun

$$u(x, y), \quad v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.

2-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $z_0 \in E$, $z_0 + \triangle z \in E$ bo‘lsin. Ravshanki, bu funksiyaning orttirmasi

$$\triangle w = \triangle f(z_0) = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)$$

bo‘ladi.

Ta’rif. Agar ushbu

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}.$$

Misol. Ushbu

$$f(z) = z^2$$

funksiyaning ixtiyoriy $z_0 \in C$ nuqtadagi hosilasi topilsin.

$\lhd$ Bu funksiyaning z_0 nuqtadagi orttirmasini hisoblaymiz:

$$\triangle f(z_0) = f(z_0 + \triangle z) - f(z_0) = (z_0 + \triangle z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \cdot \triangle z + \triangle z^2.$$

Unda

$$\frac{\triangle f(z_0)}{\triangle z} = 2z_0 + \triangle z$$

bo‘lib,

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z_0)}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} (2z_0 + \triangle z) = 2z_0$$

bo‘ladi. Demak, $f'(z_0) = 2z_0$.$\rhd$

Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalarning hosilalarini hisoblashdagi qoidalar bu holda ham o‘rinli bo‘ladi:

1) agar $f(z) = const$ bo‘lsa, $f'(z) = 0$ bo‘ladi,

2) $(k \cdot f(z))' = k \cdot f'(z), k = const$,

3) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g‘(z)$,

4) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g‘(z)$,

5) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g‘(z)}{g^2(z)}$.

Garchi kompleks hamda haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo‘lsa ham, kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning hosilaga ega bo‘lsin deyilishi talabi ancha og‘ir talab hisoblanadi. Quyidagi tasdiq o‘rinli:

Teorema. Ushbu $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ funksiyaning $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lishi uchun:

1) $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning x_0, y_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi,

2) quyidagi

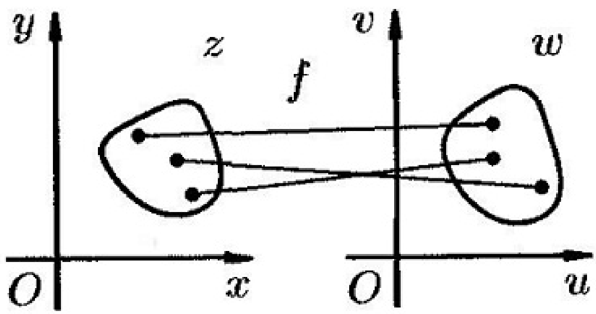
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{$\star$}$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Odatda, $(\star)$ shart Koshi - Riman sharti deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqtada chekli $f'(z_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada analitik deyiladi. Agar $f(z)$ funksiya E to‘plamning har bir nuqtasida analitik bo‘lsa, $f(z)$ funksiya E da analitik funksiya deyiladi.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ to‘plamda berilgan bo‘lsin. Uni (z) tekislik nuqtalarini (w) tekislik nuqtalariga akslantirish deb qaraymiz.



2-chizma.

Bu funksiya $z_0 \in E$ nuqtada chekli $f'(z_0)$ $(z_0 \neq 0)$ hosilaga ega bo‘lsin. Hosila ta’rifidan foydalanib topamiz:

$$|f'(z_0)| = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \quad (w_0 = f(z_0)).$$

Keyingi tenglikdan ko‘rinadiki, $|z-z_0|$ yetarlicha kichik bo‘lganda (ya’ni z_0 nuqtaning yetarlicha kichik atrofida) $|z-z_0|$ bilan $|w-w_0|$ miqdorlar proporsional, $f'(z_0)$ esa shu proporsionallikning koeffitsiyenti bo‘ladi.

3-§. Konform akslantirishlar

$E \subset \mathbb{C}$ to‘plamda aniqlash ushbu

$$w = f(z) \quad (w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)) \tag{1}$$

funksiya (akslantirish) (z) tekislikdagi $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ nuqtani (w) tekislikdagi w_0 nuqtaga akslantirsin:

$$w_0 = f(z_0).$$

Endi $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada chekli $f'(z_0)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ hosilaga ega deb, (1) akslantirish z_0 nuqtaning atrofini w_0 nuqtaning atrofiga akslantirilishi xarakterini o‘rganamiz.

Aytaylik, $f'(z_0) > 0$ bo‘lsin. Unda Koshi-Riman shartidan foydalanib

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0) > 0,$$

$$v'_x(x_0,y_0) = 0, \quad u'_y(x_0,y_0),$$

$$v'_y(x_0,y_0) = u'_x(x_0,y_0) > 0$$

bo‘lishini topamiz.

Faraz qilaylik, (z) tekislikdagi (x_0, y_0) nuqtadan o‘tuvchi egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [t_0, \alpha] \tag{2}$$

tenlgamalar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin, bunda $\varphi(t_0) = x_0, \quad \psi(t_0) = y_0$.

Bu (2) egri chiziq (1) akslantirish natijasida (w) tekislikdagi ushbu

$$u = u((\varphi), \psi(t)), v = v(\varphi(t), \psi(t)) \tag{3}$$

egri chiziqqa akslanadi.

Ravshanki, (2) egri chiziqqa z_0 nuqtada, ya'ni (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$y'_x(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{4}$$

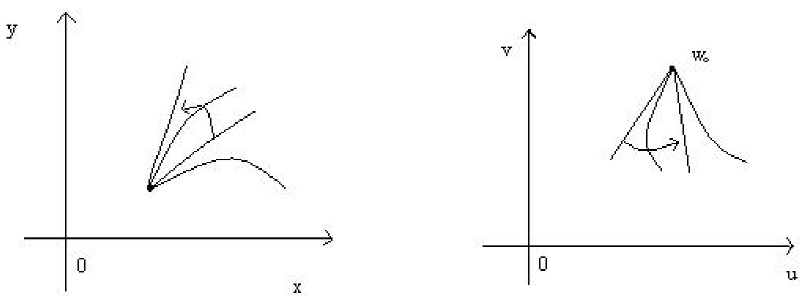
bo'ladi.

Endi (3) egri chiziqqa w_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$v' = \frac{v'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + v'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)}{u'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + u'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)} = \frac{v'_y(x_0, y_0)\psi'(t_0)}{u'_x(x_0, y_0)\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{5}$$

(4) va (5) munosabatlardan (2) va (3) egri chiziqlarga mos ravishda (x_0, y_0) va (u_0, v_0) (ya'ni z_0 va w_0) nuqtalarida o'takazilgan urinmalarning burchak koeffitsiyentlari bir xil ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (1) akslantirish (z) tekisligidagi z_0 nuqtadan o'tuvchi ikki egri chiziqni (w) tekislikdagi w_0 nuqtadan o'tuvchi ikki egri chiziqqa akslantiradi. Bu egri chiziqlar orasidagi burchak (urinmalar orasidagi burchak) bir xil bo'ladi, ya'ni (1) akslantirish natijasida burchak saqlanadi (3-chizma).



3-chizma.

Ta'rif. Aytaylik,

$$w = f(z)$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. Bu akslantirish natijasida (z) tekislikdagi ikki egri chiziq (w) tekislikdagi ikki egri chiziqqa akslanib, ular orasidagi burchak saqlansa, bunday akslantirish konform akslantirish deyiladi.

Agar $w = f(z)$ akslantirishda $f(z)$ funksiya chekli $f'(z_0)$ hosilaga ega bo‘lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo‘lsa, $w = f(z)$ konform akslantirish bo‘ladi.

Misol tariqasida ushbu

$$w = az + b \tag{6}$$

funksiyani qaraylik, bunda a, b o‘zgarmas kompleks sonlar va $a \neq 0$.

Odatda, (6) chiziqli akslantirish deyiladi. Ravshanki,

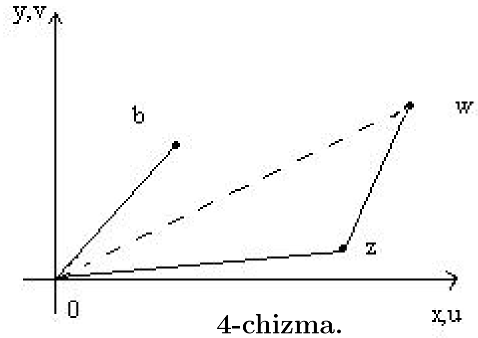
$$w' = (az + b)' = a.$$

Demak, (6) konform akslantirish bo‘ladi. Avvalo (6) akslantirishning xususiy hollarini qaraymiz. Qulaylik maqsadida (z) va (w) tekisliklarni ustma-ust joylashtiramiz.

1. Aytaylik, (6) akslantirish ushbu

$$w = z + b \tag{6$'$}$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Agar kompleks son vektor orqali ifodalanishini e’tiborga olsak, unda (6$'$) akslantirish z va b vektorlar yig‘indisi orqali topilishini ko‘ramiz. Demak, bu holda z ga ko‘ra uning aksi w parallel ko‘chirish orqali topiladi (4-chizma).



4-chizma.

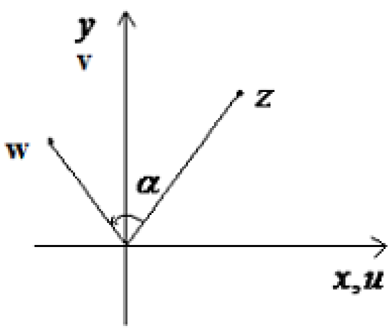
2. Aytaylik, (6) akslantirish ushbu

$$w = e^{i\alpha} \cdot z \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

ko'rinishda bo'lsin.

Ma'lumki, $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$, $z = |z| \cdot (cos\varphi + isin\varphi)$. Unda $w = e^{i\alpha} \cdot z = (cos\alpha + isin\alpha) \cdot |z|(cos\varphi + isin\alpha) = |z| \cdot [cos(\varphi + \alpha) + isin(\varphi + \alpha)]$ bo'ladi. Demak, $|w| = |z|$, $argw = \varphi + \alpha = argz + \alpha$.

Bu holda z ga ko'ra uning aksi w, z vektorni α burchakka burish bilan topiladi (5-chizma).



5-chizma.

3. Aytaylik, (6) akslantirish ushbu

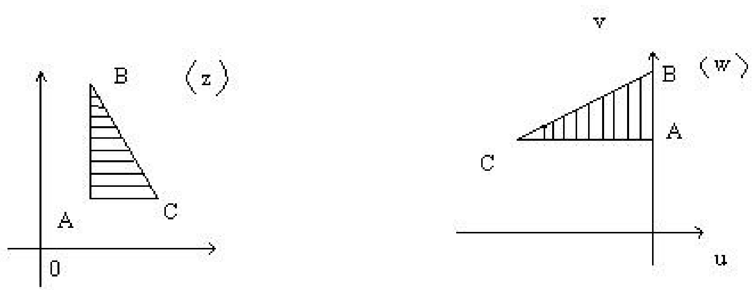
$$w = kz \quad k > 0 \tag{6'''}$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Bu holda z ga ko‘ra uning aks w, z vektorni cho‘zish $(k > 1)$ bilan topiladi. Yuqorida keltirilgan hollardan ko‘rinadiki,

$$w = az + b$$

chiziqli funksiya yordamida akslantirish $\mathbb{C}$ tekislikdagi sohani **parallel ko‘chirish**, **burchakka burish** hamda **cho‘zish** yoki **siqish**ni amalga oshiradi.

Masalan, uchlari $A = 1 + i$, $B = 1 + 3i$, $C = 2 + i$ nuqtalarda bo‘lgan ABC uchburchakni ushbu $w = iz + 1$ chiziqli funksiya yordamida akslantirilishini qaraylik. Ravshanki, bu akslantirish (z) tekisligidagi ABC uchburchakni (w) tekisligidagi $A_1B_1C_1$ uchburchakka akslantiradi. Uning $A_1B_1C_1$ uchlari mos ravishda A, B, C, nuqtalarning aksi bo‘ladi:
$A_1 = w(A) = i(1 + i) + 1 = i$, $B_1 = w(B) = i(1 = 3i) + 1 = i - 2$, $C_1 = w(c) = i(2 + i) + 1 = 2i$ (6-chizma):



6-chizma.

4-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning integrali

Tekislikda uzunlikka ega bo‘lgan L egri chiziqda $f(z)$ funksiya uzluksiz bo‘lsin.

L egri chiziqni undagi $z_0, z_1, ..., z_n$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lib, har bir $z_k z_{k+1}$ yoyda ixtiyoriy ν_k nuqtani olamiz. So‘ng quyidagi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\nu_k)(z_{k+1} - z_k) \tag{1}$$

yig‘indini tuzamiz. Bu yig‘indi $f(z)$ funksiyaninng L chiziq bo‘yicha integral yig‘indisi deyiladi.

Ravshanki, (1) yig‘indining qiymati L egri chiziqning z_k ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) nuqtalar yordamida bo‘laklash usuliga hamda har bir bo‘lakchada olingan ν_k nuqtalarga bog‘liq bo‘ladi.

Endi

$|z_1 - z_0|, |z_2 - z_1|, ..., |z_n - z_{n-1}|$ miqdorning eng kattasini λ deymiz:

$$\lambda = \max_{0 \le k \le n} |z_{k+1} - z_k|.$$

Ta’rif. Ushbu

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\nu_k) \triangle z_k \quad (\triangle z_k = z_{k+1} - z_k)$$

limit $f(z)$ funksiyaning L chiziq bo‘yicha integrali deyiladi va $\int\limits_L f(z)dz$ kabi belgilanadi:

$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\nu_k) \triangle z_k. \tag{2}$$

Endi kompleks o‘zgaruvchili $f(z)$ funksiya integralining mavjudligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik,

$$\nu_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

$$f(\nu_k) = u(\alpha_k, \beta_k) + iv(\alpha_k, \beta_k),$$

$$z_k = x_k + iy_k$$

bo‘lsin. U holda

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\nu_k)\triangle z_k = \sum_{k=0}^{n-1}[u(\alpha_k,\beta_k) + iv(\alpha_k,\beta_k)][(x_{k+1} - x_k)+$$

$$+i(y_{k+1} - y_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} u(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k - \sum_{k=0}^{n-1} v(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k +$$

$$+i\sum_{k=0}^{n-1} v(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k + i\sum_{k=0}^{n-1} u(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k$$

($\triangle x_k = x_{k+1} - x_k$, $\triangle y_k = y_{k+1} - y_k$) bo‘ladi.

Keyingi (3) tenglikning o‘ng tomonidagi to‘rtta yig‘indilar $u(x,y)$ va $v(x,y)$ funksiyalarning integral yig‘indilari bo‘lib, $u(x,y)$ va $v(x,y)$ uzluksiz funksiyalar bo‘lgani uchun ularning limiti mavjud bo‘lib,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} u(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k = \int_L u(x,y)dx,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} u(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k = \int_L u(x,y)dy,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} v(\alpha_k,\beta_k)\triangle x_k = \int_L v(x,y)dx,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} v(\alpha_k,\beta_k)\triangle y_k = \int_L v(x,y)dy$$

bo‘ladi. Unda $\lambda \to 0$ da (3) tenglikning chap tomonidagi yig‘indi ham limitga ega (bu limit $f(z)$ funksiyaning L chiziq bo‘yicha integrali bo‘ladi) va

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

bo‘ladi.

Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning kompleks argumenti bo'yicha integrali (L chiziq bo'yicha integrali) haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning haqiqiy o'zgaruvchi bo'yicha integraliga keladi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning L egri chiziq bo'yicha integrallashda integralning bu egri chiziqning shakliga (formasiga) bog'liq bo'lmasligi muhim. (Bunday holda integral L egri chiziqning boshlang'ich va oxirgi nuqtalarigagina bog'liq bo'lib, bu nuqtalarni birlashtiruvchi egri chiziqning ko'rininishiga bog'liq bo'lmaydi).

Agar $f(z)$ funksiya $E \subset \mathbb{C}$ da uzluksiz $f'(z)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda integral integrallash egri chiziqning formasiga bog'liq bo'lmaydi.

Haqiqatdan ham, bu holda

$$\int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy, \quad \int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

integrallar uchun, birinchidan

$u'_x(x,y)$, $u'_y(x,y)$, $v'_x(x,y)$, $v'_y(x,y)$ xususiy hosildorning uzluksizligi, ikkinchidan Koshi - Riman sharti $u'_y(x,y) = v'_x(x,y)$, $v'_y(x,y) = -u'_x(x,y)$ ning bajarilishi integrallarning yo'liga bog'liq bo'lmasligigni ta'minlaydi. Demak, bu holda $\int\limits_L f(z)dz$ integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaydi:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Agar $F(z)$ funksiya $f(z)$ ning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni

$$F'(z) = f(z)$$

bo'lsa, u holda

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z} = F(z) - F(z_0)$$

bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

Modomiki,

$$\int\limits_{L(z_0,z)} f(z)dz = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

va integral integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmas ekan, unda

$$\int\limits_{L(z_0,z)} f(z)dz = \int\limits_{x_0,y_0}^{x,y} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y} v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$= [A(x,y) + B(x,y)]\Big|_{(x,y_0)}^{(x,y)},$$

bunda

$$d[A(x,y) + iB(x,y)] = u(x,y)dx - v(x,y)dy + i(v(x,y)dx + u(x,y)dy) =$$

$$= (u+iv)(dx+idy) = f(z)dz.$$

Agar

$$F(z) = A(x,y) + iB(x,y)$$

deyilsa, unda

$$dF(z) = F'(z)dz = f(z)dz,$$

ya’ni

$$F'(z) = f(z)$$

bo‘ladi. Shunday qilib

$$\int\limits_{L(z_0,z)} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z}, \quad F'(z) = f(z)$$

bo‘lib, undan

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan,

$$\int_{0}^{i+1} \cos z dz = \sin z \Big|_{0}^{i+1} = \sin(i+1).$$

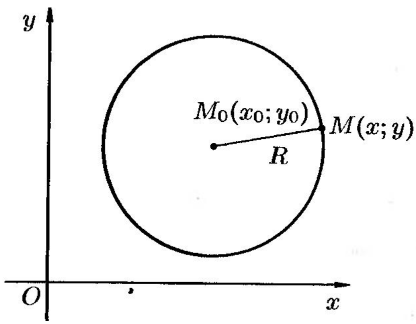
5-§. Funksiyaning maxsus nuqtasi

Aytaylik, biror $z_0 \in C$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo‘lsin.

Ma’lumki, ushbu

$$\{z \in C : |z - z_0| < R\}$$

to‘plam z_0 nuqtaning atrofi deyiladi (7-chizma).



7-chizma.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning atrofida analitik funksiya bo‘lib, z_0 nuqtaning o‘zida esa analitik bo‘lmasin. Ravshanki, bu holda $f(z)$ funksiya

$$0 < |z - z_0| < R$$

sohada analitik bo‘ladi.

Odatda, bunday holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasi deyiladi. Maxsus nuqta z_0 ga nisbatan ikki vaziyat bo‘lishi mumkin:

1. Shunday chekli kompleks son a_0 mavjud bo‘lishi mumkinki, $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi qiymatini

$$f(z_0) = a_0$$

bo‘lsin deb olinishi bilan

$$|z - z_0| < R$$

da analitik bo‘lgan $f(z)$ funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning to‘g‘ri (to‘g‘irlanadigan) maxsus nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

funksiya uchun $z_0 = 0$ maxsus nuqta bo‘lib, $f(z_0) = 1$ deb olinishi bilan $\mathbb{C}$ da analitik bo‘lgan funksiya hosil bo‘ladi.

Demak, $z_0 = 0$ nuqta qaralayotgan funksiyaning to‘g‘ri maxsus nuqtasi bo‘ldi.

2. Shunday a_0 soni mavjud bo‘lmasligi mumkin. Bu holda z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi, qisqacha **maxsus nuqtasi** deyiladi.

Aytaylik, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo‘lsin. Unda $f(z)$ funksiya

$$0 < |z - z_0| < R$$

da analitik bo‘ladi.

$f(z)$ funksiyaning $z \to z_0$ dagi limitiga qarab yakkalangan maxsus nuqtalar turlarga ajraladi.

Agar $z \to z_0$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

bo‘lsa, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi deyiladi. Masalan, ushbu

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

funksiya uchun $z_0 = -1$ nuqta qutb maxsus nuqta bo‘ladi, chunki

$$\lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \infty$$

bo‘ladi.

Agar $z \to z_0$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lmasa, z_0 nuqta $f(z)$ funksiyaning o‘ta (muhim) maxsus nuqtasi deyiladi.

Eslatma. Agar $z \to z_0$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lib,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 \quad (a_0 - \text{ chekli kompleks son})$$

bo‘lsa, u holda z_0 to‘g‘ri maxsus nuqta bo‘ladi, chunki

$$f(z_0) = a_0$$

deb olinishi bilan $f(z)$ funksiya

$$|z - z_0| < r$$

da analitik funksiyaga aylanadi.

6-§. Funksiyaning chegirmasi

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya

$$K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

sohada analitik bo‘lib, z_0 nuqta uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo‘lsin. Bu K sohaga tegishli bo‘lgan

$$\gamma_\rho = \{z \in C : |z - z_0| = \rho, 0 < \rho < r\}$$

aylanani (yopiq egri chiziqni) olaylik.

Ta’rif. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)dz$$

miqdor $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus z_0 nuqtadagi qoldig‘i deyiladi va $res_{z=z_0}f(z)$ kabi belgilanadi:

$$res_{z=z_0}f(z) = \int_{\gamma_\rho} f(z)dz.$$

$f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi qoldig‘ini limit orqali ham topish mumkin:

$$res_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] \qquad (*)$$

Qoldiqlar haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya bir bog‘lamli D sohada berilgan bo‘lib, shu sohaga tegishli chekli sondagi $z_1, z_2, ..., z_n$ maxsus nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda analitik bo‘lsin. Bu yakkalangan maxsus $z_1, z_2, ..., z_n$ nuqtalar D sohada yotuvchi silliq yopiq γ ichida joylashsin. U holda

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k}f(z) \qquad (**)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz$$

integral hisoblansin.

$\triangleleft$ Ravshanki, integral ostidagi

$$\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$$

funksiya uchun $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -3$ maxsus nuqtalar (qutb nuqtalar) bo‘lib, ulardan ikkitasi $z_1 = i$, $z_2 = -i$ lar

$$\gamma = \{z \in C : |z| = 2\}$$

aylana ichida yotadi. Unda yuqoridagi teoremaga binoan

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz = 2\pi i[res_{z=i}f(z) + res_{z=-i}f(z)]$$

bo‘ladi. Endi (*) formuladan foydalanib, funksiyaning $z_1 = i, z_2 = -i$ nuqtalardagi qoldiqlarini hisoblaymiz:

$$res_{z=i}f(z) = res_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{z^2}{(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{2i(i+3)} = \frac{1}{2(1-3i)},$$

$$res_{z=-i} f(z) = res_{z=-i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)} = \lim_{z\to -i} \left[(z+i)\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}\right] =$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{z^2}{(z+i)(z+3)} = \frac{i^2}{-2i(-i+3)} = \frac{1}{2(1+3i)}.$$

Natijada

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{2(1-3i)} + \frac{1}{2(1+3i)}\right)$$

bo‘ladi. $\triangleright$

III qism. Differensial tenglama va qatorlar

I bob. Differensial tenglamalar

1-§. Differensial tenglama tushunchasi

Fan va texnikaning turli sohalarida uchrab turadigan ba'zi masalalar noma'lum funksiya va uning hosilalari qatnashgan tenglamalarga keladi. Bunday tenglamalar va ularni yechish usullari oliy matematikaning muhim bo'limlaridan biri differensial tenglamalar nazariyasida o'rganiladi.

1. Masalalar. 1. Idishda 140 litr aralashma bo'lib, uning tarkibida 14 kg. tuz bor. Bu idishga ikkita quvur ulangan. Birinchi quvurdan har daqiqada tarkibida 1 kg tuz bo'lgan 7 litr aralashma uzluksiz ravishda quyiladi, ikkinchi quvurdan esa shu tezlik bilan aralashma oqiziladi. Bir soatdan so'ng idishdagi aralashma tarkibida qancha tuz bo'ladi?

Vaqtni erkli o'zgaruvchi sifatida olib, uni t bilan belgilaymiz. U holda aralashmadagi tuzning miqdori y shu t ga bog'liq bo'ladi: $y = y(t)$. Ma'lumki, $t+\triangle t$ paytda aralashmadagi tuzning miqdori $y(t+\triangle t)$ bo'lib, $\triangle t$ vaqt oralig'ida tuz miqdori $y(t+\triangle t) - y(t)$ ga o'zgardi.

Masalaning shartiga ko'ra $\triangle t$ vaqt oralig'ida idishga $1 \cdot \triangle t$ kg tuz tushadi va idishdan

$$\frac{y(t)}{140} \cdot 7 \cdot \triangle t = \frac{y(t)}{20} \cdot \triangle t \quad kg$$

tuz chiqib ketadi. Ularning farqi

$$1 \cdot \triangle t - \frac{y(t)}{20} \cdot \triangle t = \left(1 - \frac{y(t)}{20}\right) \triangle\, t$$

bo'ladi.

Har daqiqada idishdagi aralashma tarkibida tuz miqdori o'zgarib turganligi sababli

$$y(t+\triangle t) - y(t) \approx \left(1 - \frac{y(t)}{20}\right) \triangle\, t \tag{1}$$

bo'ladi. Agar $\triangle t$ nolga intilib borsa, (1) taqribiy tenglik qat'iy tenglikka aylana boradi. Binobarin,

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{y(t+\triangle t)-y(t)}{\triangle t}=1-\frac{y(t)}{20}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{y(t+\triangle t)-y(t)}{\triangle t}=y'(t).$$

Demak,

$$y'(t)=1-\frac{y(t)}{20}. \tag{2}$$

Shunday qilib, idishdagi aralashma tarkibidagi tuz miqdorini topish noma'lum funksiya $y(t)$ va uning hosilasi $y'(t)$ qatnashgan tenglamani yechishga keladi.

2. Havo harorati 0° C bo'lgan muhitda T° C haroratli $(T>0)$ jism sovitilayotgan bo'lsin. Vaqtning $t=0$ vaqtidan boshlab jismning sovish qonuniyati topilsin.

T harorat t vaqtning funksiyasi bo'ladi: $T=T(t)$. Nyuton qonuniga binoan T° C haroratli jismning sovush tezligi shu T^0 C ga proporsional bo'ladi. Agar tezlik $T'(t)$ hosila ekanligini e'tiborga olsak va proporsionallik koeffitsiyenti $K(K>0)$ deyilsa, unda Nyuton qonuniga ko'ra

$$T'(t)=-KT(t) \tag{3}$$

bo'ladi.

Shunday qilib jismning sovish qonuniyati $T(t)$ ni topish, noma'lum funksiya $T(t)$ va uning hosilasi $T'(t)$ qatnashgan tenglamani yechishga keladi.

2. Differensial tenglama

Aytaylik, x o'zgaruvchi (erkli o'zgaruvchi), y esa uning funksiyasi $y=y(x)$ bo'lib, $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ lar bu funksiyaning birinchi, ikkinchi va h.k. $n-$ tartibli hosilalari bo'lsin. x o'zgaruvchi, noma'lum y funksiya va uning turli tartibdagi hosilalari qatnashgan tenglama **differensial tenglama** deyiladi.

Yuqoridagi (2) va (3) tenglamalar differensial tenglamalar bo'ladi.

$x, y, y'.., y^{(n)}$ larni bog'lovchi ushbu

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

tenglik differensial tenglamaning umumiy ko'rinishini ifodalaydi. (4) differensial tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilasining yuqori tartibi (4) differensial tenglamaning **tartibi** deyiladi.

Masalan,

$$y' + \frac{2}{x}y = \sin x,\ 2xy' - 3y = 0,\ y' - x^2y + x^3 = 0,\ y' - x = 0$$

birinchi tartibli differensial tenglamalar,

$$y'' + 4y' + 13y = 0,\ \ y'' + 2y - \cos x = 0,\ \ y'' = \arcsin x$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo'ladi. Xususan, birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0,$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi esa

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

shaklda yoziladi.

3. Differensial tenglamaning yechimi

Umumiy ko'rinishga ega bo'lgan

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

differensial tenglamani qaraylik.

Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya biror oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu oraliqda $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

Agar (4) tenglamadagi y ning o‘rniga $\varphi'(x)$, y' ning o‘rniga $\varphi(x), y''$ ning o‘rniga $\varphi''(x)$ va h.k. $y^{(n)}$ ning o‘rniga $\varphi^{(n)}(x)$ qo‘yilganda (4) tenglama ayniyatga aylansa:

$$\Phi\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0,$$

$\varphi(x)$ funksiya (4) differensial tenglamaning **yechimi** deyiladi.

Masalan, $y = x^2$ funksiya ushbu

$$xy' - 2y = 0 \tag{5}$$

birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi bo‘ladi. Haqiqatdan ham,

$$y = x^2, \;\; y' = 2x$$

larni (5) tenglamadagi y va y' lar o‘rniga qo‘ysak, u holda

$$x \cdot 2x - 2 \cdot x^2 \equiv 0$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$y = Cx^2 \;\; (C - \text{ o‘zgarmas}) \tag{6}$$

funksiya ham shu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Chunki,

$$y = Cx^2, \; y' = 2Cx$$

larda (5) tenglama ayniyatga aylanadi:

$$x \cdot 2Cx - 2Cx^2 \equiv 0.$$

Differensial tenglamaning (6) ko‘rinishdagi yechimi uning **umumiy yechimi** deyiladi. Bu umumiy yechimda ixtiyoriy o‘zgarmas C ning biror tayin C_0 qiymatidagi C_0x^2 yechim (5) tenglamaning **xususiy yechimi** deyiladi.

Demak, differensial tenglamaning umumiy yechimdagi ixtiyoriy o‘zgarmas C ning turli qiymatlarida differensial tenglamaning xususiy yechimlari (ular cheksiz ko‘p bo‘ladi) hosil bo‘lib, umumiy yechim bu xususiy yechimlarning barchasini o‘zida mujassamlashtiradi. Boshqacha qilib aytganda umumiy yechimdan tenglamaning barcha xususiy yechimlari kelib chiqadi.

Ammo yechimga ega bo‘lgan (bu yechimni $\varphi(x)$ deylik) shunday differensial tenglamalar borki, bu $\varphi(x)$ yechim qaralayotgan differensial tenglamaning umumiy yechimdan (ixtiyoriy o‘zgarmas C ning hech bir qiymatidan) kelib chiqmaydi. Masalan,

$$y'^2 = 4y \quad (y = y(x)) \tag{7}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (x + C)^2$$

bo‘ladi. Chunki,

$$y = (x + C)^2, \quad y' = 2(x + C)$$

lar berilgan tenglamani ayniyatga aylantiradi:

$$[2(x + C)]^2 \equiv 4(x + C)^2.$$

Ayni paytda $y = \varphi(x) = 0$ funksiya (7) differensial tenglamaning yechimi bo‘lib (bu ravshan), u umumiy yechimdan (C ning hech bir qiymatida) bu yechim kelib chiqmaydi. Odatda, bunday yechim qaralayotgan differensial tenglamaning **maxsus yechimi** deyiladi. Differensial tenglamaning umumiy yechimidan xususiy yechim argumenti x biror x_0 qiymatni qabul qilganda $y(x)$ funksiya berilgan y_0 qiymatni qabul qilsin degan shart asosida hosil qilinadi. Bunda x_0, y_0 boshlang‘ich qiymatlar deyiladi, keltirilgan shart **boshlang‘ich shart** deyilib,

$$x = x_0 \text{ bo‘lganda } y = y_0$$

yoki

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

kabi yoziladi.

Umumiy yechimdagi C o‘zgarmas shu shart asosida topiladi. Masalan, yuqorida keltirilgan

$$xy' - 2y = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = Cx^2$$

ga ko‘ra ushbu

$$y\Big|_{x=2} = 8$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi quyidagicha topiladi: $x = 2$, $y = 8$ larni umumiy yechimdagi x va y larning o‘rniga qo‘yib,

$$8 = C \cdot 4$$

bo‘lishni, undan esa $C = 2$ ekanini aniqlaymiz. C ning bu qiymatini umumiy yechimdagi C ning o‘rniga qo‘yib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y = 2x^2$$

bo‘lishini topamiz.

Differensial tenglamaning boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish differensial tenglamalar nazariyasining muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Odatda, bu masala **Koshi masalasi** deyiladi.

4. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalari

Differensial tenglamalar nazariyasida quyidagi masalalar asosiy masalalar hisoblanadi:

1) differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi. Differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligini ifodalovchi teoremalar mavjud. Bunday teoremalarda tenglama yechimining mavjud va yagona bo‘lishining yetarli shartlari keltirilgan. Mavjudlik teoremalari differensial tenglamalarga oid maxsus adabiyotlarda isbotlangan. Biz keyingi paragraflarda mavjudlik teoremalarini keltirish bilangina kifoyalanamiz;

2) differensial tenglamalarni yechish. Differensial tenglamalarni yechish (yechimini topish), yechish usullarini aniqlash eng muhim masalalardandir. Ko‘pgina tenglamalar (hatto ularning yechimi mavjudligi ma’lum bo‘lsa ham) yechilavermaydi. Keyingi paragraflarda yechiladigan tenglamalar qaraladi va ularni yechish usullari bayon etiladi;
3) differensial tenglamalarining tatbiqlari. Differensial tenglamalarning tatbiq doirasi juda keng. Fan va texnikaning turli sohalaridagi (geometriya, fizika, mexanika, texnika, tabiatshunoslik va h.k) masalalar differensial tenglamalar yordamida hal etiladi.

Mashqlar

1. Ushbu $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = e^{2x}$ funksiyalar

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

differensial tenglamaning yechimi bo‘lishi ko‘rsatilsin

2. Ushbu $\varphi(x) = \ln(1 + e^{-x})$ funksiya

$$e^y(y' + 1) = 0$$

differensial tenglamaning yechimi bo‘lishi ko‘rsatilsin.

3. Ushbu $\varphi(x) = e^{3x}$ funksiya $y''-3y'+2y = 0$ differensial tenglamaning yechimi bo‘ladimi?

4. Ushbu $y' = 3x$ differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{3}{2}x^2 + C$$

ekanligi ma’lum. Bu differensial tenglamaning $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ boshlang‘ich shartini qanoatlantiradigan xususiy yechimi topilsin.

5. Ushbu

$$y' = xy + x + y + 1$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = Ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

ekanligi ma’lum. Bu differensial tenglamaning $x_0 = -1$, $y_0 = 0$ boshlang‘ich shartini qanoatlantiradigan xususiy yechimi topilsin.

2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Ma’lumki, birinchi tartibli differensial tenglama umumiy ko‘rinishda quyidagicha

$$\Phi(x, y, y') = 0$$

ifodalanadi. Bunda, x – erkli o‘zgaruvchi (funksiya argumenti) $y = y(x)$ – noma’lum funksiya, y' esa noma’lum funksiyaning hosilasi. Bu tenglamani y' ga nisbatan yechilgan holi bo‘lgan

$$y' = f(x, y) \ \left(\frac{dy}{dx} = f(x, y)\right) \tag{1}$$

tenglamani o‘rganamiz. Odatda, (1) tenglama hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deb ham yuritiladi. (1) tenglama uchun tenglamaning yechimi (umumiy va xususiy yechimlari), boshlang‘ich shart, Koshi masalalari tushunchalari 1-§ da keltirilgan tushunchalar kabi kiritiladi.

1. Differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi

Ushbu

$$y' = f(x, y)$$

differensial tenglamani qaraylik. Ravshanki, bu tenglama yechimining mavjudligi va uning yechimi $f(x, y)$ funksiyaga bog‘liq. Aytaylik, funksiya tekislikdagi yopiq to‘g‘ri to‘rtburchak

$$D = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y + b\}$$

da berilgan bo‘lsin, bunda a va b lar musbat sonlar.

Teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya D da uzluksiz bo‘lib, uzluksiz $f'_y(x, y)$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda (1) differensial tenglama boshlang‘ich shart $x = x_0$, $y = y_0$ ni qanoatlantiruvchi yechimga ega va u yagona bo‘ladi.

Eslatma. Teoremada keltirilgan shart (1) tenglama yechimi mavjud bo‘lishining yetarli shartini ifodalaydi. Binobarin, bu shart bajarilmaganda ham (1) tenglama yechimga ega bo‘lishi mumkin. Yuqorida aytib o‘tganimizdek, (1) tenglama yechimi $f(x,y)$ funksiyaga (uning ko‘rinishiga) bog‘liq bo‘ladi. Bu funksiyaning maxsus ko‘rinishlarida yuzaga keladigan differensial tenglamalarni keltiramiz:

1) aytaylik,

$$f(x,y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$$

bo‘lsin, bunda $\varphi(x)$ va $\psi(y)$ uzluksiz funksiyalar. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y) \tag{2}$$

ko‘rinishga keladi. Uni o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi.

2) aytaylik,

$$f(x,y) = q(x) - p(x) \cdot y$$

bo‘lsin, bunda $p(x)$ va $q(x)$ – funksiyalar uzluksiz. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (y' + py = q) \tag{3}$$

ko‘rinishga keladi. Uni chiziqli differensial tenglama deyiladi.

3) aytaylik

$$f(x,y) = q(x) \cdot y^m - p(x)y$$

bo‘lsin, bunda $p(x)$, $q(x)$ – uzluksiz funksiyalar; m – o‘zgarmas son.

Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \tag{4}$$

ko‘rinishga keladi. Uni Bernulli tenglamasi deyiladi.

4) aytaylik,

$$f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{5}$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglikning o‘ng tomonidagi

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ifoda biror $F(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali ($dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$) bo‘lishi mumkin. Bunday vaziyatda (5) ($dF(x,y) = 0$) tenglama to‘liq differensial tenglama deyiladi.

5) aytaylik, $f(x,y)$ funksiya ushbu

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

shartni qanoatlantirsin, bunda t – ixtiyoriy son (bunday holda $f(x,y)$ nol o‘lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.) Bu holda (1) tenglama ushbu

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$$

ko‘rinishga keladi.Uni bir jinsli differensial tenglama deyiladi. Yuqorida keltirilgan (2), (3), (4), (5) va (6) differensial tenglamalar yechimga ega (ularning yechimga ega bo‘lishi, $f(x,y)$ funksiyaning ko‘rinishi hamda mavjudlik teoremasining shartlarining bajarilishidan kelib chiqadi).

Keyingi paragraflarda shunday tenglamalarni yechish usullari bilan tanishamiz.

3-§. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar

Avvalo o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y) \tag{1}$$

ning xususiy hollari $\psi(y) = 1$ va $\varphi(x) = 1$ bo‘lgan hollarni qaraylik. Aytaylik, (1) tenglamada $\psi(y) = 1$ bo‘lsin.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \tag{2}$$

tenglama

$$dy = \varphi(x)dx$$

tenglamaga ekvivalent. Bu tenglamaning har ikki tomonini integrallash natijasida

$$y = \int \varphi(x)dx + C$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \int \varphi(x)dx + C$$

bo‘ladi.

Aytaylik, (1) tenglamada $\varphi(x) = 1$ bo‘lsin. Ushbu tenglamada

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y) \tag{3}$$

$\psi(y) \neq 0$ deb uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = dx$$

Bu tenglamaning har ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int dx,$$

$$x = \int \frac{dy}{\psi(y)} + C. \tag{4}$$

Demak, (3) tenglamaning umumiy yechimi (4) ko‘rinishida bo‘ladi.

Endi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$$

bo‘lsin. Ravshanki, $\dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx$, $(\psi(y) \neq 0)$ bo‘lib, uning har ikki tomonini integrallash natijasida

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C \tag{5}$$

bo‘ladi. (5) qaralayotgan (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

1-misol. Ushbu $x + yy' = 0$ tenglama yechilsin.

$\lhd$ Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0, xdx + ydy = 0.$$

Bu tenglamaning har ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\int xdx + \int ydy = \int 0dx, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Natijada $x^2+y^2 = 2C = C'$ bo‘lib, u berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi. $\rhd$

2-misol. Ushbu $(1 + e^x)yy' = e^x$ tenglama yechilsin.

$\lhd$ Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$(1 + e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x.$$

Bu tenglikdan

$$(1 + e^x)ydy = e^x dx$$

va uning har ikki tomonini $1 + e^x$ ga bo‘lish natijasida

$$ydy = \frac{e^x}{1 + e^x}dx$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Keyingi tenglikning har ikki tomonini integrallaymiz:

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x}dx = \int \frac{d(1 + e^x)}{1 + e^x}.$$

Natijada

$$\frac{y^2}{2} = ln(1 + e^x) + C$$

bo‘lib, bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3-misol. Ushbu

$$y' = xy + x + y + 1 \tag{6}$$

differensial tenglamaning $x = -1$, $y = 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimi topilsin.

$\lhd$ Avvalo berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz, (6) tenglikning o‘ng tomonidagi ifoda uchun

$$xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, unda tenglama ushbu

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y+1)$$

ya’ni

$$\frac{dy}{y+1} = (x+1)dx$$

ko‘rinishiga keladi. Uni integrallab topamiz:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx,$$

$$\ln|y+1| = \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C$$

(bu holda o‘zgarmasni $\ln C$ deb olish qulay bo‘ladi).

Shunday qilib berilgan differensial tenglamaning yechimi

$$\ln|y+1| = \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C,$$

ya’ni

$$y = Ce^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

bo‘ladi. Bu yechim boshlang‘ich shartda ($x = -1$, $y = 0$) da

$$0 = Ce^0 - 1$$

bo‘lib, undan $C = 1$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, berilgan differensial tenglamaning boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y = e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

bo‘ladi.$\triangleright$

Mashqlar

Quyidagi differensial tenglamalarni umumiy yechimi topilsin.

1. a) $y' = 3x$, b) $y' = 5\sqrt{y}$. 2. a) $y' = \frac{y}{x}$, b) $yy' = 4$.

3. a) $y' = 2 + y$, b) $y' = e^{x+y}$. 4. $2x(1 + y^2) + y' = 0$.

5. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$ 6. $e^{-y}(1 + y') = 1$.

7. $2x \sin x dx + (x^2 + 3) \cos y dy = 0$

8. Ushbu $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ differensial tenglamaning $x = 1$, $y = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

9. Ushbu $xy' = 2y$ differensial tenglamaning $x = 2$, $y = 3$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

10. Ushbu $x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}y' = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$, $y = 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

4-§. Bir jinsli differensial tenglamalar

Ma’lumki,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

differensial tenglamada $f(x, y)$ funksiya

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

shartni qanoatlantirsa, (1) ni **bir jinsli** differensial tenglama deyiladi. Unda $t = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ deyilishi bilan

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

bo‘lib, qaralayotgan (1) differensial tenglama ushbu

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \tag{2}$$

ko‘rinishga keladi. (2) tenglamani yechish uchun

$$\frac{y}{x} = u \quad (u = u(x))$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$y = ux, \quad y' = (ux)' = u + xu'$$

bo‘lib, (2) tenglamaga qo‘yilsa

$$u + xu' = \varphi(u)$$

ya’ni

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Keyingi tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uni integrallash bilan

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C \quad \left(u = \frac{y}{x}\right)$$

bo‘lishini topamiz. Bu tenglik berilgan bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini, $y = xu$ funksiyani ifodalaydi.

Misol. Ushbu

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Berilgan tenglamada

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

bo‘lib, uning uchun

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)(ty)}=\frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=f(x,y)$$

bo‘ladi. Demak, berilgan tenglama bir jinsli tenglama. Agar $\frac{y}{x}=u$, $y=ux$ deyilsa, unda $y'=u+xu'$ bo‘lib, berilgan tenglama ushbu

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamani yechamiz:

$$udu=\frac{dx}{x},$$

$$\int udu=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln C,$$

$$u^2=2\ln(|x|C).$$

Endi $y=xu$ ekanini e’tiborga olib,

$$\frac{y^2}{x^2}=2\ln(|x|C),$$

$$y^2=2x^2\ln|xC|,$$

$$y=\pm x\sqrt{2\ln|xC|}$$

bo‘lishini topamiz. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.$\rhd$

5-§. Chiziqli differensial tenglamalar

Ushbu

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglama **chiziqli differensial tenglama** deyiladi, bunda $p(x)$ va $q(x)$ lar biror oraliqda uzluksiz bo‘lgan funksiyalar.

(1) tenglamaning yechimini ikkita noma'lum $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar ko'paytmasi ko'rinishida izlaymiz:

$$y = uv \qquad (y(x) = u(x)v(x)),$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Topilishi kerak bo'lgan noma'lum $y = y(x)$ funksiya o'rniga ikkita noma'lum $u = u(x)$, $v = v(x)$ funksiyalarning kiritilishi g'aliz tuyuladi. Biroq keyinchalik ko'ramizki $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalarning birini mos tanlab olinishi ikkinchisini yengil topishga imkon beradi. Natijada $y(x)$ topiladi.

Yuqoridagi

$$y = uv, \quad y' = (uv)' = u'v + uv'$$

larni (1) tenglamadagi y va y' lar o'rniga qo'ysak,

$$u'v + uv' + puv = q,$$

ya'ni

$$u'v + u(v' + pv) = q \tag{2}$$

differensial tenglama hosil bo'ladi. Endi $v = v(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki, (bu funksiyani ixtiyoriy ravishda tanlash imkoniyatidan foydalanib)

$$v' + pv = 0$$

bo'lsin. Bu differensial tenglama ushbu

$$\frac{dv}{v} = -pdx$$

o'zgaruvchisi ajraladigan tenglamaga keladi. Keyingi tenglamani integrallab topamiz:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int pdx, \ \ln v = -\int pdx,$$

$$v = e^{-\int p dx}. \tag{3}$$

Natijada (2) differensial tenglama ushbu

$$u' e^{-\int p dx} = q$$

ko‘rinishni oladi. Uni yechamiz:

$$e^{-\int p dx} \frac{du}{dx} = q,$$

$$\frac{du}{dx} = q e^{\int p dx},$$

$$du = q e^{\int p dx} dx,$$

$$u = \int q e^{\int p dx} dx + C. \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$y = uv = \left(\int q e^{\int p dx} dx + C \right) e^{-\int p dx} \tag{5}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$y' + py = q$$

chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \left(\int q e^{\int p dx} dx + C \right) e^{-\int p dx}$$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu $y' + xy = x^3$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Bu tenglamaning umumiy yechimini (5) formuladan foydalanib topamiz. Berilgan tenglama uchun

$$p = x, \quad q = x^3$$

bo‘lib, (5) formulaga ko‘ra

$$y = \left(\int x^3 e^{\int x dx} dx + C \right) e^{-\int x dx} = \left(\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx + C \right) e^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left((x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}} + C\right) = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'ladi. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo'ladi.$\triangleright$

2-misol. Ushbu

$$xy' + 2y = x^2 \tag{6}$$

differensial tenglamaning quyidagi $x = 1$, $y = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi, topilsin.

$\triangleleft$ Avvalo berilgan tenglamani yuqorida keltirilgan usul bo'yicha umumiy yechimini topamiz.

Aytaylik, $y' = uv$ bo'lsin. Unda $y' = u'v + uv'$ bo'lib, ularni (6) tenglamaga qo'yish natijasida

$$v(xu' + 2u) + xuv' = x^2 \tag{7}$$

tenglama hosil bo'ladi.

Endi u funksiyani shunday tanlaymizki,

$$xu' + 2u = 0 \tag{8}$$

bo'lsin. Keyingi tenglamani yechamiz:

$$x\frac{du}{dx} = -2u,$$

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dx}{x},$$

$$u = \frac{1}{x^2}.$$

(8) munosabatni hamda $u = \dfrac{1}{x^2}$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda (7) tenglama ushbu

$$x\frac{1}{x^2}v' = x^2,$$

$$\frac{dv}{dx} = x^3,$$
$$dv = x^3 dx,$$

ko‘rinishga kelishini topamiz. Bu tenglikni integrallasak, unda

$$\int dv = \int x^3 dx,$$

$$v = \frac{x^4}{4} + C$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = uv = \frac{x^2}{4} + \frac{C}{x^2}$$

bo‘ladi.

Bu yechim $x = 1$, $y = 0$ boshlang‘ich shartda $0 = \frac{1}{4} + C$ bo‘lib, undan $C = -\frac{1}{4}$ ni topamiz.

Demak, berilgan differensial tenglamaning boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

bo‘ladi.$\triangleright$

Mashqlar

Quyidagi chiziqli differensial tenglamalarning umumiy yechimi topilsin:

1. $y' + xy = 0$; 2. $y' - \frac{y}{x} = x$; 3. $y' + 2y = e^{-x}$; 4. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = 0$;

5. $y' + 3xy = x^2$; 6. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$;

7. $y' + y \operatorname{tg} x = 2^x \cos x$; 8. $y' - \frac{2xy}{x^2+3} = (x^2+3)\cos x$;

9. ushbu $y' + y = e^x$ differensial tenglamaning $x = 0$, $y = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin;

10. ushbu $y' \cos x + y \sin x = 1$ differensial tenglamaning $x = 0$, $y = 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

6-§. Bernulli tenglamasi

Ushbu

$$y' + py = q \cdot y^m \tag{1}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama **Bernulli tenglamasi** deyiladi, bunda $p = p(x)$, $q = q(x)$ funksiyalar biror oraliqda uzluksiz, m esa o‘zgarmas.

$m = 0$ bo‘lganda (1) tenglama chiziqli tenglamaga, $m = 1$ bo‘lganda esa o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$y' + (p - q)y = 0$$

tenglamaga keladi.

Bernulli tenglamasining har ikki tomonini y^m ifodaga bo‘lib topamiz:

$$\frac{y'}{y^m} + \frac{p}{y^{m-1}} = q,$$

$$y^{-m}y' + py^{1-m} = q. \tag{2}$$

Keyingi tenglamada noma’lum $y = y(x)$ funksiyani

$$z = z(x) = y^{1-m} \tag{3}$$

tenglik yordamida z ga almashtiramiz. Unda

$$z' = (1 - m)y^{1-m+1}y' = (1 - m)y^{-m}y'$$

bo‘lib, (2) tenglama ushbu

$$\frac{1}{1 - m}z' + pz = q,$$

ya’ni

$$z' + (1 - m)pz = (1 - m)q \tag{4}$$

differensial tenglamaga keladi. Bu chiziqli tenglama bo‘ladi. Shunday qilib, (1) Bernulli tenglamasi (3) almashtirish yordamida (4) chiziqli tenglamaga keladi.

Yuqorida, 4-§ da chiziqli tenglamalar o‘rganilib, uning umumiy yechimi formulasidan foydalanib, (4) differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z = z(x) = \left(\int (1-m)qe^{\int (1-m)pdx}dx + C\right) e^{-\int (1-m)pdx}$$

Demak, (1) tenglamaning umumiy yechimi ($z = y^{1-m}$, $y = z^{\frac{1}{1-m}}$)

$$y = \left[\left(\int (1-m)qe^{\int (1-m)pdx}dx + C\right) e^{-\int (1-m)pdx}\right]^{\frac{1}{1-m}}$$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu $y' + y = 2y^2$ differensial tenglama yechilsin.

$\lhd$ Bu Bernulli tenglamasining umumiy yechimini (5) formuladan foydalanib topamiz. U holda $p(x) = 1$, $q(x) = 2$, $m = 2$ bo‘ladi. (5) formulaga ko‘ra

$$y = \left[\left(\int (1-2)2e^{\int (1-2)\cdot 1dx}dx + C\right) e^{-\int (1-2)\cdot 1dx}\right]^{\frac{1}{1-2}} =$$

$$= \left[\left(-2\int e^{-x}dx + C\right) e^{x}\right]^{-1} = \left[\left(2e^{-x} + C\right) e^{x}\right]^{-1} =$$

$$= (2 + Ce^{x})^{-1} = \frac{1}{Ce^{x}+2}$$

bo‘ladi. Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{1}{Ce^{x}+2}$$

bo‘ladi.$\rhd$

Eslatma. Bernulli tenglamasini yechishda uning umumiy yechimini ifodalovchi tayyor (5) formuladan foydalanish shart emas. Ba’zan berilgan tenglamada $z = y^{1-m}$ almashtirish bilan chiziqli tenglamaga keltirib yechish qulay bo‘ladi.

2-misol. Ushbu $y' - \dfrac{3}{x}y = -x^3y^2$ differensial tenglama yechilsin.

◁ Bu Bernulli tenglamasi bo‘lib, $p(x) = \dfrac{3}{x}$, $q(x) = -x^3$, $m = 2$ bo‘ladi. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini $-y^2$ ga bo‘lib,

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^3 \tag{6}$$

so‘ng $z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ almashtirish bajaramiz. Unda

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'$$

bo‘lib, (6) tenglama ushbu

$$z' + \frac{3}{x} z = x^3$$

chiziqli tenglamaga keladi.

Chiziqli tenglamaning umumiy yechimini (5) formulasidan foydalanib topamiz:

$$z = \left(\int x^3 e^{\int \frac{3}{x} dx} dx + C \right) e^{-\int \frac{3}{x} dx} = \left(\int x^3 e^{3 \ln |x|} dx + C \right) e^{-3 \ln |x|} =$$

$$= \left(\int x^3 |x|^3 dx + C \right) |x|^{-3} = \left(\frac{x^4 |x|^3}{7} + C \right) |x|^{-3} = \frac{x^4}{7} + \frac{C}{|x|^3}.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\frac{1}{y} = \frac{x^4}{7} + \frac{C}{|x|^3},$$

ya’ni

$$y = \frac{7|x|^3}{7C + x^4 |x|^3}$$

bo‘ladi.▷

Mashqlar

Quyidagi differensial tenglamalar yechilsin:

1. $y' - \dfrac{y}{x} = e^x y^2$;   2. $y' + xy = x^3 y^3$;
3. $y'(x^2 y^3 + xy) = 1$; 4. $y - y' \cos x = y^2 \cos x (1 - \sin x)$;

5. $(y\ln x-2)ydx=xdy$; 6. $xy'+y=-y^3e^{-x^2}$;
7. $x^2y'=y^2+xy$; 8. $x^2y^2y'+yx^3=1$;
9. $y'x+y=-xy^2$; 10. $y'+xy=xy^3$.

7-§. To‘liq differensialli tenglamalar

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglamada

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

ifoda biror $F(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lsa, (1) tenglama **to‘liq differensialli tenglama** deyiladi.

Quyida to‘liq differensialli tenglamaning umumiy yechimini topish bilan shug‘ullanamiz.

Modomiki, (1) to‘liq differensialli tenglama bo‘lar ekan, unda

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF(x,y)$$

bo‘lib, (1) tenglama ushbu

$$dF(x,y)=0 \tag{2}$$

ko‘rinishga keladi.

(2) tenglamadan

$$F(x,y)=C\ \ (C=const) \tag{3}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu berilgan to‘liq differensialli tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, aytaylik, (3) tenglik y ga nisbatan yechilgan deylik:

$$y=\varphi(x,C).$$

Unda, ravshanki,

$$F(x, y) = F(x, \varphi) \equiv C$$

bo‘ladi. Bu ayniyatni differensiallab topamiz:

$$F'_x(x, \varphi) + F'_y(x, \varphi)\varphi'(x) \equiv 0. \tag{4}$$

Ayni paytda

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$$

bo‘lgani uchun

$$F'_x = P(x, y), \ F'_y = Q(x, y)$$

bo‘ladi. Natijada (4) ayniyat quyidagi

$$P(x, \varphi)dx + Q(x, \varphi)d\varphi \equiv 0$$

ko‘rinishga keladi. Demak, $y = \varphi(x, C)$ berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimi, ya’ni $F(x, y) = C$ tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Masala, $F(x, y)$ funksiyani topishdan iborat. Bu funksiyani topishda

$$F'_x = P(x, y), \ \ F'_y = Q(x, y)$$

lar uchun bajariladigan quyidagi

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \tag{5}$$

tenglikdan foydalaniladi. ((5) tenglik,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ifoda $F(x, y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti bo‘ladi).

1-misol. Ushbu

$$\left(x^3 + 3xy^2\right) dx + \left(y^3 + 3x^2y\right) dy = 0$$

tenglama yechilsin.

$\triangleleft$ Avvalo bu tenglamani to‘liq differensialli tenglama bo‘lishini aniqlaymiz. Buning uchun

$$P(x,y) = x^3 + 3xy^2, \;\; Q(x,y) = y^3 + 3x^2y$$

funksiyalar (5) tenglikni qanoatlantirishini ko‘rsatamiz:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = (x^3 + 3xy^2)'_y = 6xy,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = (y^3 + 3x^2y)'_x = 6xy.$$

Demak, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Binobarin, berilgan tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘ladi:

$$dF(x,y) = (x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$F(x,y) = C \tag{6}$$

bo‘ladi.

$F(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha hosilasi

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = x^3 + 3xy^2. \tag{7}$$

y bo‘yicha hosilasi esa

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y^3 + 3x^2y \tag{8}$$

bo‘lishi lozim.

(7) tenglikni integrallab topamiz:

$$\int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int (x^3 + 3xy^2)dx + \varphi(y),$$

$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \varphi(y). \tag{9}$$

Bu funksiyaning y bo‘yicha hosilasi: bir tomonda (8) ga ko‘ra

$$\frac{\partial F}{\partial y}=y^3+3x^2y,$$

ikkinchi tomondan (9) ga ko‘ra

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{3}{2}x^2\cdot 2y+\varphi'(y)$$

bo‘ladi. Demak,

$$y^3+3x^2y=3x^2y+\varphi'(y).$$

Keyingi tenglikdan

$$\varphi'(y)=y^3$$

bo‘lib, undan

$$\varphi(y)=\frac{y^4}{4} \tag{10}$$

kelib chiqadi. (6), (9) va (10) munosabatlardan

$$F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C$$

bo‘lishini topamiz. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.▷

Har doim

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalarda tenglikning chap tomonidagi ifoda biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lavermaydi (bu holda tenglamani yuqoridagi usul bilan yechib bo‘lmaydi).

Ba’zi hollarda $\mu=\mu(x,y)$ funksiyani topish mumkinki, (1) tenglamani shu funksiyaga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$$

tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning to‘liq differensialiga aylanadi va tenglama to‘liq differensialli tenglamaga keladi:

$$dF(x,y)=\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0.$$

Odatda, bunday $\mu(x,y)$ funksiya **integrallovchi ko‘paytuvchi** deyiladi.

Faraz qilaylik,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama berilgan bo‘lib, uning chap tomonidagi ifoda biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lmasin. Masala, shu differensial tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisini topishdan iborat. Bu ancha murakkab masala bo‘lib, biz quyida sodda holda, ya’ni integrallovchi ko‘paytuvchi faqat x ga bog‘liq yoki faqat y ga bog‘liq bo‘lgan holda ularning mavjud bo‘lishi hamda topish formulalarini keltirish bilan kifoyalanamiz.

1) (1) tenglamaning faqat x ga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchining mavjud bo‘lishi uchun ushbu

$$\frac{1}{Q(x,y)} \cdot \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right)$$

funksiyaning faqat x ga bog‘liq bo‘lishi zarur va yetarli. Bunda

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q(x,y)} \cdot \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) dx}$$

bo‘ladi.

2) (1) tenglamaning faqat y ga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchining mavjud bo‘lishi uchun ushbu

$$\frac{1}{P(x,y)} \cdot \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right)$$

funksiyaning faqat y ga bog‘liq bo‘lishi zarur va yetarli.

Bunda

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{P(x,y)} \cdot \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dy}$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ tenglama yechilsin.

$\lhd$ Bu tenglamada $P(x,y)=x+y^2$, $Q(x,y)=-2xy$ bo‘lib,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-2y$$

bo‘ladi. $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, shu sababli berilgan tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘lmaydi. Yuqorida keltirilgan shartga ko‘ra

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)=\frac{1}{-2xy}(2y-(-2y))=-\frac{2}{x}$$

bo‘lgani uchun berilgan tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchisi mavjud bo‘lib, u

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{-2xy}(2y+2y)dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ifodaga ko‘paytirib ushbu

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=0$$

to‘liq differensial tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning chap tomonidagi ifoda uchun

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=\frac{1}{x}dx-\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=$$
$$=d\ln|x|-d\left(\frac{y^2}{x}\right)=d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)$$

bo‘ladi. Demak,

$$d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)=0.$$

Bu tenglama yechimi

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}=C.$$

Binobarin tenglamaning umumiy yechimi

$$x=Ce^{\frac{y^2}{x}}$$

bo‘ladi.

Mashqlar

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimi topilsin:

1. $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)dx = 0;$

2. $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy = 0;$ 3. $\left(x - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx+\frac{2y}{x^3}dy = 0;$

4. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0;$

5. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^2 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0;$

6. $(x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2ydy = 0.$

Quyidagi tenglamalarning integrallovchi ko‘paytuvchilari topilsin va tenglamalar yechilsin:

7. $y^2dx + (yx - 1)dy = 0;$ 8. $(x\sin y + y)dx + (x^2\cos y + x\ln x)dy = 0;$

9. $(\sin x + e^y)dx + \cos xdy = 0;$ 10. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$

8-§. Umumiy ko‘rinishda berilgan birinchi tartibli differensial tenglamalarning ba’zi xususiy hollari

Biz avvalgi paragraflarda umumiy ko‘rinishlardagi birinchi tartibli differensial tenglama

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ning y' ga nisbatan yechilgan ushbu

$$y' = f(x, y)$$

ko‘rinishdagi tenglamani qaradik. Bunda $f(x, y)$ funksiya maxsus ko‘rinishga ega bo‘lgan holidagi mos differensial tenglamalarni yechish bilan shug‘ullandik. Ko‘p hollarda differensial tenglamaning yechimlari oshkormas ko‘rinishda ifodalanadi (ma’lumki, agar

$$F(x, y) = 0$$

tenglama y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlasa va bu funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda

$$F(x, y) = 0$$

(1) tenglamaning oshkormas ko‘rinishdagi yechimi bo‘ladi).

Agar $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funksiyalar biror oraliqda uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo‘lib,

$$\Phi\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right) \equiv 0$$

bo‘lsa, u holda

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

sistema (1) tenglamaning parametrik ko‘rinishdagi yechimi bo‘ladi.

Endi (1) tenglamaning ba’zi xususiy hollarini keltiramiz.

1. (1) tenglamada x va y lar qatnashmasin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$\Phi(y') = 0$$

ko‘rinishga keladi. Agar $y' = a$, ($a = const$) deyilsa, unda $y = ax + C$ bo‘lib,

$$a = \frac{y - C}{x}.$$

Demak,

$$\Phi(y') = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi

$$\Phi\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

Misol. Ushbu

$$(y')^6 - 2(y')^2 + y' + 1 = 0$$

tenglamaning yechimi topilsin.

$\lhd$ Bu tenglamada

$$\Phi(y') = (y')^6 - 2(y')^2 + y' + 1$$

bo‘ladi. Yuqorida aytilganiga ko‘ra berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\Phi\left(\frac{y-C}{x}\right)=0,$$

ya’ni

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^6+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+\frac{y-C}{x}+1=0.$$

2. (1) tenglamada y qatnashmasin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$\Phi(x,y')=0$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimini topish uchun

$$x=\varphi(t), \quad y'=\psi(t)$$

deb olamiz. U holda

$$\frac{dy}{dx}=\psi(t),\ \ dy=\psi(t)dx,\ \ dy=\psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C$$

bo‘lib,

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C \end{cases}$$

sistema berilgan

$$\Phi(x,y')=0$$

tenglamaning parametrik ko‘rinishdagi yechimidir.

Misol. Ushbu

$$(y')^3-y'-x-1=0$$

tenglamaning yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Bu tenglamada t parametr sifatida y' ni olamiz: $t=y'$. U holda berilgan tenglamadan

$$x=t^3-t-1$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\frac{dy}{dx} = t, dy = tdx,$$
$$dy = td(t^3 - t - 1),$$
$$dy = (3t^3 - t)dt,$$
$$y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Natijada

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1 \\ y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + C \end{cases}$$

sistema hosil bo‘ladi. Bu $\Phi(x, y') = 0$ tenglamaning parametrik ko‘rinishdagi yechimi bo‘ladi.$\triangleright$

3. (3) tenglamada x qatnashmasin. Bu holda (1) tenglama

$$\Phi(y, y') = 0$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tenglamaning umumiy yechimini topish uchun

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

deb olamiz. U holda

$$\frac{dy}{dx} = \psi(t), \; \frac{dy}{\psi(t)} = dx$$
$$dx = \frac{d\psi(t)}{\psi(t)}, \; dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)},$$
$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C$$

bo‘ladi. Natijada

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

sistema hosil bo‘ladi. Bu

$$\Phi(y, y') = 0$$

tenglamaning parametrik ko'rinishidagi yechimi bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$(y')^5 + (y')^3 + y' - y + 5 = 0$$

tenglamaning yechimi topilsin.

$\lhd$ Bu tenglamada t parametr sifatida y' ni olamiz: $t = y'$.

Unda berilgan tenglamadan

$$y = t^5 + t^3 + t + 5$$

bo'lishini topamiz.

Ravshanki,

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy}{y'} = dx$$

$$\frac{d(t^5 + t^3 + t + 5)}{t} = dx, \quad dx = \frac{5t^4 + 3t^2 + 1}{t} dt,$$

$$x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + ln|t| + C$$

bo'ladi. Natijada

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + ln|t| + C \\ y = t^5 + t^3 + t + 5 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Bu berilgan tenglamaninig parametrik ko'rinishdagi yechimi bo'ladi.$\rhd$

9-§. Umumiy ko'rinishdagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Bunda, x – erkli o'zgaruvchi, $y = y(x)$ – noma'lum funksiya, y' va y'' lar esa – noma'lum funksiyalarning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari.

Masalan, ushbu

$$yy'' + y'^2 = 0, \quad y'' = \frac{lnx}{x}, \quad y'' - 3y' - 2y = 4x^2$$

tenglamalar ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo‘ladi.

Aytaylik, $\varphi(x)$ funksiya biror oraliqda uzluksiz bo‘lib, u shu oraliqda uzluksiz $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin.

Ma’lumki, agar (1) tenglamadagi y ning o‘rniga $\varphi(x)$, y' ning o‘rniga $\varphi'(x)$, y'' ning o‘rniga $\varphi''(x)$ qo‘yilganda (1) tenglama ayniyatga aylansa:

$$\Phi(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \equiv 0$$

$\varphi(x)$ funksiya (1) differensial tenglamaning **yechimi** deyiladi. Masalan,

$$yy'' + y'^2 = 0 \tag{2}$$

tenglamaning yechimi $\varphi(x) = e^x$ bo‘ladi. Chunki,

$$\varphi(x) = e^x, \;\; \varphi'(x) = (e^x)' = e^x, \;\; \varphi''(x) = (e^x)'' = e^x$$

lar (2) tenglamaga qo‘yilsa, (2) tenglama ayniyatga aylanadi:

$$e^x \cdot e^x - (e^x)^2 = 0.$$

Misol. Ushbu $y'' = xe^x$ differensial tenglamaning yechimi topilsin.

$\lhd$ Bu tenglamani

$$\frac{dy'}{dx} = xe^x,$$

ya’ni $dy' = xe^x dx$ ko‘rinishda yozib, so‘ng uning har ikki tomonini integrallab topamiz:

$$y' = \int xe^x dx$$

$(u = x, du = dx,\ dv = e^x dx, v = e^x)$,

$$y' = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_1.$$

Bunda, C_1 – ixtiyoriy o‘zgarmas. Demak,

$$y' = xe^x - e^x + C_1.$$

Bu tenglamani

$$dy = (xe^x - e^x + C_1)dx$$

shaklda yozib, so‘ng uning har ikki tomonini integrallab topamiz:

$$\int dy = \int (xe^x - e^x + C_1)dx,$$

$$y = \int xe^x dx - \int e^x dx + \int C_1 dx = xe^x - e^x - e^x + C_1 x + C_2.$$

Bunda, C_2 – ixtiyoriy o‘zgarmas. Demak,

$$y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2 = (x-2)e^x + C_1 x + C_2$$

funksiya berilgan differensial tenglamaning yechimi bo‘ladi.$\triangleright$

Odatda, bunday yechimni differensial tenglamaning umumiy yechimi deyiladi. C_1 va C_2 larning tayin qiymatlardagi yechim esa tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Umuman, (1) ko‘rinishdagi differensial tenglamaning umumiy yechimi ikkita ixtiyoriy o‘zgarmaslarga bog‘liq va u ushbu

$$y = \varphi(x, C_1, C_2)$$

yoki

$$\psi(x, C_1, C_2) = 0$$

oshkormas ko‘rinishda ifodalanadi. Amaliy masalalarda differensial tenglamaning shunday yechimini topish kerak bo‘ladiki, bu yechim uchun ma’lum shartlarning bajarishi talab etiladi. Jumladan, (1) tenglamaning ushbu

$$x = x_0, \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0' \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etiladi.

Odatda, (3) shart **boshlang‘ich shart**, shu shartni qanoatlantiruvchi yechimni topish masalasi esa **Koshi masalasi** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$y'' = xe^x$$

differensial tenglamaning $x = 2$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$ boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$\lhd$ Yuqorida ko‘rdikki, bu differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (x-2)e^x + C_1x + C_2$$

bo‘ladi. Bu yechimdagi C_1 va C_2 larni boshlang‘ich shartdan foydalanib topamiz. Ravshanki,

$$y(2) = (2-2)e^2 + C_1 \cdot 2 + C_2 = 0, 2C_1 + C_2 = 0$$

va

$$y'(x) = e^x + (x-2)e^x + C_1$$

bo‘lgani uchun

$$y'(2) = e^2 + (2-2)e^2 + C^1 = 1, C_1 = 1 - e^2.$$

Demak,

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 = 1 - e^2. \end{cases}$$

Bundan,

$$C_2 = -2C_1 = -2 + 2e^2$$

kelib chiqadi. Topilgan C_1 va C_2 larni (5) ga qo‘yib boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimning

$$y = (x-2)e^x + (1-e^2)x + 2e^2 - 2 = (e^x - e^2 + 1)x + 2(e^2 - 1)$$

bo‘lishini topamiz.$\rhd$

10-§. Ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Koʻp hollarda umumiy koʻrinishga ega boʻlgan ushbu

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

differensial tenglamaning ikkinchi tartibli hosila y'' ga nisbatan yechilgan quyidagi

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

differensial tenglama qaraladi. Odatda (1) tenglama yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglama deb ham yuritiladi.

(1) tenglama uchun tenglamaning yechimi (umumiy va xususiy yechimlar), boshlangʻich shart, Koshi masalasi, tushunchalari 9-§ da keltirilgan tushunchalar kabi kiritiladi.

(1) koʻrinishdagi differensial tenglama yechimining mavjudligi hamda yagonaligini ifodalovchi teoremalar differensial tenglamalar nazariyasini kengroq bayon etilgan adabiyotlarda keltirilgan (qaralsin [4]). (1) koʻrinishdagi tenglamani umumiy holda yechish murakkab, hatto yechib ham boʻlmaydi (ya'ni aniqmas integral amalini qoʻllash yordamida yechib boʻlmaydi).

Quyida, (1) tenglamani ba'zi sodda hollari uchun aniqmas integrallash amalini qoʻllash bilan yechishni va yechish usullarini keltiramiz.

1. (1) tenglamaning oʻng tomonidagi funksiya faqat x ga bogʻliq boʻlsin. Bu holda (1)quyidagi koʻrishga ega boʻladi:

$$y'' = f(x) \tag{2}$$

Ma'lumki

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}.$$

Shuning uchun (2) tenglama y' ga nisbatan birinchi tartibli ushbu

$$\frac{dy'}{dx} = f(x),$$

ya'ni $dy' = f(x)dx$ tenglamaga keladi. Aniqmas integral amalini qo‘llab oxirgi tenglamani yechamiz:

$$\int dy' = \int f(x)dx, y' = \int f(x)dx + C_1, \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right) dx, \quad \int dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right) dx,$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx\right) dx + C_1 x + C_2$$

bunda C_1, C_2 lar – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Shunday qilib

$$y'' = f(x)$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \int \left(\int f(x)dx\right) dx + C_1 x + C_2$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu $y'' = \cos x$ tenglama yechilsin.

$\lhd$ Tenglamaning yechimini ketma-ket integrallash bilan topamiz:

$$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1,$$

$$y = \int (\sin x + C_1)dx = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

2. (1) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya faqat y ga bog‘liq bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y'' = f(y) \tag{3}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu tenglamani yechish uchun $y' = p$ deb qaraymiz, bu yerda p funksiya y ning funksiyasi: $p = p(y)$.

U holda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

bo‘lib, (3) tenglama quyidagi ko‘rishga keladi:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y).$$

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir:

$$pdp = f(y)dy.$$

Integrallab

$$\int pdp = \int f(y)dy, \quad \frac{p^2}{2} = \int f(y)dy + C_1,$$

ya’ni

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}$$

bo‘lishini topamiz.

Ayni paytda

$$p = \frac{dy}{dx}$$

bo‘lib,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1},$$

ya’ni

$$dy = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1} \cdot dx$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}} = \pm dx.$$

Keyingi tenglikni integrallash natijasida

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}} = \pm(x + C_2)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, (3) tenglama yechimi

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + 2C_1}} = \pm(x + C_2)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$y'' = \frac{1}{y^3}$$

tenglama yechilsin.

$\lhd$ Bu tenglamada $y' = p$ deb topamiz:

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

U holda berilgan tenglama

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y^3},$$

ya’ni

$$pdp = \frac{1}{y^3}dy$$

ko‘rinishni oladi. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lib, uni integrallab topamiz:

$$\int pdp = \int y^{-3}dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^{-2}}{-2} + C_1,$$

$$p = \pm\sqrt{2C_1 - y^{-2}} = \pm\frac{\sqrt{2C_1y^2 - 1}}{y}.$$

Ma’lumki,

$$p = \frac{dy}{dx},$$

demak,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{2C_1y^2-1}}{y},$$

ya'ni

$$\frac{ydy}{\sqrt{2C_1y^2-1}} = \pm dx.$$

Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int \frac{2C_1ydy}{\sqrt{2C_1y^2-1}} = \pm\int 2C_1dx = \pm(2C_1x + C_2).$$

Endi bu tenglikning chap tomonidagi integralni hisoblaymiz: $2C_1y^2 - 1 = t$ belgilash kiritsak, $4C_1ydy = dt$, $2C_1ydy = \frac{1}{2}dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{2C_1ydy}{\sqrt{2C_1y^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{2C_1y^2-1}.$$

Natijada

$$\sqrt{2C_1y^2-1} = \pm(2C_1x + C_2)$$

bo‘ladi. Bundan

$$2C_1y^2 - 1 = (2C_1x + C_2)^2$$

kelib chiqadi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.▷

3. (1) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya faqat y' ga bog‘liq bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y'' = f(y') \tag{4}$$

ko‘rishda bo‘ladi.

(4) tenglamada

$$y' = p \quad (p = p(x))$$

desak,

$$y'' = (y')' = \frac{dp}{dx}$$

bo‘lib, (4) tenglama ushbu

$$\frac{dp}{dx} = f(p),$$

ya'ni
$$\frac{dp}{f(p)} = dx$$
ko'rinishga keladi. Uni integrallab topamiz:
$$\int \frac{dp}{f(p)} = \int dx,$$
$$\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1.$$

Aytaylik, bu tenglamadan p topilgan bo'lsin:
$$p = \varphi(x, C_1).$$
U holda
$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$$
bo'lib, uning yechimi
$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$
bo'ladi. Bu (4) tenglamaning yechimini ifodalaydi.

Misol. Ushbu
$$y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$$
differensial tenglama yechilsin.

$\lhd$ Agar bu tenglamada $y' = p$ $(p = p(x))$ deyilsa, $y'' = p'$ bo'lib, berilgan tenglama ushbu
$$p' = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}},$$
ya'ni
$$\frac{dp}{dx} = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}$$
ko'rinishga keladi. Bu tenglamani yechamiz:
$$\frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = dx,$$
$$\int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = x + C_1.$$

Ravshanki,

$$d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{\sqrt{1+p^2} - p\frac{1}{2\sqrt{1+p^2}}2p}{1+p^2}dp = \frac{1+p^2-p^2}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demak,

$$\int d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = x + C_1,$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = x + C_1.$$

Endi $p = y'$ ekanini e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + C_1,$$

$$y' = \frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}},$$

$$dy = \frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}}dx$$

Bu tenglikni integrallasak, u holda

$$y + C_2 = \int \frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}}dx = \pm\int d(\sqrt{1-(x+C_1)^2}) =$$

$$= \pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}$$

bo‘lib,

$$(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = 1$$

bo‘ladi. Demak berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2 = 1.$$

4. (1) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya y va y' larga bog‘liq bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y'' = f(y, y') \tag{5}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar (5) tenglamada

$$y' = p \ (p = p(y))$$

deyilsa, unda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

bo‘lib, (5) tenglama quyidagi

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

birinchi tartibli differensial tenglamaga keladi. Bu tenglamani yechib (agar u yechiladigan bo‘lsa) qaralayotgan (5) tenglamaning umumiy yechimi topiladi.

Misol. Ushbu

$$\frac{y''}{y'} = ae^y$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Agar bu tenglamada $y' = p \ (p = p(y))$ deyilsa, unda

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

bo‘lib, berilgan tenglama ushbu

$$\frac{dp}{dy} = ae^y,$$

ya’ni

$$dp = ae^y dy$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglikni integrallab topamiz:

$$\int dp = \int ae^y dy,$$

$$p = ae^y + C_1.$$

Endi $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$ ekanini e’tiborga olsak, keyingi tenglama quyidagichadir:

$$\frac{dy}{dx} = ae^y + C_1$$

$$dy = (ae^y + C_1)dx,$$
$$\frac{dy}{ae^y + C_1} = dx.$$

Bu differensial tenglamani yechamiz:

$$\int dx = \int \frac{dy}{ae^y + C_1},$$

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{ae^y + C_1} = \int \frac{dy}{e^y(a + C_1e^{-y})} = \int \frac{e^{-y}dy}{a + C_1e^{-y}} =$$
$$= -\frac{1}{C_1}\int \frac{-C_1e^{-y}dy}{a + C_1e^{-y}} = -\frac{1}{C_1}\int d(\ln(a + C_1e^{-y})) = -\frac{1}{C_1}\ln(a + C_1e^{-y}).$$

Demak,

$$x + C_2 = -\frac{1}{C_1}\ln(a + C_1e^{-y})$$

berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.$\triangleright$

5. (1) tenglamaning o‘ng tomonidagi funksiya x va y' larga bog‘liq bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama ushbu

$$y'' = f(x, y') \tag{6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

(6) tenglamada $y' = p$ $(p = p(x))$ deyilsa, unda

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

bo‘lib, (6) tenglama quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamaga keladi:

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Bu tenglamani yechib (agar u yechiladigan bo‘lsa) qaralayotgan (6) tenglamaning umumiy yechimi topiladi.

Misol. Ushbu

$$y'' = \frac{1}{x}y' - x^3$$

tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Berilgan tenglamada $y' = p$ deyilsa, unda $y'' = p'$ bo‘lib, tenglama quyidagi

$$p' - \frac{1}{x}p + x^3 = 0$$

ko‘rinishga keladi. Bu birinchi tartibli chiziqli tenglamadir. Uni yechib topamiz:

$$p = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C_1 - \int x^3 e^{-\int \frac{dx}{x}} \right) = C_1 e^{\ln x} - e^{\ln x} \int x^3 e^{-\ln x} dx =$$

$$= C_1 x - x \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = C_1 x - x \cdot \frac{x^3}{3} = C_1 x - \frac{x^4}{3}.$$

Demak,

$$p = \frac{dy}{dx} = C_1 x - \frac{x^4}{3}.$$

Bu tenglamani yechsak, unda

$$y = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{15} + C_2$$

bo‘ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimidir.$\rhd$

Eslatma. Yuqorida

$$y'' = f(x, y, y')$$

differensial tenglamani ba’zi xususiy hollarini 1 - 5 bandlarda qaradik va ularni yechish usullarini keltirdik. Bunda differensial tenglamaning umumiy yechimlari aniqmas integrallar orqali murakkab formulalar bilan ifodalanadi. Bu formulalarni yodlashga xojat bo‘lmasa kerak. Tenglamalarning yechish usullarini o‘zlashtirish yetarli.

11-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

1. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama tushunchasi.

Noma'lum funksiya $y = y(x)$ va uning $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ hosilalari qatnashgan ushbu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

tenglama **ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama** deyiladi. Bunda $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar biror oraliqda uzluksiz bo'lib, ular (1) tenglamaning koeffitsiyentlari deyiladi. Masalan,

$$y'' - \frac{y'}{x} + xy = 0,$$

$$y'' - 2xy' - 2y = 0,$$

$$y'' - \frac{1}{\sqrt{x}}y' + \left(x + \sqrt{x}\right) y = 0$$

tenglamalar ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalardir.

Misol. Ushbu $y = e^{x^2}$ funksiya quyidagi

$$y'' - 2xy' - 2y = 0 \tag{2}$$

tenglamaning yechimi bo'lishi ko'rsatilsin.

$\lhd$ Ravshanki, $y = e^{x^2}$ uchun

$$y' = 2xe^{x^2}, y'' = (2xe^{x^2})' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}.$$

Bu y, y', y'' larning ifodalaridan foydalanib

$$y'' - 2xy' - 2y$$

ni hisoblaymiz:

$$2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2x \cdot 2xe^{x^2} - 2 \cdot e^{x^2} \equiv 0.$$

Demak, $y = e^{x^2}$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo'ladi.$\rhd$

2. Muhim tasdiqlar. (1) tenglamaning umumiy yechimi

Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning yechimlari haqida ba'zi ma'lumotlarni keltiramiz. Ular tenglamaning umumiy yechimini topishda muhim rol o'ynaydi.

Ushbu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

tenglamani qaraylik

1-tasdiq. Agar $\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lib, C – o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda

$$F(x) = C\varphi(x) \tag{2}$$

ham (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lsin. U holda

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi(x) + q(x)\varphi(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Ravshanki,

$$F(x) = C\varphi(x), \;\; F'(x) = C\varphi'(x), \;\; F''(x) = C\varphi''(x),$$

ular uchun

$$F''(x) + p(x)F'(x) + q(x)F(x) = C(\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x)).$$

Yuqoridagi (3) munosabatdan foydalanib

$$F''(x) + p(x)F'(x) + q(x)F(x) \equiv 0$$

bo‘lishni topamiz. Bu esa $F(x) = C\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanini bildiradi.$\rhd$

2-tasdiq. Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda $F(x) = \varphi(x)+\psi(x)$ funksiya ham (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

$\lhd$ $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimi bo‘lgani uchun

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) \equiv 0$$

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x) \equiv 0. \tag{4}$$

Ravshanki, $F(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $F'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)$, $F''(x)=\varphi''(x)+\psi''(x)$ lar uchun

$$F''(x)+p(x)F'(x)+q(x)F(x)=(\varphi''(x)+\psi''(x))+p(x)(\varphi'(x)+\psi'(x))+$$
$$+q(x)(\varphi(x)+\psi(x))=(\varphi''(x)+p(x)\varphi'(x)+q(x)\varphi(x))+$$
$$+(\psi''(x)+p(x)\psi'(x)+q(x)\psi(x))$$

bo‘ladi. (4) munosabatlardan foydalanib

$$F''(x)+p(x)F'(x)+q(x)F(x)\equiv 0$$

bo‘lishini topamiz. Bu esa $F(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligini bildiradi.$\rhd$

Ta’rif. Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning nisbati o‘zgarmas songa teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\neq const$$

bo‘lsa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ chiziqli erkli (chiziqli bog‘liq bo‘lmagan) funksiyalar deyiladi.

Teorema. Agar $y_1=y_1(x)$ va $y_2=y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli bo‘lib, ular (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 $-$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

$\lhd$ Aytaylik, $y_1=y_1(x)$ va $y_2=y_2(x)$ lar

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

tenglamaning yechimlari bo‘lsin. Unda 1 va 2-tasdiqlarga ko‘ra C_1y_1 va C_2y_2 lar ham shu tenglama yechimidir. Modomiki,

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

yechim ikkita ixtiyoriy o‘zgarmas C_1 va C_2 larga bog‘liq va qaralayotgan differensial tenglamaning tartibi 2 ga teng ekan, unda bu yechim berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.$\triangleright$

Misol. Ushbu

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0 \ \ (x \neq 1) \tag{5}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Ravshanki, $y_1 = y_1(x) = e^x$, $y_1' = e^x$, $y_1'' = e^x$ va $y_2 = y_2(x) = x$, $y_2' = 1$, $y_2'' = 0$ lar uchun (5) tenglamaning chap tomonidagi ifoda aynan nolga teng:

$$e^x - \frac{x}{x-1}e^x + \frac{1}{x-1}e^x = e^x\left(1 - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) = e^x\frac{x-1-x+1}{x-1} \equiv 0,$$

$$0 - \frac{x}{x-1}1 + \frac{1}{x-1}x = -\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1} \equiv 0.$$

Demak, $y_1 = e^x$, $y_2 = x$ funksiyalar (5) tenglamaning yechimlari. Ayni paytda

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{x} \neq const$$

bo‘lgani uchun bu yechimlar chiziqli erkli bo‘ladi. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1e^x + C_2x$$

ni topamiz, bunda C_1 va C_2 ixtiyoriy o‘zgarmas.$\triangleright$

3. (1) tenglamaning umumiy yechimi haqida ba’zi tasdiqlar.

Endi ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

ning umumiy yechimi haqida ikkita tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

3-tasdiq. Agar $y_1 = y_1(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda tenglamani yechish quyidagi

$$y = y_1z \quad (y(x) = y_1(x)z(x))$$

almashtirish bilan ushbu

$$y_1 u' + (2y_1' + p(x)y_1)u = 0$$

birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keladi, bunda

$$u = z' \quad \left(z = \int u(x)dx\right).$$

4-tasdiq. Agar $y_1 = y_1(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda shu yechim bilan chiziqli erkli ikkinchi yechim ushbu

$$y_2 = y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

formula bilan topiladi.

Misol. Agar

$$y_1 = y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$$

funksiya ushbu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \tag{7}$$

tenglamaning yechimi bo‘lsa, (7) tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Berilgan tenglamada

$$y = y_1 \int u dx$$

almashtirib bajaramiz, bunda $u = u(x)$ noma’lum funksiya. Bu funksiyaning hosilalarini hisoblaymiz.

$$y' = \left(y_1 \int u dx\right)' = \left(\frac{\sin x}{x} \int u dx\right)' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' \int u dx +$$

$$+ \frac{\sin x}{x} \left(\int u dx\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \int u dx + \frac{\sin x}{x} u,$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \int u dx + \frac{\sin x}{x} u\right)' =$$

$$= \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)' \int u dx + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \left(\int u dx\right)' + \left(\frac{\sin x}{x}\right)' u +$$

$$+\frac{\sin x}{x}u' = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}\int udx + 2\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}u + \frac{\sin x}{x}u'.$$

Bu qiymatlarni (7) tenglamadagi y, y', y'' larning o‘rniga qo‘yib topamiz.

$$-\frac{\sin x}{x}\int udx - 2\frac{\cos x}{x^2}\int udx + 2\frac{\sin x}{x^3}\int udx + 2\frac{\cos x}{x}u - \frac{\sin x}{x^2}u + \frac{\sin x}{x}u' +$$

$$+\frac{2}{x}\left(\frac{\cos x}{x}\int udx - \frac{\sin x}{x^2}\int udx + \frac{\sin x}{x}u\right) + \frac{\sin x}{x}\int udx = 0.$$

Oxirgi tenglikning chap tomonidagi o‘xshash hadlarni ixchamlash natijasida

$$2\frac{\cos x}{x}u + \frac{\sin x}{x}u'$$

ifoda hosil bo‘ladi. Demak,

$$2\frac{\cos x}{x}u + \frac{\sin x}{x}u' = 0.$$

Bu birinchi tartibli differensial tenglamani yechib, u ni topamiz.

$$\frac{du}{dx} = -2\frac{\cos x}{\sin x}u, \quad \int\frac{du}{u} = -2\int\frac{\cos x}{\sin x}dx = -2\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\ln|u| = -2\ln|\sin x| + \ln C_1,$$

$$u = \frac{C_1}{\sin^2 x}.$$

Endi

$$y = \frac{\sin x}{x}\int udx$$

ekanini e’tiborga olsak, unda

$$y = \frac{\sin x}{x}\int udx = \frac{\sin x}{x}\int\frac{C_1}{\sin^2 x}dx = C_1\frac{\sin x}{x}(-\operatorname{ctg} x + C_2) =$$

$$= C_2\frac{\sin x}{x} - C_1\frac{\cos x}{x}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_2\frac{\sin x}{x} - C_1\frac{\cos x}{x}. \triangleright$$

12-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar

11-§ dagi o‘rganilgan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tenglamada uning koeffitsiyentlari $p(x)$ va $q(x)$ lar o‘zgarmas sonlar bo‘lsin:

$$p(x) = a, \quad q(x) = b.$$

Bu holda ushbu

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

tenglamaga kelamiz. Ravshanki, bu tenglama 11-§ da o‘rganilgan tenglamaning xususiy holi bo‘ladi.

Odatda, (1) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglama deyiladi.

Ma’lumki, (1) tenglamaning ikkita yechimlari (xususiy yechimlari) topilib, ularning chiziqli erkli bo‘lishi ko‘rsatilsa, unda 11-§ da keltirilgan teoremadan foydalanib, (1) tenglamaning umumiy yechimini topish mumkin.

(1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y = e^{kx}$$

ko‘rinishda izlaymiz, bunda k – o‘zgarmas (noma’lum) son.

Ravshanki,

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}.$$

Bu qiymatlarni (1) tenglamadagi y, y', y'' lar o‘rniga qo‘yib topamiz:

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) = 0,$$

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{2}$$

Natijada noma'lum k ni topish uchun kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Bu (2) kvadrat tenglama (1) differensial tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi.

Demak, xarakteristik tenglamaning ildizlariga ko'ra (1) differensial tenglamaning xususiy yechimlari topiladi. (2) xarakteristik tenglamani yechib topamiz:

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Bunda uchta hol ro'y beradi:

1-hol. Agar

$$\frac{a^2}{4} - b > 0$$

bo'lsa, (2) tenglama 2 ta turli haqiqiy k_1 va k_2 ildizlariga ega bo'ladi. Bu ildizlarga mos (1) tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x} \quad (k_1 \neq k_2),$$

ular uchun

$$\frac{y_1}{y_2} \neq const.$$

Demak, bu holda 11-§ da keltirilgan teoremaga ko'ra (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

topiladi, bunda C_1, C_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Misol. Ushbu

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Avvalo berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzib, uning

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

ekanini topamiz. Bu kvadrat tenglamaning ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Demak, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \triangleright$$

2-hol. Agar

$$\frac{a^2}{4} - b = 0$$

bo‘lsa, (2) tenglama yagona ildiz

$$k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}$$

ga ega (odatda bunday ildizni karrali ildiz deyiladi). Bu ildizga mos (1) tenglamaning xususiy yechimi

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Bu (1) tenglamaning bitta xususiy yechimi qaralayotgan differensial tenglamaning ikkinchi xususiy yechimini 11-§ da keltirilgan

$$y_2 = y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx \tag{8}$$

formuladan foydalanib topamiz. Agar bu holda

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x} = e^{k_1 x},\ p(x) = a, a = -2k_1\ \text{(chunki, } k_1 = -\frac{a}{2})$$

ekanini e’tiborga olsak, unda (8) ga binoan

$$y_2 = e^{k_1 x} \int \frac{e^{-\int (-2k_1)dx}}{e^{2k_1 x}} dx = e^{k_1 x} \int \frac{e^{2k_1}}{e^{2k_1 x}} dx = e^{k_1 x} x$$

kelib chiqadi. (1) tenglamaning

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_1 x}$$

xususiy yechimlari chiziqli erkli yechimlar bo‘ladi. Demak, qaralayotgan holda

$$y'' + ay' + by = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} \quad (k_1 = -\frac{a}{2}).$$

Misol. Ushbu

$$y'' - 10y' + 25y = 0 \tag{9}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

◁ Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 10k + 25 = 0$$

bo‘lib, uning ildizi $k_1 = k_2 = 5$. Unda (9) tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = xe^{5x}$$

ga teng. Demak, (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$$

bo‘ladi.▷

3-hol. Agar

$$\frac{a^2}{4} - b < 0$$

bo‘lsa, u holda

$$k^2 + ak + b = 0$$

xarakteristik tenglama ikkita qo‘shma kompleks

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

ildizlariga ega. Bu ildizlarni

$$k_1 = \alpha + \beta i, \;\; k_2 = \alpha - \beta i \;\; (i = \sqrt{-1}), \;\; \beta \neq 0$$

deylik, bu yerda

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Xarakteristik tenglamaning $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ ildizlariga

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

tenglamaning ushbu

$$\overline{y_1} = e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad \overline{y_2} = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

xususiy yechimlari to‘g‘ri keladi.

11-§ da keltirilgan 1 va 2 tasdiqlarga ko‘ra

$$y_1 = \frac{1}{2}(\overline{y_1} + \overline{y_2}), \quad y_2 = \frac{1}{2i}(\overline{y_1} - \overline{y_2})$$

funksiyalar ham (1) differensial tenglamaning yechimlari bo‘ladi.

Endi ushbu

$$e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$$

Eyler formulasidan foydalanib topamiz:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{y_1} + \overline{y_2}\right) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}) = \frac{1}{2}(e^{\alpha x}e^{i\beta x} + e^{\alpha x}e^{-i\beta x}) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\alpha x}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x+\cos\beta x-i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}(\overline{y_1} - \overline{y_2}) = \frac{1}{2i}(e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}) = \frac{1}{2i}(e^{\alpha x}e^{i\beta x} - e^{\alpha x}e^{-i\beta x}) =$$

$$= \frac{1}{2i}e^{\alpha x}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}) = \frac{1}{2i}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x-\cos\beta x+i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Shunday qilib, (1) differensial tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

topiladi. Bu xususiy yechimlar chiziqli erklidir. Demak, bu holda (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Ravshanki, berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 6k + 25 = 0$$

bo‘ladi. Bu tenglamani yechib, topamiz:

$$k_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 25} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm 4i,$$

$$k_1 = 3 + 4i, \quad k_2 = 3 - 4i.$$

Demak, $\alpha = 3$, $\beta = 4$ bo‘lib, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x). \rhd$$

Mashqlar

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimi topilsin:

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$; 2. $y'' + 2y' + 5y = 0$; 3. $y'' + 25y = 0$;
4. $y''' + y = 0$; 5. $y^{(IV)} + y'' - 2y = 0$; 6. $y'' - 3y + 2y = 0$;
7. $y'' + 5y' + 6y = 0$; 8. $y'' - 5y' - 6y = 0$; 9. $y'' + y = 0$; 10. $y''' + 27y = 0$.

13-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

1. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi.

Ma’lumki, ushbu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

differensial tenglama ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama deyiladi, bu holda $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ biror oraliqda berilgan va uzluksiz funksiyalar.

Quyidagi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

tenglama esa, ($f(x) \equiv 0$ bo‘lgan hol) (1) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Aytaylik,

$$y_1 = y_1(x) \quad (y_1(x) \neq 0)$$

funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lsin:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0. \tag{3}$$

(1) tenglamada

$$y = y_1 z \quad (z = z(x))$$

almashtirish bajaramiz. U holda

$$y' = y_1' z + y_1 z', \;\; y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$

bo‘lib, ularni (1) tenglamadagi y, y', y'' larning o‘rniga qo‘yish natijasida ushbu

$$y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + p(x)(y_1' z + y_1 z') + q(x)y_1 z = f(x),$$

ya’ni

$$y_1 z'' + z'(2y_1' + p(x)y_1) + z(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) = f(x)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglikning chap tomonidagi ikkinchi qavs ichidagi ifoda (3) ga ko‘ra aynan 0 ga teng. Shuning uchun keyingi tenglama quyidagi

$$y_1 z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' = f(x) \tag{4}$$

ko'rinishga keladi.

Endi (4) tenglamada

$$u = z', \quad u' = z''$$

deyilsa, natijada $u = u(x)$ ga nisbatan

$$y_1 u' + (2y_1' + p(x)y_1)u = f(x) \tag{5}$$

chiziqli tenglama hosil bo'ladi.

Demak, ikkinchi tartibli chiziqli (1) tenglamani yechish, birinchi tartibli chiziqli tenglama (5) ni yechishga keldi.

Ma'lumki, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$u' + \varphi(x)u + \psi(x) = 0$$

ning umumiy yechimi

$$u = e^{-\int \varphi(x)dx}\left(C - \int \psi(x)e^{\int \varphi(x)dx}\right).$$

Shu formuladan foydalanib (5) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$u = e^{-\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}\left(C_1 + \int \frac{f(x)}{y_1}e^{\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}dx\right).$$

Bu tenglik va

$$z' = u$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$z = C_1 \int e^{-\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}dx + \int \left[e^{-\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx} \int \frac{f(x)}{y_1}e^{\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}dx\right]dx + C_2$$

kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$y = y_1 z.$$

Oxirgi ikki tenglikdan foydalanib topamiz:

$$y = C_1 y_1 \int e^{-\int \frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}dx +$$

$$+y_1\int\left[e^{-\int\frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}\int\frac{f(x)}{y_1}e^{\int\frac{2y_1'+p(x)y_1}{y_1}dx}dx\right]dx+C_2y_1. \qquad (6)$$

Shunday qilib,

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

bir jinsli tenglamaning bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, unda

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi (6) formula yordamida topiladi.

Misol. Ushbu

$$y''-2xy'-2y=2$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Bu tenglamaning bir jinsli tenglamasi

$$y''-2xy'-2y=0$$

bo'lib,

$$y_1=e^{x^2}$$

funksiya uning xususiy yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$y_1=e^{x^2},\quad y_1'=2xe^{x^2},\quad y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$$

uchun ushbu

$$y_1''-2xy_1'-2y_1$$

ifoda qiymati

$$2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2x2xe^{x^2}-2e^{x^2}\equiv 0.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi (6) formulaga ko'ra

$$y=C_1e^{x^2}\int e^{-\int\frac{2\cdot 2xe^{x^2}-2xe^{x^2}}{e^{x^2}}dx}dx+$$

$$+e^{x^2}\int\left[e^{-\int\frac{2\cdot 2xe^{x^2}-2xe^{x^2}}{e^{x^2}}dx}dx\int\frac{2}{e^{x^2}}e^{\int\frac{2\cdot 2xe^{x^2}-2xe^{x^2}}{e^{x^2}}dx}dx\right]dx+C_2e^{x^2}=$$

$$= C_1 e^{x^2} \int e^{-x^2} dx + C_2 e^{x^2} + e^{x^2} \int \left[e^{-x^2} 2x \right] dx =$$

$$= e^{x^2} \left(C_1 \int e^{-x^2} dx + C_2 \right) - 1$$

bo‘ladi.$\triangleright$

Qaralayotgan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

ning umumiy yechimini quyidagicha ham topish mumkin.

Tasdiq. Agar $\overline{y} = \overline{y}(x)$ funksiya (1) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lib, $y_0 = y_0(x)$ esa

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo‘lsa, u holda

$$y = \overline{y} + y_0$$

funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

$\triangleleft$ Shartga ko‘ra

$$\overline{y}'' + p(x)\overline{y}' + q(x)\overline{y} \equiv f(x),$$

$$y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 \equiv 0. \tag{7}$$

Endi

$$y = \overline{y} + y_0, \quad y' = \overline{y}' + y_0', \quad y'' = \overline{y}'' + y_0''$$

larni (1) tenglamaning chap tomonidagi y, y', y'' lar o‘rniga qo‘ysak, u holda (1) tenglama chap tomonidagi ifoda ushbu

$$\overline{y}'' + y_0'' + p(x)(\overline{y}' + y_0') + q(x)(\overline{y} + y_0) =$$

$$= (\overline{y}'' + p(x)\overline{y}' + q(x)\overline{y}) + (y_0'' p(x)y_0' + q(x)y_0)$$

ko'rinishga keladi va u (7) munosabatga ko'ra

$$f(x) + 0$$

ga teng bo'ladi. Demak,

$$(\overline{y} + y_0)'' + p(x)(\overline{y} + y_0)' + q(x)(\overline{y} + y_0) \equiv f(x).$$

Bu esa $y = \overline{y} + y_0$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanini bildiradi. Ayni paytda $\overline{y}+y_0$ ning ifodasida ikkita ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi (chunki $y_0 = y_0(x)$ funksiya (2) tenglamaning umumiy yechimi bo'lganligi uchun uning ifodasida ikkita ixtiyoriy o'zgarmas qatnashadi) va

$$y = \overline{y} + y_0$$

funksiya (1) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. $\rhd$

Bu tasdiqdan quyidagi xulosa kelib chiqadi: (1) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimini topish ikkita soddaroq masalaga a) (1) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini, b) (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topishga keladi.

2. (1) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish uchun Lagranj usuli. Endi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish usullaridan birini keltiramiz.

Aytaylik, (1) tenglamaning bir jinsli tenglamasi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

ning ikkita $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ chiziqli erkli xususiy yechimlar topilgan bo'lsin. U holda (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Endi bu ifodadagi C_1 va C_2 larni x o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsin deymiz va

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{8}$$

funksiya (1) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi bo'lsin. Masala, shunday $C_1(x)$ va $C_2(x)$ larni topishdan iborat.

(8) tenglikning har ikki tomonini differensiallab topamiz:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2$$

Qidirilayotgan $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalar uchun

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \tag{9}$$

bo'lsin deb talab qilamiz. Natijada keyingi tenglik ushbu

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' \tag{10}$$

ko'rinishga keladi. (10) tenglikning har ikki tomonini differensiallab topamiz:

$$y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \tag{11}$$

Endi (8), (10) va (11) munosabatlarda ifodalangan y, y', y'' larni (1) tenglikdagi y, y', y'' lar o'rniga qo'yib topamiz:

$$(C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2')+$$

$$+p(x)(c_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') + q(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x).$$

Bu tenglikni quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$C_1(x)(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(x)(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)+$$

$$+C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Modomiki, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning yechimlari ekan, u holda

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 \equiv 0,$$
$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0 \tag{12}$$

bo'ladi.

(11) va (12) munosabatlardan

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib $C_1'(x)$ va $C_2'(x)$ larni topish uchun ushbu

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \tag{13}$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani yechib, $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ lar topiladi va ularni integrallash natijasida ularning qiymatlari kelib chiqadi. Bu $C_1(x)$ va $C_2(x)$ larni

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

dagi $C_1(x)$ va $C_2(x)$ lar o'rniga qo'yib, qaralayotgan bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi topiladi.

Bunday usul bilan (1) tenglamaning umumiy yechimini topish Lagranj usuli deyiladi.

Misol. Ushbu

$$y'' - y = 6e^{2x}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Berilgan tenglamaning bir jinsli tenglamasi

$$y'' - y = 0$$

bo'ladi. Uning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 1 = 0,$$

va yechimlari $k_1 = 1, k_2 = -1$. Demak, bir jinsli tenglamaning xususiy yechimlari

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}$$

bo‘lib, umumiy yechimi

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

bo‘ladi. Bu holda $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ larni topish uchun tuzilgan (13) sistema quyidagicha

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0, \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} = 6e^{2x}. \end{cases}$$

Sistemani yechib topamiz:

$$C_1'(x) = 3e^x,$$

$$C_2'(x) = -3e^{3x}$$

Keyingi tengliklarni integrallasak, u holda

$$C_1(x) = 3e^x + C_1^*,$$

$$C_2(x) = -e^{3x} + C_2^*$$

kelib chiqadi. Demak, berilgan bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (3e^x + C_1^*)e^x + (-e^{3x} + C_2^*)e^{-x} = 2e^{2x} + C_1^*e^x + C_2^*e^{-x}.\triangleright$$

14-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar

Aytaylik, 13-§ da o‘rganilgan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

tenglamada uning koeffitsiyentlari $p(x)$ va $q(x)$ lar oʻzgarmas sonlar boʻlsin:

$$p(x) = a, \quad q(x) = b.$$

Bu holda ushbu

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{1}$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglama 13-§ da oʻrganilgan tenglamaning xususiy holi. Odatda, (1) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli boʻlmagan oʻzgarmas koeffitsiyentli differensial tenglama deyiladi.

(1) tenglamaning umumiy yechimini topishda 13§ da keltirilgan ma’lumotlardan foydalaniladi. Demak, (1) tenglamani yechishda, bu tenglama bilan birga bir jinsli tenglama

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{2}$$

ham qaraladi.

Ma’lumki, (1) tenglamaning umumiy yechimi, uning bitta xususiy yechimi bilan (2) tenglama umumiy yechimi yigʻindisidan iborat.

Demak, (1) tenglama quyidagicha yechiladi:

1) avvalo (1) tenglamaning bir jinsli tenglamasi (2) tenglamaning umumiy yechimi topiladi;

2) (1) tenglamaning bitta xususiy yechimi (koʻpincha Lagranj usulidan foydalanib) topiladi;

3) (2) tenglamaning umumiy yechimi bilan (1) tenglamaning xususiy yechimi yigʻindisini topish bilan masala hal qilinadi.

Shuni aytish kerakki, (1) tenglamaning xususiy yechimini topish ancha qiyin. Ayrim hollarda, ya’ni (1) tenglamaning oʻng tomonidagi $f(x)$ funksiya ma’lum koʻrinishga ega boʻlganda uning xususiy yechimi bir muncha soddaroq yo'l bilan topiladi. Biz quyida (1) tenglamada

$$1)\ f(x) = Ae^{\alpha x} \quad (A \neq 0),$$
$$2)\ f(x) = B\cos\alpha x + C\sin\alpha x,$$
$$3)\ f(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (A \neq 0)$$

bo'lgan hollardagi (1) tenglamaning xususiy yechimini topamiz.

1. (1) tenglamada $f(x) = Ae^{\alpha x}$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglamaning xususiy yechimini ushbu

$$\varphi(x) = Me^{\alpha x} \tag{3}$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda M noma'lum koeffitsiyent. Endi

$$\varphi(x) = Me^{\alpha x}, \quad \varphi'(x) = M\alpha e^{\alpha x}, \quad \varphi''(x) = M\alpha^2 e^{\alpha x}$$

larni (1) tenglamadagi y, y', y'' lar o'rniga qo'yib, $f(x) = Ae^{\alpha x}$ ekanini e'tiborga olib,

$$M\alpha^2 e^{\alpha x} + a \cdot M\alpha e^{\alpha x} + b \cdot Me^{\alpha x} = Ae^{\alpha x},$$

ya'ni (bu tenglikning har ikki tomonini $e^{\alpha x}$ ga bo'lib)

$$M(\alpha^2 + a\alpha + b) = A$$

ni topamiz.

Ikki holni qaraymiz.

a) α son (2) tenglamaning xarakteristik tenglamasining ildizi bo'lmasin, ya'ni

$$\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0.$$

Bu holda

$$M = \frac{A}{\alpha^2 + a\alpha + b}$$

bo'lib,

$$\varphi(x) = \frac{Ae^{\alpha x}}{\alpha^2 + a\alpha + b}$$

bo'ladi.

b) agar α son xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo‘lsa, xususiy yechim

$$\varphi(x) = Mxe^{\alpha x},$$

agar α son xarakteristik tenglamaning karrali ildizi bo‘lsa, xususiy yechim

$$\varphi(x) = Mx^2e^{\alpha x}$$

ko‘rinishda izlanib, differensiallash amalini qo‘llash bilan noma’lum koeffitsiyent topiladi.

Misol. Ushbu

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \tag{4}$$

tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\triangleleft$ Bu tenglamaning bir jinsli tenglamasi uchun xarakteristik tenglama

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

bo‘lib, uning ildizlari $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. Demak, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$$

bo‘ladi. $\alpha = 1$ soni xarakteristik tenglamaning ildizi emas. U holda (4) tenglamaning xususiy yechimini

$$\varphi(x) = Me^x$$

ko‘rinishida izlash kerak, bunda M noma’lum koeffitsiyent.

Ushbu $\varphi(x) = Me^x$, $\varphi'(x) = Me^x$, $\varphi''(x) = Me^x$ larni (4) tenglamadagi y'', y', y lar o‘rniga qo‘yib

$$Me^x - 2Me^x - 3Me^x = e^x,$$

ya’ni

$$-4M = 1, \quad M = -\frac{1}{4}$$

bo‘lishini topamiz. Demak, (4) tenglamaning xususiy yechimi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}e^x$$

bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x$$

bo‘ladi.$\triangleright$

2. (1) tenglamada $f(x) = B\cos\alpha x + C\sin\alpha x$ bo‘lsin. Bu holda (1) tenglamaning xususiy yechimini ushbu

$$\varphi(x) = M\cos\alpha x + N\sin\alpha x$$

ko‘rinishda izlaymiz, bunda M va N noma’lum koeffitsiyentlar. Ravshanki,

$$\varphi'(x) = -M\alpha\sin\alpha x + N\alpha\cos\alpha x, \quad \varphi''(x) = -M\alpha^2\cos\alpha x - N\alpha^2\sin\alpha x.$$

Bu $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ larni (1) tenglamadagi y, y', y'' lar o‘rniga qo‘yib

$$-M\alpha^2\cos\alpha x - N\alpha^2\sin\alpha x + a(-M\alpha\sin\alpha x + N\alpha\cos\alpha x) +$$

$$+b(M\cos\alpha x + N\sin\alpha x) = f(x)$$

bo‘lishini, so‘ng oxirgi tenglikning chap tomonidagi $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$ larni jamlab, $f(x) = B\cos\alpha x + C\sin\alpha x$ bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz:

$$(-M\alpha^2 + Na\alpha + Mb)\cos\alpha x + (-N\alpha^2 - Ma\alpha + Nb)\sin\alpha x =$$

$$B = \cos\alpha x + C\sin\alpha x.$$

Bu tenglikda $\sin\alpha x$ hamda $\cos\alpha x$ larning oldidagi koeffitsiyentlarini tenglab, ushbu

$$\begin{cases} M(b-\alpha^2) + Na\alpha = B \\ -Ma\alpha + N(b-\alpha^2) = C \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemadan M va N lar topiladi.

Eslatma. Agar xarakteristik tenglamaning ildizi $\pm i\alpha$ bo‘lsa, u holda (1) differensial tenglamaning xususiy yechimi ushbu

$$\varphi(x) = x(M\cos\alpha x + N\sin\alpha x)$$

ko‘rinishida izlanadi.

Misol. Ushbu

$$y'' - 4y' + 4y = \cos x \tag{5}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Avvalo bu tenglamaning bir jinsli tenglamasi

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{6}$$

ni qaraymiz. Uning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $k_1 = k_2 = 2$. Demak, (6) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

(5) tenglamaning xususiy yechimini

$$\varphi(x) = M\cos x + N\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz, bunda M, N − noma’lum koeffitsiyentlar. Ravshanki,

$$\varphi'(x) = -M\sin x + N\cos x,\ \ \varphi''(x) = -M\cos x - N\sin x.$$

Endi $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ larni (5) tenglamadagi y, y', y'' lar o‘rniga qo‘yib topamiz:

$$-M\cos x - N\sin x + 4M\sin x - 4N\cos x + 4M\cos x + 4N\sin x = \cos x,$$

$$(3M - 4N)\cos x + (4M + 3N)\sin x = \cos x.$$

$\cos x$ va $\sin x$ larning oldidagi koeffitsiyentlarni tenglab, ushbu

$$\begin{cases} 3M - 4N = 1 \\ 4M + 3N = 0 \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani yechib,

$$M = \frac{3}{25}, N = -\frac{4}{25}$$

bo'lishini topamiz. Demak, (5) tenglamaning xususiy yechimi

$$\varphi(x) = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x$$

bo'lib, uning umumiy yechimi

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x. \triangleright$$

3. (1) tenglamada $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglamaning xususiy yechimini ushbu

$$\varphi(x) = Mx^2 + Nx + P$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda M, N, P – noma'lum koeffitsiyentlar. Endi $\varphi(x)$ funksiyaning hosilalarini topib,

$$\varphi'(x) = 2Mx + N, \;\; \varphi''(x) = 2M,$$

ularni va $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ni (1) tenglamaga qo'yib

$$2M + a(2Mx + N) + b(Mx^2 + Nx + P) = Ax^2 + Bx + C$$

bo'lishini topamiz. Oxirgi tenglikni quyidagicha

$$Mbx^2 + (2Ma + Nb)x + (2M + Na + bP) = Ax^2 + Bx + C$$

yozib olamiz. Bu tenglikdan ushbu

$$\begin{cases} Mb = A \\ 2Ma + Nb = B \\ 2M + Na + bP = C \end{cases}$$

sistema kelib chiqadi. Undan M, N, P larni topish bilan (1) tenglamaning xususiy yechimi aniqlanadi.

Eslatma. Agar (1) tenglamada $b = 0$ bo‘lsa, u holda (1) tenglamaning xususiy yechimi

$$\varphi(x) = x(Mx^2 + Nx + P)$$

ko‘rinishida izlanadi.

Misol. Ushbu

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2 \tag{7}$$

differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

$\lhd$ Avvalo

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Ravshanki, uning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

bo‘lib, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ bo‘lgani uchun bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

bo‘ladi.

(7) tenglamaning xususiy yechimini

$$\varphi(x) = Mx^2 + Nx + P$$

ko‘rinishda izlaymiz, bunda M, N, P noma’lum koeffitsiyentlar. Ravshanki,

$$\varphi'(x) = 2Mx + N, \varphi''(x) = 2M$$

Endi $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ larni (7) tenglamadagi y, y', y'' lar o‘rniga qo‘yib topamiz:

$$2M - 3(2Mx + N) + 2(Mx^2 + Nx + P) = 4x^2,$$

$$2Mx^2 + (2N - 6M)x + (2M - 3N + 2P) = 4x^2.$$

Bu tenglikdan quyidagi

$$\begin{cases} 2M = 4 \\ 2N - 6M = 0 \\ 2M - 3N + 2P = 0 \end{cases}$$

sistema kelib chiqadi. Sistemaning yechimi

$$M = 2, \; N = 6, \; P = 7$$

bo'ladi.

Demak, (7) tenglamaning xususiy yechimi

$$\varphi(x) = 2x^2 + 6x + 7$$

bo'lib,uning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$$

bo'ladi.$\triangleright$

15-§. Differensial tenglamalar sistemasi

$y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ funksiyalar

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsin. Bunday differensial tenglamalar sistemasini **normal tenglamalar sistemasi** deyiladi.

Sistemaning birinchi tenglamasini x bo'yicha differensiallab

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}$$

tenglikni hosil qilamiz. $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \cdots, \frac{dy_n}{dx}$ larni (1) tengliklarni o'ng tomonlari bilan almashtirib,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

tenglamani hosil qilamiz. Hosil bo'lgan tenglikni differensiallab, yuqoridagi ishni takrorlab,

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shu protsessni davom ettirib

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Shunday qilib,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^ny_n}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{2}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning birinchi $(n-1)$ tenglamasidan $y_2, y_3, \cdots, y_n$ larni x, y_1 va $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, $\dots$, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ lar orqali ifodalab

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

Bu tengliklarni (2) sistemaning oxirgi tenglamasiga qo'yib $n-$tartibli

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}\right)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu differensial tenglamani yechib

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \cdots,, C_n)$$

yechimni topamiz. Bu yechimni $(n-1)$ marta differensiallab $\dfrac{dy_1}{dx}$, $\dfrac{d^2 y_1}{dx^2}$, $\cdots$, $\dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ hosilalarni topamiz. Bu hosilalarni (3) tengliklarga qo'yib

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \cdots,, C_n) \\ y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, \cdots,, C_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \cdots,, C_n) \end{cases} \tag{4}$$

yechimlarni hosil qilamiz.

Misol. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z - y \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasini yeching.

$\lhd$ 1) Birinchi tenglamani x bo'yicha differensiallab

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikka $\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$ ifodalarni qo'yib

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y - 3z - (z - y)$$

yoki

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4z(*)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

2) Berilgan sistemaning birinchi tenglamasidan $z = \frac{dy}{dx} + y(**)$ ni topib $(*)$ tenglamaga qo'yib,

$$y'' = -4y' - 4y$$

yoki

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

ikkinchi tartibli tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamani yechamiz: uning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

bo‘lib $k_1 = -2$, $k_2 = -2$. Shuning uchun $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

y dan x bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{dy}{dx} = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} = -2C_1 e^{-2x} + C_2(1-2x)e^{-2x}.$$

Buni $(**)$ tenglikka qo‘yib $z = -2C_1 e^{-2x} + C_2(1-2x)e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} = -C_1 e^{-2x} + C_2(1-2x+x)e^{-2x} = -C_1 e^{-2x} + C_2(1-x)e^{-2x}$ yechimni topamiz.▷

Endi o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{5}$$

berilgan bo‘lsin.

Aniqlik uchun uchta no‘malum funksiyali sistemani qaraymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \tag{6}$$

Xususiy yechimni

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \;\; x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \;\; x_3 = \alpha_3 e^{kt} \tag{7}$$

ko‘rinishda izlaymiz. (7) tengliklarni (6) sistemaga qo‘yib,

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = a_{11}\alpha_1 e^{kt} + a_{12}\alpha_2 e^{kt} + a_{13}\alpha_3 e^{kt} \\ k\alpha_2 e^{kt} = a_{21}\alpha_1 e^{kt} + a_{22}\alpha_2 e^{kt} + a_{23}\alpha_3 e^{kt} \\ k\alpha_3 e^{kt} = a_{31}\alpha_1 e^{kt} + a_{32}\alpha_2 e^{kt} + a_{33}\alpha_3 e^{kt} \end{cases}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Har bir tenglikni e^{kt} ga bo‘lib, hamma hadlarni o‘ng tomonga o‘tkazib

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0 \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - k)\alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bir jinsli oddiy tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Ma’lumki (8) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo‘lishi uchun bu sistemaning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

(9) tenglama (6) sistemaning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi.

1. Xarakteristik tenglama haqiqiy k_1, k_2, k_3 ildizlarga ega bo‘lsa, ularga (7) yechim mos kelib, uning koeffitsiyentllari α_1, α_2, α_3 (8) sistemadan aniqlanadi. Demak (6) sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + C_3\alpha_1^{(3)} e^{k_3 t} \\ x_2 = C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + C_3\alpha_2^{(3)} e^{k_3 t} \\ x_3 = C_1\alpha_3^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_3^{(2)} e^{k_2 t} + C_3\alpha_3^{(3)} e^{k_3 t} \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2. Xarakteristik tenglama $\alpha \pm \beta i$ kompleks ildizlarga ega bo‘lgan holda, ularga mos xususiy yechimlar 12 -§ dagi usul yordamida tuziladi.

II bob. Qatorlar

1-§. Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari

1. Sonli qator tushunchasi. Qatorning yaqinlashuvchiligi va uzoqlashuvchiligi.

Aytaylik, biror sonlar ketma-ketligi

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{1}$$

ifoda **sonli qator** (qisqacha **qator**) deyiladi. Bunda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonlar qatorning hadlari, a_n esa qatorning n-**hadi** yoki **umumiy hadi** deyiladi. (1) qatorning qisqacha yig‘indi belgisi $\sum$ va umumiy hadi orqali quyidagicha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Agar qatorning umumiy hadi ma’lum bo‘lsa, u holda qator berilgan hisoblanadi. Masalan, umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

bo‘lgan qator quyidagicha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

bo‘ladi. (1) qator hadlaridan quyidagi

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \tag{2}$$

$$............$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$............$$

yig‘indilarni tuzamiz. Odatda, (2) yig‘indilar (1) qatorning **qismiy yig‘indilari** deyiladi.

Demak, (1) qator berilgan holda har doim bu qatorning qismiy yig‘indilaridan iborat ushbu $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

1-ta’rif. Agar

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad (S- \text{ chekli son})$$

bo‘lsa, (1) qator **yaqinlashuvchi,** S son esa uning **yig‘indisi** deyiladi. Bu holda

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

kabi yoziladi.

2-ta’rif. Agar $n \to \infty$ da S_n ketma-ketlik limiti cheksiz yoki $n \to \infty$ da S_n ning limiti mavjud bo‘lmasa, (1) qator **uzoqlashuvchi** deyiladi. Uzoqlashuvchi qator yig‘indiga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Ushbu

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

qatorni qaraylik.

Bu qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlash uchun uning dastlabki n ta hadidan iborat qismiy yig'indisini olamiz:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Endi

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ni e'tiborga olib, S_n ni hisoblaymiz:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

demak,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi uning yig'indisi $S = 1$ ga teng.

2-misol. Quyidagi

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \tag{3}$$

qatorni qaraylik. Bu qatorning hadlari geometrik progressiya tashkil etganligi sababli uni **geometrik qator** deyiladi.

(3) qatorning dastlabki n ta hadidan iborat S_n qismiy yig'indi, geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisiga teng, demak:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Ravshanki, $n \to \infty$ da S_n ning qanday limitiga ega bo'lishi q ga (geometrik progressiya mahrajiga) bog'liq bo'ladi.

a) aytaylik, $|q| < 1$, ya'ni $-1 < q < 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n \right) = \frac{a}{1-q}$$

bo'lib, (3) qator yaqinlashuvchi, yig'indisi $S = \dfrac{a}{1-q}$;

b) aytaylik $q > 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

bo'lib, (3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi;

d) aytaylik, $q = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$S_n = na$$

bo'lib, $n \to \infty$ da $S_n \to \infty$. Bu holda ham (3) qator uzoqlashuvchi bo'ladi;

e) aytaylik, $q \leq -1$ bo'lsin. Bu holda $n \to \infty$ da S_n ning limiti mavjud emas. Masalan, $q = -1$ bo'lganda (3) qator ushbu

$$a - a + a - a + ...(-1)^{n-1}a + ...$$

ko'rinishga ega bo'lib, uning qismiy yig'indisi

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa;} \\ a, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa.} \end{cases}$$

bo'ladi. Ravshanki, $n \to \infty$ da S_n ning limiti mavjud bo'lmaydi.

Demak, (3) geometrik qator $|q| < 1$ bo'lgandagina yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S = \dfrac{a}{1-q}$ ga teng.

3-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+... \qquad (4)$$

qatorni qaraylik. (4) qator **garmonik qator** deyiladi.

Bu qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishini aniqlash uchun uning dastlabki 2^n ta hadidan iborat qismiy yig‘indisini olamiz:

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+...+\frac{1}{2^n}$$

Uni quyidagicha

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+...+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$$

yozib olamiz.

Oxirgi tenglikning o‘ng tomonida $n-1$ ta qavs bo‘lib, 1-qavsda 2 ta had, 2-qavsda 2^2 had, 3-qavsda 2^3 ta had va h.k., $n-1$ qavsda 2^{n-1} ta had bor.

Ayni paytda

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>$$

$$>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

....

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+...+\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}=2^{n-1}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$$

bo‘lganligi sababli

$$S_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

bo‘ladi. Bundan esa

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = \infty$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator berilgan bo‘lsin. Agar bu qatorning dastlabki m ta hadini tashlasak, unda

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + ... \tag{5}$$

qator hosil bo‘ladi. Bu qator (1) **qatorning qoldig‘i** (m-hadidan keyingi qoldig‘i) deyiladi.

2. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Yaqinlashuvchi qatorning xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu qatorning qoldig‘i (5) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va aksincha.

$\lhd$ (1) qatorning dastlabki m ta hadi yig‘indisini A bilan belgilaylik:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m$$

Agar (1) qatorning dastlabki n ta hadi yig‘indisini S_n, (5) qatorning dastlabki n ta hadining yig‘indisini S_n^* deyilsa, u holda

$$S_{n+m} = A + S_n^* \tag{6}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ \ (S - \text{ chekli son})$$

bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+m} = S$$

bo‘ladi. (6) tenglikdan foydalanib

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} (S_{n+m} - A) = S - A$$

bo‘lishini topamiz. Demak, (5) qator yaqinlashuvchi.

Aytaylik, (5) qator yaqinlashuvchi bo‘lsin, U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* = S^*$$

va (6) tenglikka asosan

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+m} = \lim_{n\to\infty} (A + S_n^*) = A + S^*.$$

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi.$\rhd$

Bu xossa qatorning dastlabki bir nechta hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi hadlarini qo‘shish uning yaqinlashuvchiligiga ta’sir qilmasligini ifodalaydi.

2-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi S ga teng bo‘lsa, u holda

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n + ... \ (c = const, \quad c \neq 0) \tag{7}$$

qator ham yaqinlashuvchidir va uning yig‘indisi cS ga teng.

$\lhd$ Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi S ga teng bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ \ (S - \text{ chekli son}).$$

Ayni paytda

$$S_n' = ca_1 + ca_2 + ca_3 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = cS_n$$

bo‘lishidan

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

kelib chiqadi. Demak, (7) qator yaqinlashuvchi, uning yig‘indisi cS bo‘ladi.$\triangleright$

Faraz qilaylik ikkita

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \tag{8}$$

qatorlar berilgan bo‘lsin.

Ushbu

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ...$$

va

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + ... + (a_n - b_n) + ...$$

qatorlar mos ravishda (1) va (8) qatorlar yig‘indisi hamda ayirmasi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

kabi yoziladi.

3-xossa. Agar (1) va (8) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indisi mos ravishda S, S' bo‘lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

qatorlar ham yaqinlashuvchi va ularning yig‘indisi mos ravishda $S + S'$, $S - S'$ bo‘ladi.

$\triangleleft$ Aytaylik,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \ \ S'_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$$

bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ \ \lim_{n\to\infty} S'_n = S'$$

bo‘ladi.

Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ qatorning qismiy yig‘indisi C_n deyilsa,

$$C_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+...+(a_n+b_n) = S_n + S'_n$$

bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(S_n+S'_n) = S+S'$$

bo‘ladi. Demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ qator yaqinlashuvchi, yig‘indisi $S+S'$ bo‘ladi.$\triangleright$

4-xossa. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu qatorning umumiy hadi a_n nolga intiladi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\triangleleft$ Aytaylik, (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsin. Bu qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_{n-1} = a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1},$$

$$S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$$

uchun

$$S_n - S_{n-1} = a_n \tag{9}$$

bo‘ladi. Modomiki, (1) qator yaqinlashuvchi ekan, u holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \tag{10}$$

bo‘ladi. (9), (10) munosabatlardan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

kelib chiqadi.$\triangleright$

Eslatma. Qatorning umumiy hadi a_n nolga intilishidan, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

bo'lishidan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqilashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

garmonik qator uchun

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Biroq garmonik qator uzoqlashuvchi.

Shuning uchun 4-xossa qator yaqinlashishning zaruriy sharti deyiladi. Shuni ham aytish mumkinki, agar qatorning umumiy hadi a_n da $n \to \infty$ nolga intilmasa, u holda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-§. Musbat hadli qatorlar. Musbat hadli qatorlarda solishtirish alomati

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning har bir hadi manfiy bo'lmasa,

$$a_n \geq 0 \;\; (n = 1, 2, 3, ...)$$

u qator **musbat hadli qator** (qisqacha **musbat qator**) deyiladi.

1. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchiligi. Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1}$$

musbat qator bo'lib,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin. Ravshanki,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}.$$

$a_{n+1} \geq 0$ bo'lganligi sababli $S_{n+1} \geq S_n$ bo'ladi. Demak, musbat qatorlarning qismiy yig'indilari ketma-ketligi

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$$

o'suvchi bo'ladi.

Ma'lumki, o'suvchi ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi. Shuningdek, ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u chegaralangan (jumladan yuqoridan chegaralangan) bo'ladi. Natijada musbat qatorlarning yaqinlashishi haqida quyidagi teoremaga kelamiz:

1-teorema. (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Natija. Musbat qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2. Musbat qatorlarda solishtirish alomatlari.

Endi musbat qatorlarda solishtirish alomatlarini keltiramiz. Ular teoremalar orqali ifodalanadi.

2-teorema. Agar (1) va

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \tag{2}$$

musbat qatorlarda

$$a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa,(ya'ni (1) qatorning har bir hadi (2) qatorning mos hadidan oshib ketmasa) u holda

a) (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator ham yaqinlashuvchidir;

b) (1) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (2) qator ham uzoqlashuvchidir.

$\lhd$ (1) va (2) qatorlarning qismiy yig‘indilari mos ravishda S_n va M_n deylik:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,$$

$$M_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n.$$

U holda (3) munosabatdan foydalanib

$$S_n \leq M_n \ \ (n = 1, 2, 3, ...) \tag{4}$$

ni topamiz.

Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda 1-teoremaga ko‘ra (2) qatorning qismiy yig‘indisi yuqoridan chegaralangan bo‘ladi:

$$M_n \leq L \quad (L = const), \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

Bu va (4) tengsizlikdan

$$S_n \leq L, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

kelib chiqadi. Demak, (1) qatorning qismiy yig‘indisi yuqoridan chegaralangan. U holda 1-teoremaga ko‘ra (1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Aytaylik, (1) qator uzoqlashuvchi bo‘lsin. U holda S_n yuqoridan chegaralangan emas. (4) tengsizlikka ko‘ra M_n ham yuqoridan chegaralanmagan. Yuqoridagi natijaga ko‘ra (2) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.$\rhd$

3-teorema. Agar (1) va (2) musbat qatorlarda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n = 1, 2, 3...) \tag{5}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda:

a) (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) qator ham yaqinlashuvchi;

b) (1) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (2) qator ham uzoqlashuvchi.

$\lhd$ Keltirilgan teoremaning (5) shartidan topamiz:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}, \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n. \tag{6}$$

Demak, (1) va (2) qator hadlari orasida (6) munosabat o'rinli.

Aytaylik, (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda yaqinlashuvchi qatorning 2-xossasiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. (6) tengsizlik va 2-teoremadan foydalanib, (1) qatorning yaqinlashuvchiligini topamiz. Aytaylik, (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsin. (6) tengsizlik va 2-teoremadan foydalanib, (2) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishini topamiz.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\triangleleft$ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

bo'lib, uning uchun

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \tag{7}$$

bo'ladi. Biz 1-§ da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

qatorning yaqinlashuvchiligini ko'rgan edik. Bu va (7) tengsizlik, 2-teoremadan foydalanib, berilgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini topamiz.

3-§. Musbat qatorlarda yaqinlashish alomatlari

Avvalgi ma'lumotlardan hamda geometrik qatorning yaqinlashuvchiligidan foydalanib ba'zi yaqinlashish alomatlarini keltiramiz.

1. Koshi alomati. Aytaylik, (1) musbat qator berilgan bo'lsin. Agar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

bo'lsa, u holda:

a) $k < 1$ da (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $k > 1$ da (1) uzoqlashuvchi bo'ladi.

$\triangleleft$ Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

U holda ketma-ketlikning limiti ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ kichik son olinganda ham shunday n_0 natural son topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|\sqrt[n]{a_n} - k| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlikni quyidagicha

$$k - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < k + \varepsilon \tag{2}$$

yozish mumkin.

Aytaylik, $k < 1$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ kichik sonni shunday kichik qilib olish mumkinki, natijada

$$k + \varepsilon < 1$$

bo'ladi. Agar

$$k + \varepsilon = q$$

deyilsa, (2) tengsizlikka ko'ra

$$\sqrt[n]{a_n} < q.$$

Bu tengsizlikning har ikki tomoni n-darajaga ko'tarib topamiz:

$$a_n < q^n \quad (q < 1). \tag{3}$$

Oxirgi tengsizlik n ning biror n_0 qiymatidan boshlab o‘rinli bo‘ladi. Ma’lumki, yaqinlashuvchi qatorning 1-xossasiga ko‘ra, qator yaqinlashishida uning dastlabki bir nechta hadlarining ta’siri bo‘lmaydi. Binobarin, (3) tengsizlikni n ning barcha qiymatlarida ($n = 1, 2, 3...$) o‘rinli bo‘lsin deb qarash mumkin. Shunday qilib berilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$$

geometrik qatorga ega bo‘ldik. Ravshanki, geometrik qator $q < 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi bo‘ladi. U holda (3) tengsizlikka hamda 2-teoremaga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Aytaylik, $k > 1$ bo‘lsin. U holda q ham birdan katta bo‘ladi. Bu holda

$$\sqrt[n]{a_n} > 1,$$

$$a_n > 1$$

bo‘lib, $n \to \infty$ da a_n ning limiti 0 ga teng bo‘lmaydi. Binobarin, qator yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilmaydi. Bu holda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.$\rhd$

Eslatma. Agar Koshi alomatida $k = 1$ bo‘lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashishi ham mumkin, uzoqlashishi ham mumkin. Bu holda Koshi alomati qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashishini aniqlab bermaydi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

$\lhd$ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{2^n}{n^n}$$

bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

bo‘ladi. Demak,$k = 0 < 1$. Berilgan qator Koshi alomatiga ko‘ra yaqinlashuvchi bo‘ladi.$\rhd$

2. Dalamber alomati

Aytaylik, biror (1) musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

bo‘lsa, u holda:

a) $d < 1$ da (1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi;

b) $d > 1$ da (1) qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$\lhd$ Bu tasdiq yuqorida keltirilgan Koshi alomati isboti kabi isbotlanadi.$\rhd$

Eslatma. Agar Dalamber alomatida $d = 1$ bo‘lsa, unda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin. Bu holda Dalamber alomati qatorning yaqinlashuvchiligini yoki uzoqlashuvchiligini aniqlab berolmaydi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\lhd$ Bu qatorning n va $n+1$ hadlari

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

bo‘lib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Demak, $d = 0 < 1$ bo‘lib, Dalamber alomatiga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.$\triangleright$

3. Koshining integral alomati

Biror musbat qator

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

hamda $[1, +\infty)$ oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da uzluksiz,

2) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da kamayuvchi,

3) $f(x)$ funksiya $[1, +\infty)$ da musbat, ya’ni ixtiyoriy $x \in [1, +\infty)$ da $f(x) > 0$,

4) ushbu $f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ tenglik o‘rinli.

Natijada berilgan qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ...$$

qator hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi shartlarning bajarilishidan va ixtiyoriy natural n uchun

$$n < x < n + 1$$

bo‘lishidan

$$f(n) > f(x) > f(n + 1)$$

ya’ni

$$a_n > f(x) > a_{n+1}$$

kelib chiqadi. Keyingi tengsizlikni $[n, n + 1]$ oraliq bo‘yicha integrallab topamiz:

$$\int_n^{n+1} a_n dx > \int_n^{n+1} f(x)dx > \int_n^{n+1} a_{n+1} dx,$$

$$a_n > \int\limits_n^{n+1} f(x)dx > a_{n+1} \tag{3}$$

Endi berilgan qator bilan birga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + ... + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx + ... \tag{4}$$

qatorni qaraylik. Oxirgigi qatorning qismiy yig'indisi

$$F_n = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + ... + \int\limits_n^{n+1} f(x)dx$$

bo'ladi.

Agar $n \to +\infty$ da F_n chekli limitga ega bo'lsa, u holda (4) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (3) munosabat hamda solishtirma alomatga (2-teoremaga) ko'ra (1) qator ham yaqinlashuvchidir. Agar $n \to +\infty$ da F_n ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda (4) qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu holda (1) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi yaqinlashish alomatiga kelamiz.

Agar

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_1^x f(t)dt$$

chekli bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi, cheksiz bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Odatda, bu tasdiq Koshining integral alomati deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha} + ... \quad (\alpha > 0) \tag{5}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\triangleleft$ Aytaylik,

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

bo‘lsin. Bu funksiya uchun Koshining integral alomatida keltirilgan $f(x)$ ga qo‘yilgan barcha shartlar bajariladi: $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ funksiya $[1, +\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz, $[1, +\infty)$ da kamayuvchi, $[1, +\infty)$ da musbat va

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Endi

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

ni topamiz. Ravshanki,

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \quad (\alpha \neq 1).$$

Agar $\alpha > 1$ bo‘lsa,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

bo‘ladi. Bu holda Koshining integral alomatiga ko‘ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

$0 < \alpha < 1$ da

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) = \infty.$$

Bu holda qaralayotgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Aytaylik, $\alpha = 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x\to+\infty} (\ln t)\bigg|_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty$$

bo‘ladi. Bunda berilgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ qator $\alpha > 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi bo‘ladi. Odatda, (5) qator **umumlashgan garmonik qator** deyiladi ($\alpha = 1$ da garmonik qator hosil bo‘ladi).$\triangleright$

4-§. Ixtiyoriy hadli qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1}$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu qatorning hadlari ixtiyoriy ishorali bo‘lsa, u ixtiyoriy hadli qator deyiladi.

Avvalo hadlarning ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatorlarni qaraymiz.

1. Hadlarning ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatorlar. Leybnits teoremasi

Ushbu

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + (-1)^{n-1}c_n + ... \tag{2}$$

qator, bunda

$$c_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

hadlarning ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qator deyiladi. Masalan,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...,$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} + ...$$

qatorlar hadlarining ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatorlar bo‘ladi.

1-teorema (Leybnits teoremasi) Agar (2) qatorda

1) ixtiyoriy natural n uchun

$$c_{n+1} < c_n \tag{3}$$

2) $n \to \infty$ da $c_n \to 0$, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \tag{4}$$

bo‘lsa, (2) qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

$\triangleleft$ (2) qatorning dastlabki $2m$ ta ($m \in \mathbb{N}$) hadidan iborat S_{2m} qismiy yig‘indini olamiz. Bu yig‘indini quyidagicha

$$S_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + ... + (c_{2m-1} - c_{2m})$$

va

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - ... - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$$

kabi yozish mumkin. Ravshanki, bu tengliklarning o‘ng tomonidan qatnashgan qavs ichidagi ayirmalar teoremaning (3) shartiga ko‘ra, musbat sonlar bo‘ladi. U holda:

1) $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi, chunki

$$S_{2(m+1)} = S_{2m+2} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}) > S_{2m};$$

2) $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘ladi, chunki,

$$S_{2m} < c_1$$

bu holda $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik chekli limitiga ega bo‘ladi:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S. \tag{5}$$

Ayni paytda,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + c_{2m+1}$$

va teoremaning (4) shartidan

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + c_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} c_{2m+1} = S \tag{6}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

(5) va (6) munosabatlar qaralayotgan (2) qatorning juft sondagi hadlardan tashkil topgan qismiy yig‘indisi $\{S_{2m}\}$ ham, toq sondagi hadlardan tashkil topgan qismiy yig‘indisi $\{S_{2m+1}\}$ ham bir xil chekli limitga ega ekanligini ko‘rsatadi. Demak, (2) qator yaqinlashuvchi.$\triangleright$

Misol. Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\lhd$ Ravshanki, bu qator hadlarining ishoralari navbat bilan o‘zgarib keladigan qatordir. Qaralayotgan qator uchun

$$c_n=\frac{1}{n} \quad (n=1,2,...)$$

bo‘lib,

$$c_{n+1}<c_n$$

bo‘ladi. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Demak, yuqoridagi teoremaga ko‘ra qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.$\rhd$

2. Qatorlarning absolyut va shartli yaqinlashuvchiligi

Ixtiyoriy hadli (1) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+... \tag{7}$$

qatorni tuzamiz. Ravshanki, (7) qator musbat hadli qator bo‘ladi.

2-teorema. Agar (7) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (1) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

$\lhd$ (1) qatorning musbat ishorali hadlarini p_n deb ulardan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ qatorni tuzamiz, bunda $p_n=\begin{cases} a_n, & \text{agar } a_n>0; \\ 0, & \text{agar } a_n\le 0. \end{cases}$

(1) qatorning manfiy ishorali hadlarining absolyut qiymatini q_n deb, ulardan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ qatorni tuzamiz, bunda $q_n=\begin{cases} 0, & \text{agar } a_n\ge 0; \\ |a_n|, & \text{agar } a_n<0. \end{cases}$

Bu holda (1) qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

uchun

$$S_n = (p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n) - (q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n).$$

Ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

qatorlar uchun

$$p_n \leq |a_n|, \quad q_n \leq |a_n| \quad (n = 1, 2, ...) \tag{8}$$

bo‘ladi.

Shartga ko‘ra (7) qator yaqinlashuvchi. U holda (8) munosabat hamda solishtirish alomatiga ko‘ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo‘ladi. Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} (p_1+p_2+p_3+...+p_n) = \mathcal{P}, \quad \lim_{n\to\infty} (q_1+q_2+q_3+...+q_n) = \mathcal{Q} \quad \mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{R}$$

bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \mathcal{P} - \mathcal{Q}$$

bo‘lib, undan (1) qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi kelib chiqadi.▷

Ta’rif. Agar (7) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (1) qator **absolyut yaqinlashuvchi** qator deyiladi.

Agar (7) qator uzoqlashuvchi bo‘lib, (1) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator **shartli yaqinlashuvchi** qator deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad \alpha > 0$$

qator absolyut va shartli yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

$\triangleleft$ Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \alpha > 0$$

umumlashgan garmonik qator bo'lib, $\alpha > 1$ da yaqinlashuvchi, $0 < \alpha \leq 1$ da uzoqlashuvchi bo'ladi.

Ayni paytda, $0 < \alpha \leq 1$ da berilgan qator Leybnits teoremasiga ko'ra yaqinlashuvchidir.

Demak, berilgan qator $\alpha > 1$ da absolyut yaqinlashuvchi, $0 < \alpha \leq 1$ da shartli yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi qatorning absolyut yaqinlashishini aniqlaydigan alomatlardan birini isbotsiz keltiramiz.

3-teorema (Dalamber alomati). Ixtiyoriy hadli (1) qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = d$$

bo'lsin, u holda $d < 1$ da qator absolyut yaqinlashuvchi, $d > 1$ da qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

5-§. Funksional qatorlar

1. Funksional qator tushunchasi va funksional qatorning yaqinlashish sohasi.

Aytaylik, ushbu

$$u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$$

funksiyalar ketma-ketligidagi har bir funksiya (a, b) oraliqda berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{1}$$

ifoda **funksional qator** deyiladi. (1) funksional qator qisqacha

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

kabi ham yoziladi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... + x^n + ..., \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + ... + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + ...$$

qatorlar funksional qatorlar bo‘ladi.

Agar x o‘zgaruvchiga biror tayin x_0, $(x_0 \in (a, b))$ qiymat berilsa, u holda (1) funksional qator sonli qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \tag{3}$$

ga aylanadi. Masalan, (2) qator $x_0 = \frac{1}{2}$ da quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

sonli qatorga aylanadi.

Ravshanki, x o‘zgaruvchining (a, b) ga tegishli turli qiymatlarida, umuman aytganda, turli sonli qatorlar hosil bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar (3) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi.

Agar (3) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada uzoqlashuvchi deyilib, x_0 nuqta esa funksional qatorning uzoqlashish nuqtasi deyiladi.

(1) funksional qator (a, b) oraliqqa tegishli bo‘lgan x o‘zgaruvchining ba’zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba’zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin.

2-ta'rif. x o'zgaruvchining (1) qator yaqinlashadigan barcha qiymatlaridan iborat M to'plam (1) qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi. Bu holda (1) funksional qator M to'plamda yaqinlashuvchi deb yuritiladi. Ravshanki, $M \subset (a, b)$ bo'ladi.

Funksional qatorning yaqinlashish sohalarini topishda sonli qatorlarda keltirilgan ma'lumotlardan foydalaniladi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... + x^n + ...$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

$\lhd$ Bu qator hadlari mahraji $q = x$ ga teng bo'lgan geometrik progressiyani hosil qiladi. Demak, berilgan qator geometrik qator bo'ladi. Ma'lumki, geometrik qator $|q| < 1$ da yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, berilgan qator $|x| < 1$ da yaqinlashuvchi, uninig yaqinlashish sohasi esa $(-1, 1)$ oraliqdan iborat.$\rhd$

2. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + ... + \frac{n}{x^n} + ...$$

fuksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

$\lhd$ Bu qator uchun

$$u_n(x) = \frac{n}{x^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x^{n+1}}.$$

Dalamber alomatidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{x^{n+1}} : \frac{n}{x^n} \right| = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{|x|}$$

Demak, $\dfrac{1}{|x|} < 1$, ya'ni $|x| > 1$ da qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yaqinlashish sohasi $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ bo'ladi.$\rhd$

2. Funksional qatorning tekis yaqinlashishi

Aytaylik, (1) funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Demak, $[a, b]$ dan olingan x o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida mos sonli qator yaqinlashuvchi. x o'zgaruvchining turli qiymatlarida mos sonli qatorlar ham turlicha bo'lib, ularning yig'indisi ham turlicha bo'ladi. Binobarin, bunday sonli qatorlar yig'indisi S olingan x ning qiymatiga bog'liq bo'ladi:

$$S = S(x).$$

Odatda, bu funksiya (1) funksional qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = S(x)$$

kabi yoziladi.

Funksional qator yig'indisini

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \tag{4}$$

deb ham qarash mumkin, bunda

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x).$$

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + ... + x^n + ...$$

funksional qator $(-1, 1)$ da yaqinlashuvchi. Uning yig'indisi

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (x + x^2 + ... + x^n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

($|x| < 1$, ya'ni $x \in (-1, 1)$ da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = 0$) bo'ladi. Demak,

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Yuqoridagi (4) tenglik quyidagini anglatadi:
ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shu ε songa va olingan x ning qiymatiga bog‘liq shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

tengsizlik bajariladi.

Demak, (5) tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan n_0 ning qiymati ikki miqdorga: ε va qaralayotgan x ga bog‘liq bo‘ladi.

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham faqat ε ga bog‘liq shunday natural n_0 son topilsaki, barcha $n > n_0$ lar va barcha $x \in [a, b]$ uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (1) funksional qator $[a, b]$ da $S(x)$ funksiyaga **tekis yaqinlashadi** deyiladi.

Demak, bu holda (5) o‘rinli bo‘ladigan n_0 ning qiymati faqat ε ga bog‘liq bo‘lib, qaralayotgan x ga bog‘liq bo‘lmaydi.

Masalan, $[0, 1]$ oraliqda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1 + n^5x^2}$$

funksional qator tekis yaqinlashuvchi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

funksional qator yaqinlashuvchi bo‘lsa ham, u shu oraliqda tekis yaqinlashuvchi emas. Shuni ta’kidlash lozimki, funksional qator biror oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u shu oraliqda yaqinlashuvchi bo‘ladi.
Ammo funksional qator biror oraliqda yaqinlashuvchi bo‘lishidan uning shu oraliqda tekis yaqinlashuvchi bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Endi (1) funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligini ifodalovchi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1-teorema (Koshi teoremasi) Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shu ε ga koʻra shunday natural n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ lar uchun ixtiyoriy $m \in \mathbb{N}$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun ushbu

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (1) funksional qator M toʻplamda tekis yaqinlashuvchi boʻladi.

Bu teoremadan foydalanib, amaliyotda koʻp tadbiq etiladigan Veyershtrass alomatini keltiramiz.

2-teorema. Agar (1) funksional qatorning har bir hadi M toʻplamda quyidagi

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{6}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{7}$$

sonli qator yaqinlashuvchi boʻlsa, u holda (1) funksional qator M toʻplamda tekis yaqinlashuvchi boʻladi.

$\lhd$ Shartga koʻra (7) sonli qator yaqinlashuvchi. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural n_0 son topiladiki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $m \in \mathbb{N}$ uchun

$$c_{n+1} + c_{n+2} + ... + c_{n+m} < \varepsilon.$$

Endi (6) tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...+u_{n+m}(x)| \leq |u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+...+|u_{n+m}(x)| \leq$$

$$\leq c_{n+1} + c_{n+2} + ... + c_{n+m}.$$

Oxirgi ikki tengsizliklardan

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. U holda 1-teoremaga ko‘ra funksional qator M to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.$\triangleright$

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \quad (0 \leq x < \infty)$$

funksional qatorning $[0, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lishi ko‘rsatilsin.

$\triangleleft$ Ravshanki, berilgan qatorning umumiy hadi uchun

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| = \frac{1}{|x+n||x+n+1|} \leq \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$$

bo‘ladi. Ayni paytda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sonli qator (umumlashgan garmonik qator, $\alpha > 1$) yaqinlashuvchi.

Demak, Veyershtrass alomatiga ko‘ra berilgan funksional qator $[0, +\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.$\triangleright$

3. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi gunksional qatorning xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Funksional qator yig‘indisining uzluksizligi

Aytaylik, (1) funksional qator M to‘plamda yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi $S(x)$ bo‘lsin.

Agar (1) qatorning har bir $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3...)$ hadi M to‘plamda uzluksiz bo‘lib, bu funksional qator M to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qator yig‘indisi $S(x)$ funksiya M to‘plamda uzluksizdir.

$\triangleleft$ Aytaylik, x_0 nuqta M to‘plamga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin.

Shartga ko‘ra funksional qator M da tekis yaqinlashuvchi. Unda ta’rifga binoan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 topiladiki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{8}$$

jumladan

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Funksional qatorning har bir hadi M to‘plamda uzluksiz bo‘lganligi sababli

$$S_n(x) = u_1(x) + u_1(x) + ... + u_n(x)$$

funksiya ham M da uzluksiz. Uzluksizlik ta’rifiga binoan yuqoridagi $\varepsilon > 0$ ga ko‘ra shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ da

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

bo‘ladi.

Ravshavki,

$$|S(x) - S(x_0)| = |(S(x) - S_n(x)) + (S_n(x) - S_n(x_0)) + (S_n(x_0) - S(x_0))|.$$

(8), (9) va (10) munosabatlaridan foydalanib topamiz:

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0| + |S_n(x_0) - S(x_0)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu esa qator yig‘indisi $S(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada, demak, M to‘plamda uzluksizligini bildiradi.$\triangleright$

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning keyingi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

2-xossa. Funksional qatorlarni hadlab integrallash

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz bo'lib, qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa , u holda $S(x)$ funksiya $[a, b]$ da intergrallanuvchi va

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx,$$

ya'ni

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

bo'ladi.

3-xossa. Funksional qatorlarni hadlab differensiallash

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

funksional qator $[a, b]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Agar bu qatorning har bir hadi $[a, b]$ da uzluksiz $u'_n(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya hosilasidan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + ... + u'_n(x) + ...$$

funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $S(x)$ funksiya hosilaga ega va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

ya'ni

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$$

qator yig'indisi topilsin.

$\triangleleft$ Berilgan qatorning har bir hadi uzluksiz funksiya. Bu qator hadlarining hosilalaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}...$$

bo'lib, u $(-1, 1)$ da yaqinlashuvchi, yig'indisi esa $\dfrac{1}{1-x}$ ga teng.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x)$$

deyilsa, u holda

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

bo'lib,

$$\int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

bo'ladi. Ayni paytda

$$\int_0^x S'(t)dt = S(x) - S(0) = S(x).$$

Keyingi ikki tenglikdan

$$S(x) = -\ln(1-x) \quad (-1 < x < 1)$$

kelib chiqadi.$\triangleright$

6-§. Darajali qatorlar

1. Darajali qator tushunchasi. Abel teoremasi

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \tag{1}$$

yoki umumiyroq

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \tag{2}$$

ko‘rinishdagi qatorlar **darajali qatorlar** deyiladi.

Bunda x_0 va a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ lar o‘zgarmas sonlar bo‘lib, a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ lar darajali qatorning **koeffitsiyentlari** deyiladi.

Agar (2) darajali qatorga $x - x_0$ ni biror o‘zgaruvchi, masalan t deyilsa ($t = x - x_0$), u holda bu qator (1) ko‘rinishidagi qatorga keladi. Shu sababli (1) ko‘rinishdagi darajali qatorlarni o‘rganish yetarli bo‘ladi.

Masalan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (0! = 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

qatorlar darajali qatorlar bo‘ladi.

Shuni aytish kerakki, darajali qatorlar o‘z koeffitsiyentlari bilan to‘la aniqlaydi.

1-teorema (Abel teoremasi). Agar (1) darajali qator $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashuvchi bo‘lsa, ushbu

$$|x| < |x_0| \tag{3}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

$\lhd$ Aytaylik, $x = x_0 \neq 0$ da (1) qator yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n + ...$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti-ga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$$

Bundan esa

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (M = const, \ n = 0, 1, 2, ...) \tag{4}$$

kelib chiqadi.

Endi (3) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x ni olib ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ... + |a_n x^n| + ... \tag{5}$$

qatorni qaraymiz. Ravshanki,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Endi (4) munosabatidan foydalansak hamda

$$\left| \frac{x}{x_0} \right| = q$$

($q < 1$, chunki $|x| < |x_0|$) desak, u holda

$$|a_n x^n| \leq M q^n \quad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{6}$$

kelib chiqadi.

Ma'lumki,

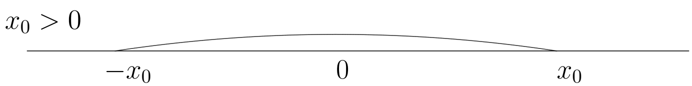
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ... \quad (q < 1)$$

geometrik qator yaqinlashuvchi. Yaqinlashuvchi qator xossasiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M + Mq + Mq^2 + ... + Mq^n + ...$$

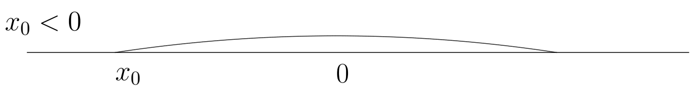
qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. U holda (6) munosabat hamda solishtirish alomatidan foydalanib, (5) qatorning yaqinlashuvchiligini topamiz. Demak,(1) qator $(-x_0, x_0)$ da absolyut yaqinlashuvchi.$\triangleright$

Abel teoremasining sharti bajarilganda (1) qatorning yaqinlashishi nuqtalari to‘plami, $x_0 > 0$ holda 1 a) chizmada tasvirlangan:



1 a) chizma.

(1) qatorning yaqinlashishi nuqtalari to‘plami $x_0 < 0$ holda b) chizmada tasvirlangan:



b) chizma.

Natija. Agar (1) darajali qator $x = x_1$ nuqtada uzoqlashuvchi, ya’ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^k = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ...a_n x_1^n + ...$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, ushbu

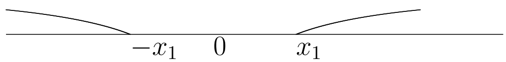
$$|x| > |x_1|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Teskarisini faraz qilaylik, qaralayotgan qator $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror x^* nuqtada ($|x^*| > |x_1|$) yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda Abel teoremasiga ko‘ra $|x| < |x^*|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda, jumladan x_1 nuqtada ham yaqinlashuvchi bo‘lib qoladi.

Bu esa shartga zid. Demak, (1) darajali qator $|x| > |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlashuvchi.$\triangleright$

Natijada keltirilgan darajali qatorning uzoqlashish nuqtalari to'plami 2-chizmada tasvirlangan:



2-chizma.

2. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali

Darajali qator

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

ning yaqinlashishi hamda uzoqlashishi nuqtalari to'plami quiyidagicha bo'lishi mumkin.

1. Har qanday darajali qator $x = 0$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'ladi. (Chunki bu holda $S_n(0) = a_0$ bo'lib, $n \to \infty$ da chekli limitga ega.)

Shunday darajali qator borki, u faqat bitta nuqtaga yaqinlashadi. Masalan,

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + ... + n!x^n + ...+$$

qator faqat $x = 0$ nuqtada yaqinlashadi. Bunday holda qatorning yaqinlashuvchi nuqtadagi to'plami bir elementli to'plamdir.

2. Shunday darajali qatorlar borki, ular ixtiyoriy $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. Masalan,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...+$$

qator ixtiyoriy $x \epsilon (-\infty, +\infty)$ da yaqinlashuvchi.

Bunday holda darajali qatorning yaqinlashishi nuqtalar to'plami $(-\infty, +\infty)$ bo'ladi.

3. Shunday darajali qatorlar borki, u biror $x = a$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = b$ nuqtada uzoqlashuvchi bo‘ladi. Masalan,

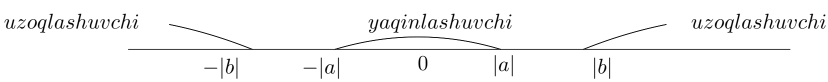
$$1 + \frac{x}{2 \cdot 5} + \frac{x^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 5^3} + ... + \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^n} + ...+$$

darajali qator $x = 4$ nuqtada yaqinlashuvchi, $x = 6$ nuqtada uzoqlashuvchi.

Bunday holda, avvalo

$$|a| < |b|$$

bo‘ladi. Keyin, Abel teoremasi va uning natijasiga ko‘ra $|x| < |a|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator yaqinlashuvchi, ya’ni $(-|a|, |a|)$ intervalda qator yaqinlashuvchi; $|x| > |b|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda qator uzoqlashuvchi, ya’ni
$(-\infty, -|b|) \cup (|b|, +\infty)$ to‘plamda uzoqlashuvchi bo‘ladi (3-chizma).



3-chizma.

Endi ushbu

$$|a| < c_1 < |b|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi c_1 sonni olaylik. Bu $x = c_1$ nuqtada (1) darajali qator quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_1^2 + ... + a_n c_1^n + ...$$

sonli qatorga aylanadi.

Agar bu sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda Abel teoremasiga ko‘ra darajali qator $|x| < c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, ya’ni darajali qator $(-c_1, c_1)$ da yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Agar sonli qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda natijaga ko‘ra darajali qator $|x| > c_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlashuvchi, ya’ni $(-\infty, -c_1) \cup (c_1, +\infty)$ to‘plamda uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Endi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_1^n$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lganda c_1 bilan b sonlari orasiga, qator uzoqlashuvchi bo‘lganda a bilan c_1 sonlar orasida joylashgan biror sonni olib, uni c_2 deylik. So‘ng ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_2^n = a_0 + a_1 c_2 + a_2 c_2^2 + ... + a_n c_2^n + ...$$

sonli qatorni qaraymiz.

Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab va bu jarayonni davom ettirib

$$c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘ladi. Uni r bilan belgilaymiz:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = r.$$

Ravshanki, $r > 0$ bo‘ladi.

Natijada (1) darajali qator $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda yaqinlashuvchi, $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda uzoqlanuvchi bo‘ladi.

1-ta’rif. Yuqoridagi r son $(r > 0)$ (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi deyiladi, $(-r, r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

Eslatma. Agar darajali qator faqat bitta nuqtada yaqinlasuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = 0$ deb, agar darajali qator barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning yaqinlashish radiusi $r = \infty$ deb qaraladi.

Endi darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish imkonini beradigan teoremani keltiramiz.

1-teorema. Aytaylik (1) darajali qator berilgan bo'lsin. Bu qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

bo'lib, L-chekli son, $L \neq 0$ bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \frac{1}{L}$$

bo'ladi.

$\lhd$(1) qator hadlarning absolyut qiymatidan tuzilgan ushbu

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + ... + |a_n||x^n| + ... \tag{2}$$

qatorni olib, unga Dalamber alomatini qo'llaymiz:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = L|x|$$

Ravshanki, (2) qator $L|x| < 1$, ya'ni

$$|x| < \frac{1}{L}$$

da yaqinlashuvchi, (2) qator $L|x| > 1$, ya'ni

$$|x| > \frac{1}{L}$$

da uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, (1) qator $|x| < \frac{1}{L}$ da yaqinlashuvchi, $|x| > \frac{1}{L}$ da uzoqlashuvchi bo'lib, undan (1) qatorning yaqinlashish radiusi $r = \frac{1}{L}$ ekanligi kelib chiqadi.$\rhd$

Eslatma. (1) darajali qator $x = r$, $x = -r$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo‘lishi ham mumkin, uzoqlashuvchi bo‘lishi ham mumkin. Uni qo‘shimcha tekshirish bilan aniqlanadi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1} + ...$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali topilsin.

$\lhd$ Ravshanki,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad a_{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

bo‘lib,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

bo‘ladi. Demak berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r = 1$, yaqinlashish intervali $(-1, 1)$.

Agar $x = 1$ bo‘lsa, berilgan qator ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

ko‘rinishida bo‘lib, u (garmonik qator bo‘lgani uchun) uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Agar $x = -1$ bo‘lsa, berilgan qator ushbu

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ... + (-1)^n \frac{1}{n} + ...$$

ko‘rinishda bo‘lib, u (Leybnits teoremasiga ko‘ra) yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlanish sohasi $[-1, 1)$.$\rhd$

3. Darajali qatorning xossalari

Aytaylik, (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r (r > 0)$, yaqinlashish intervali $(-r, r)$ bo‘lsin. Bu qatorning xossalarini keltiramiz:

1-xossa. (1) darajali qator $[-c, c]$ segmentda $(0 < c < r)$ tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi;

2-xossa. (1) darajali qatorning yig‘indisi $S(x)$ funksiya $(-r, r)$ da uzluksiz bo‘ladi;

3-xossa. (1) darajali qatorni $(-r, r)$ da hadlab differensiallash mumkin, ya’ni

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

bo‘lsa,

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + na_2 x^{n-1} + ...$$

bo‘ladi;

4-xossa. (1) darajali qatorni $(-r, r)$ intervalga tegishli bo‘lgan $[a, b]$ oraliq bo‘yicha hadlab integrallash mumkin:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx.$$

Xususan, $a = 0$, $b = x$ ($|x| < r$) da

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + ... + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + ...$$

bo‘ladi.

4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Teylor qatori

Ma’luimki, $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

bo‘lib,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

uning qoldiq hadi bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya

$$(x_0 - r, x_0 + r)$$

da istalgan tartibli hosilaga ega bo‘lsin. Bu hol yuqoridagi Teylor formulasidagi hadlarning sonini har qancha katta qilib olish imkonini beradi. Natijada $x - x_0$ ning darajalari bo‘yicha ushbu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... \quad (1)$$

darajali qator hosil bo‘ladi. Bu darajali qatorning koeffitsiyentlari $f(x)$ funksiya va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalangan:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, ...$$

(1) qator Teylor qatori deyiladi.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervalda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo‘lib, barcha hosilalar absolyut qiymati bo‘yicha $(x_0 - r, x_0 + r)$ oraliqda bitta o‘zgarmas sondan kichik yoki teng bo‘lsa,

$$|f^n(x)| \leq M \ \ (n = 1, 2, 3, ...), \quad (2)$$

u holda

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

bo‘ladi.

$\lhd$ $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

ni olib, uning qoldiq hadi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ \ (0 < \theta < 1)$$

ni baholaymiz:

$$|R_n(x)| = \frac{f^{n+1}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ushbu
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mr^{n+1}}{(n+1)!}$$
qatorni, Dalamber alomatidan foydalanib, yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Modomiki, qator yaqinlashuvchi ekan, qator yaqinlashuvchiligining zaruriy shartiga binoan
$$\lim_{n\to\infty} M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0$$
bo'ladi. Bundan
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$
kelib chiqadi. Bu (1) tenglikning o'rinliligini ko'rsatadi.$\triangleright$

Odatda, (1) munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyilgan (Teylor qatoriga yoyiladi) deyiladi.

Xususan, (1) Teylor qatorida $x_0=0$ deyilsa, u holda
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (3)$$
qator hosil bo'ladi.

(3) qator **Makloren qatori** deyiladi.

5. Ba'zi elementlar funksiyalarning Makloren qatorlari

Ushbu $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\ln(1+x)$, $f(x)=(1+x)^\alpha$ funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilishini keltiramiz:

1) $f(x)=e^x$ bo'lsin. Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)=e^x$ bo'lib,
$$f(0)=1, \quad f^{(n)}(0)=1 \quad (n=1,2,3...)$$
bo'ladi. Ayni paytda ixtiyoriy $[-A,A]$ $(A>0)$ oraliqda
$$|f^{(n)}(x)|=e^x<e^A \quad (n=1,2,...)$$
tengsizlik bajariladi. Demak, 1-teoremaga ko'ra
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (1)$$

yoyilma barcha x larda o'rinli;

2) $f(x) = \sin x$ **bo'lsin.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'lib,

$$f(0) = 0, \;\; f^{(n)}(0) = 0 \;\; (n = 2m, \; m \in \mathbb{N})$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^m \;\; (n = 2m+1, \; m \in \mathbb{N})$$

bo'ladi. Bu funksiyaning hosilalari uchun

$$|f^{((n))}(x)| \leq 1$$

tengsizlik bajariladi. Demak, 1-teoremaga ko'ra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$$

yoyilma barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ da o'rinli bo'ladi;

3) $f(x) = \cos x$ **bo'lsin.** Bu holda yuqoridagiga o'xshash

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

yoyilma barcha $x \in (-\infty, +\infty)$ da o'rinli bo'ladi;

4) $f(x) = \ln(1+x)$ **bo'lsin.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

bo'lib,

$$f(0) = 0, \;\; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

bo'ladi.

Demak, ushbu

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

yoyilma ixtiyoriy $x \in (-1, 1]$ da o'rinli bo'ladi;

5) $f(x) = (1+x)^\alpha$ **bo'lsin** $(\alpha \in \mathbb{R})$**.** Bu funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

bo'lib,

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

bo'ladi.

Demak, ushbu

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...$$

yoyilma ixiyoriy $x \in (-1,1)$ da o'rinli bo'ladi.

Xususan, bu formulada $\alpha = -1$ bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

bo'ladi. Bu tenglikda x ni x^2 ga almashtirib,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1)$$

bo'lishini topamiz.

7-§. Darajali qatorlarning ba'zi tatbiqlari

Darajali qatorlar yordamida ko'pgina masalalar hal etiladi. Ulardan funksiyalarning qiymatlarini topishda, aniq integrallarni taqribiy hisoblashda, differensial tenglamalarni yechishda foydalaniladi.

a) funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblash. Ko'p masalalarda funksiyaning biror nuqtadagi qiymatini hisoblashga to'g'ri keladi. Ammo funksiyaning murakkab bo'lishi uning shu nuqtadagi qiymatini topishni juda qiyinlashtiradi. Bunday hollarda qaralayotgan funksiyani darajali qatorga yoyib, so'ng bu yoyilmaning bir nechta hadini olib, uning yordamida funksiya qiymati taqribiy hisoblanadi.

Misollar. 1. $f(x) = \ln x$ funksiyaning $x_0 = 1.1$ nuqtadagi qiymati taqribiy hisoblansin.

$\lhd$ Ravshanki,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

formula $x \in (-1, 1]$ da o'rinli. Bu qatorda $x = 0.1$ deb topamiz:

$$\ln(1+0.1) = \ln 1.1 = 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3} - \frac{0.1^4}{4} + ...$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidan to'rtinchi hadi $\frac{0.1^4}{4}$ absolyut qiymat bo'yicha 0.0001 dan kichik. Demak $\ln 1.1$ ni taqribiy hisoblash uchun qatorning dastlabki uchta hadini olish yetarli:

$$\ln 1.1 \approx 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{3} = 0.1 - \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} \approx 0.0953. \rhd$$

2. Ushbu

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

funksiyaning $x_0 = 130$ nuqtadagi qiymati $0,0001$ aniqlikda, taqribiy hisoblansin.

$\lhd$ Ravshanki,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$$

Endi

$$f(130) = \sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ni e'tiborga olib, yuqoridagi qatorga

$$x = \frac{1}{25}, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

deb topamiz:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3\cdot 5^2} - \frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4} + \frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6} - ...$$

Agar bu qatorning dastlabki uchta hadini olsak, unda

$$f(130) = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5\left(1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}\right)$$

taqribiy formula hosil bo'ladi. Hisoblashlarni bajarib topamiz:

$$5\left(1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}\right) = 5+0.06667-0.00089 = 5.06578,$$

$$\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 4!\cdot 5^6} = \frac{1}{81625} < 0.0001.$$

Demak,

$$f(130) = \sqrt[3]{130} \approx 5.06578. \triangleright$$

b) integralning qiymatini taqribiy hisoblash. Fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalarni yechish ma'lum funksiyalarning integrallarini hisoblashga keltiriladi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo'lsa, tegishli aniq integralni hisoblash qiyin va uni taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi. Integrallarni taqribiy hisoblash usullaridan biri integral ostida funksiyani darajali qatorga yoyishga asoslangan. Ayni paytda, shunday integrallar borki, masalan,

$$\int_a^b e^{-x^2}dx, \quad \int_a^b \sin x^2 dx, \quad \int_a^b \cos x^2 dx$$

integrallar faqat darajali qatorga yoyishi bilan hisoblanadi.

Misollar 1. Ushbu

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$$

integral taqribiy hisoblansin.

$\triangleleft$ Ma'lumki,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Shu yoyilmadan foydalanib topamiz:

$$e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$$

Bu tenglikni integrallaymiz:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + ...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{4^7\cdot 3!\cdot 7} + ...$$

Agar bu qatorning dastlabki uchta hadi olinsa, unda

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 2!\cdot 5} = 0.250000 - 0.005208 + 0.000098 = 0.244890$$

bo‘lib,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0.24489$$

bo‘ladi. Bu taqribiy tenglikning xatoligi

$$\frac{1}{4^7 3! 7} < 0.0001.\triangleright$$

2. Ushbu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}dx$$

integral 0.001 aniqlikda taqribiy hisoblansin.

$\triangleleft$ Avvalo integral ostidagi funksiyani darajali qatorga yoyamiz. Buning uchun

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$$

formulani qo‘llaymiz. U holda

$$\sqrt{1+x^3} = (1+x^3)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} + ...$$

bo‘ladi. Bu tenglikni $[0, \frac{1}{2}]$ oraliq bo‘yicha integrallab topamiz:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} + ...\right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5x^{13}}{1664} + ...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{160} \cdot \frac{1}{2^{10}} - \frac{5}{1664} \cdot \frac{1}{2^{13}} + ...$$

Modomiki,

$$\frac{1}{56 \cdot 2^7} = \frac{1}{56 \cdot 128} = \frac{1}{7168} < 0.001$$

ekan, u holda integralni ko‘rsatilgan aniqlikda taqribiy hisoblash uchun oxirgi qatorning dastlabki ikkita hadini olish yetarli. Demak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} \approx 0.508. \triangleright$$

d) Differensial tenglamalarni yechish. Ko‘p differensial tenglamalar aniqmas integrallar yordamida yechilavermaydi va ularning yechimlari elementar funksiyalar orqali ifodalanavermaydi. Bunday tenglamalarning yechimlari ko‘pincha biror oraliqda yaqinlashuvchi darajali qatorlar bilan ifodalanishi mumkin.

Differensial tenglamaning yechimi bo‘lgan darajali qator ikki usul: noma’lum koeffitsiyentlar usuli va Teylor (Makloren) qatorini tatbiq etish usuli bilan topiladi.

1. Noma’lum koeffitsiyentlar usuli.

Ushbu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

chiziqli differensial tenglamani qaraylik.

Aytaylik, bu tenglamaning barcha koeffitsiyentlari $p_k(x)$ $(k = 1, 2, 3...,$ $n)$ va ozod had $f(x)$ funksiyalar $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha, biror oraliqda yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyilgan bo'lsa, u holda differensial tenglamaning izlanayotgan yechimi ham $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha o'sha oraliqda yaqinlashuvchi quyidagi

$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_n(x - x_0)^n + ... \qquad (2)$$

darajali qator ko'rinishida izlanadi. Bunda noma'lum

$$c_0, c_1, c_2, ...c_n, ...$$

koeffitsiyentlar quyidagicha topiladi:

$y(x)$ va hosilalarini (1) tenglamaga qo'yiladi. Natijada (1) tenglamani har ikki tomonida $(x - x_0)$ darajalari bo'yicha yoyilgan darajali qatorlar hosil bo'ladi. So'ng $(x - x_0)$ va unig bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlar tenglashtirilib, hosil bo'lgan tenglamalardan $c_0, c_1, c_2, ...$ lar topiladi.

Misol. Ushbu

$$(1 - x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2$$

differensial tenglamaning yechimi topilsin.

◁ Bu differensial tenglamani yechilishini quyidagi

$$y = y(x) = c_0 + c_1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + ...$$

ko'rinishida izlaymiz.

Ravshanki,

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + ...;$$

$$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + 4 \cdot 5c_5x^3 + ...$$

y, y', y'' larning bu ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yib topamiz:

$$(1 - x)(2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + 4 \cdot 5c_5x^3 + ...)+$$

$$+x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + ...) -$$

$$-(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + ...) = x^2 - 2x + 2$$

Oxirgi tenglik ayniyat bo'lib, uni quyidagicha yozib olamiz:

$$(2c_2 - c_0) + (2 \cdot 3c_3 - 2c_2 + c_1 - c_1)x + (3 \cdot 4c_4 - 2 \cdot 3c_3 + 2c_2 - c_2)x^2 +$$

$$+(4\cdot 5c_5 - 3\cdot 4c_4 + 3c_3 - c_3)x^3 + (5\cdot 6c_6 - 4\cdot 5c_5 + 4c_4 - c_4)x^4 + ... = x^2 - 2x + 2.$$

Bu ayniyatda, x ning bir xil darajali oldidagi koeffitsiyetlarini tenglab ushbu

$$2c_2 - c_0 = 2$$

$$2 \cdot 3c_3 - 2c_2 = -2$$

$$3 \cdot 4c_4 - 2 \cdot 3c_3 + c_2 = 1$$

$$4 \cdot 5c_5 - 3 \cdot 4c_4 + 2c_3 = 0$$

$$5 \cdot 6c_6 - 4 \cdot 5c_5 + 3c_4 = 0$$

....

sistemaga kelamiz. Sistemani yechib topamiz:

$$c_2 = \frac{2 + c_0}{2} = 1 + \frac{c_0}{2},$$

$$c_3 = \frac{c_0}{6} = \frac{c_0}{3!},$$

$$c_4 = \frac{c_0}{24} = \frac{c_0}{4!},$$

$$c_5 = \frac{c_0}{120} = \frac{c_0}{5!},$$

$$c_6 = \frac{c_0}{720} = \frac{c_0}{6!},$$

....

Demak, izlanayotgan yechim barcha x larda yaqinlashuvchi

$$y = c_0 + c_1x + (1 + \frac{c_0}{2})x^2 + \frac{c_0}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 + \frac{c_0}{5!}x^5 + \frac{c_0}{6!}x^6 + ...$$

darajali qator bo‘ladi. Bu berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi:

$$y = c_0(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...) + (c_1 - c_0)x + x^2 = c_1^* e^x + c_2^* x + x^2$$

bunda, $c_1^* = c_0$, $c_2^* = c_1 - c_0$ ixtiyoriy o‘zgarmas.▷

2. Teylor qatorini tatbiq etish usuli

Bu usulda berilgan differensial tenglamaning yechimi $y = y(x)$ ni Teylor qatori

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

ko‘rinishda izlanadi. Bunda, qatorning koeffitsiyentlari berilgan differensial tenglamaning ketma-ket differensiallash bilan topiladi.

Aytaylik,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

differensial tenglamaning

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi yechimini topish talab etilsin.

Bu tenglamaning yechimini

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... \tag{2}$$

Teylor qatori ko‘rinishida izlaymiz.

Ravshanki, $y(x_0) = y_0$. Bu x_0 va y_0 larni (1) tenglamaga qo‘yib

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

bo‘lishini topamiz va (1) tenglamani differensiallaymiz:

$$(y')' = (f(x, y))', \quad y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)y'.$$

Keyingi tenglikdan

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0)$$

kelib chiqadi. Shu jarayonni davom ettirib

$$y'''(x_0),\ y^{(\text{IV})(x_0)},...$$

lar topiladi. Natijada berilgan tenglamaning yechimi

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Misol. Ushbu

$$y' = xy + y^2 \tag{3}$$

differensial tenglamaning $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$\lhd$ Berilgan differensial tenglamaning yechmini ushbu

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

ko‘rinishda izlaymiz. Modomiki, $x_0 = 0, \quad y_0 = 1$ ekan, unda

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + ... \tag{4}$$

Berilgan tenglama va boshlang‘ich shartdan

$$y_0 = 1,\ \ y'(0) = 0 \cdot 1 + 1^2 = 1$$

ni topamiz.

Endi tenglamani har ikki tomonini differensiallaymiz:

$$(y')' = (xy + y^2)', \quad y'' = y + xy' + 2yy'. \tag{5}$$

Keyingi tenglikdan

$$y''(0) = 1 + 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

kelib chiqadi.

5) tenglikning har ikki tomonini differensiallab topamiz:

$$(y'')' = (y + xy' + 2yy')' = 2y' + xy''2({y'}^2 + yy'').$$

Natijada

$$y'''(0) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2(1^2 + 1 \cdot 3) = 10$$

bo'ladi.

Shu jarayonni davom ettira borib, (2) tenglikdagi $y^{(IV)}(0)$, $y^{(V)}(0)$, ... larni topish mumkin.

Demak, berilgan tenglamaning yechimi

$$y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + ... \triangleright$$

8-§. Furye qatorlari

1. Dastlabki ma'lumotlar

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da aniqlangan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$f(x+T) = f(x) \quad (T = const, T \neq 0)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, T esa uning davri deyiladi. Masalan,

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

funksiyalar davriy funksiya bo'lib, ularning davri $T = 2\pi$ ga teng.

Agar $T \neq 0$ son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, nT ham (n ixtiyoriy butun son) shu funksiyaning davri bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ davriy funksiyalar bo'lib, T ularning davri bo'lsa,

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham davriy bo'lib, ularning davri T ga teng.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri T ga teng bo'lsin. Agar bu funksiya grafigining tasviri $[a, a+T]$ da ($a \in \mathbb{R}$) ma'lum bo'lsa, uni birin-ketin

$$x = a + kT \quad (k = \pm 1, \pm 2, ...)$$

vertikal to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ko‘chirish natijasida $f(x)$ funksiyaning $(-\infty, +\infty)$ dagi grafigi hosil bo‘ladi. Bu jarayon $[a, a+T]$ da berilgan $f(x)$ funksiyani $(-\infty, +\infty)$ ga davriy davom ettirish deyiladi.

Shuni aytish kerakki, T davrli $f(x)$ funksiya $[a, a+T]$ da uzluksiz bo‘lsa, uni $(-\infty, +\infty)$ ga davriy davom ettirishdan hosil bo‘lgan funksiya (uni ham ko‘pincha $f(x)$ funksiya deyiladi) $(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz yoki bo‘lakli uzluksiz ($x = a+kT$ nuqtalarda uzilishga ega, boshqa nuqtalarda uzluksiz) bo‘lishi mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya davriy funksiya, uning davri T ga teng bo‘lib, funksiya $[a, a+T]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

bo‘ladi. Haqiqatdan ham,

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^T f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx = \Big(x = T+u, \;\; dx = du\Big) =$$

$$= \int\limits_a^T f(x)dx + \int\limits_0^a f(u)du = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_a^T f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx$$

bo‘ladi.

Ushbu

$$f(x) = A\sin(\alpha x + \beta)$$

ko‘rinishdagi funksiya **garmonika** deyiladi, bunda A, α, β – o‘zgarmas sonlar. Garmonika davriy funksiya bo‘lib, uning davri $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ bo‘ladi. Haqiqatdan ham,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = A\sin\left[\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) + \beta\right] =$$

$$= A\sin(\alpha x + \beta + 2\pi) = A\sin(\alpha x + \beta).$$

Garmonikani quyidagicha

$$f(x) = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$$

ham yozish mumkin, bunda $a = A\sin\beta, \quad b = A\cos\beta$.

2. Furye qatori tushunchasi

Har bir hadi

$$u_n(x) = a_n\cos nx + b_n\sin nx \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

garmonikadan iborat ushbu

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

funksional qator **trigonometrik qator** deyiladi, bunda a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... sonlar trigonometrik qatorning **koeffitsiyentlari** deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ da berilgan bo'lib, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda

$$f(x)\cos nx, \quad f(x)\sin nx \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

funksiyalar ham integrallanuvchi bo'ladi. Ularning integrallarini quyidagicha belgilaymiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \ \ (n = 1, 2, 3...). \tag{1}$$

Bu sonlar yordamida tuzilgan ushbu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{2}$$

qator trigonometrik qator bo‘lib, u

$$a_0, a_1, b_1, b_2, ...a_n, b_n, ...$$

koeffitsiyentlar bilan to‘la aniqlanadi.

1-ta’rif. Koeffitsiyentlarni (1) formulalar bilan aniqlangan (2) trigonometrik qator $f(x)$ funksiyaning **Furye qatori** deyiladi. Bunda

$$a_0, a_1, b_1, b_2, ...a_n, b_n, ...$$

sonlar **Furye koeffitsiyentlari** deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning Furye qatori shunday trigonometrik qator ekanki, uning koeffitsiyentlari $f(x)$ funksiyaga bo‘gliq bo‘lib, ular (1) formulalar yordamida aniqlanadi. Shuni e’tiborga olib, $f(x)$ funksiyaning Furye qatori quyidagicha yoziladi:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

Misol. Ushbu

$$f(x) = |x| \ \ (-\pi \le x \le \pi)$$

funksiya Furye qatori yozilsin.

◁ Avvalo (1) formuladan foydalanib Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} |x|dx + \int_{0}^{\pi} |x|dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} xdx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}2 \cdot \int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos nxdx =$$

$$= \left[u = x, du = dx, dv = \cos nxdx, v = \frac{\sin nx}{n}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = -\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin nx dx + \int\limits_0^{\pi} x \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx + \int\limits_0^{\pi} x\sin nx \right) = 0.$$

Demak, (2) formulaga ko‘ra berilgan funksiyaning Furye qatori

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...)$$

bo‘ladi.▷

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ da berilgan juft funksiya bo‘lib, u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx \left[x = -u,\ f(-u) = f(u),\ dx = -du, \right.$$

$$\left. \cos(-nx) = \cos(nx),\ x \in [-\pi, 0] \text{ da } u \in [\pi, 0] \right] + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx \Big[x = -u \Big] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

$(n = 1, 2, 3, ...)$.

Demak, juft funksiya $f(x)$ ning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \ \ (n = 0, 1, 2, 3, ...),$$

$$b_n = 0 \ \ (n = 1, 2, 3...)$$

bo‘lib, uning Furye qatori

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{4}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ da berilgan toq funksiya bo‘lib, u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx \Big[x = -u\Big] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$$

$(n = 0, 1, 2, 3...)$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx dx \Big[x = -u\Big] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \ \ (n = 1, 2, 3, ...).$$

Demak, toq funksiya $f(x)$ ning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3...),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

bo‘lib, uning Furye qatori

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{5}$$

bo‘ladi.

Misollar 1. Ushbu

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

funksiyaning Furye qatori yozilsin.

◁ Ravshanki, $f(x) = x^2$ juft funksiya. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx dx\right) = (-1)^n\cdot\frac{4}{n^2} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Demak, $f(x) = x^2$ funksiyaning Furye qatori (4) formulaga ko‘ra

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

bo‘ladi.▷

2. Ushbu

$$f(x) = x \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

funksiyaning Furye qatori yozilsin.

$\lhd$ Ravshanki, bu funksiya toq funksiya. Uning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Demak, $f(x) = x$ funksiyaning Furye qatori (5) formulaga ko‘ra

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

bo‘ladi. $\rhd$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[-\ell, \ell]$ segmentda $(\ell > 0)$ berilgan bo‘lib, u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. $[-\ell, \ell]$ oraliq, ushbu

$$t = \frac{\pi}{\ell}x \quad (x \in [-\ell, \ell])$$

almashtirilishi natijasida $[-\pi, \pi]$ ga o‘tadi $(t \in [-\pi, \pi])$. Agar

$$f(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) = \varphi(t)$$

deyilsa, unda $\varphi(t)$ funksiya $[-\pi, \pi]$ da berilgan va shu oraliqda integrallanuvchi bo‘ladi. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt dt, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

bo‘lib, Furye qatori

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)$$

bo‘ladi. Agar $t = \dfrac{\pi}{\ell}x$ bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$\varphi\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{\ell}x + b_n \sin n\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

bo‘lib,

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \varphi\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \cos n\frac{\pi}{\ell}x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \varphi\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \sin n\frac{\pi}{\ell}x dx$$

bo‘ladi. Natijada

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell} dx$$

bo‘ladi.

3. Furye qatorining yaqinlashuvchiligi

Biz yuqorida $f(x)$ funksiyaning Furye qatori ta’rifini keltirib, uni

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

kabi yozilishini ko‘rdik. Bunday “$\sim$” belgi orqali yozilishining ma’nosi trigonometrik qator koeffitsiyentlari $f(x)$ funksiya orqali topilishidan iboratligidadir.

Shuni aytish zarurki, Furye qatori ta’rifidan $f(x)$ funksiyani o‘zining Furye qatoriga yoyilishi, ya’ni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

funksional qatorning yaqinlashuvchiligi va uning yig'indisi $f(x)$ ga teng bo'lishi aslo kelib chiqmaydi. Ayni paytda, $f(x)$ funksiya ma'lum shartni bajarganda u Furye qatoriga yoyiladi. Bunday holda "$\sim$" belgi o'rniga "$=$" belgisi qo'yilishi mumkin.

Avvalo bitta tushunchani keltiramiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentga aniqlangan bo'lsin. Agar bu segment chekli sondagi segmentlarga ajratilgan bo'lib, har bir segmentning ichki nuqtalarida $f(x)$ differensiallanuvchi bo'lsa, $f(x)$ $[a,b]$ da **bo'lakli-differensiallanuvchi** funksiya deyiladi.

Endi Furye qatorining yaqinlashuvchiligi haqida teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. 2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da bo'lakli differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning Furye qatori

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$[-\pi,\pi]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yi'g'indisi $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ga teng.

Xususan, $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

bo'ladi.

III bob. Ba'zi matematik fizika tenglamalari

1-§. Xususiy hosilali differensial tenglama tushunchasi va torning tebranish tenglamasi

Ta'rif. Noma'lum ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning xususiy hosilalari qatnashgan tenglamalar **xususiy hosilali** differensial tenglamalar deyiladi.

Ko‘p hollarda ikki o‘zgaruvchili funksiyaga nisbatan ifodalangan differensial tenglamalar o‘rganiladi.

Masalan, noma’lum $u = u(x, y)$ funksiya va uning xususiy hosilalari qatnashgan ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

tenglamalar birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalar, ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

tenglamalar esa ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bo‘ladi.

Umuman, ikki o‘zgaruvchili $u = u(x, y)$ funksiyaning chiziqli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamasi ushbu

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y) \tag{1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bunda A, B, C, D, E, F lar o‘zgarmas sonlar, $f(x, y)$ esa berilgan funksiya.

Agar shunday

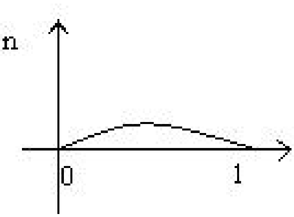
$$u = \varphi(x, y)$$

funksiya topilsaki, uni va uning xususiy hosilalrini (1) tenglamaga qo‘yilganda, tenglama ayniyatga aylansa, $u = \varphi(x, y)$ funksiya (1) tenglamaning **xususiy yechimi** deyiladi. (1) tenglamaning ma’lum shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalalaridan hisoblanadi.

Biz quyida ba’zi muayyan xususiy hosilali defferensial tenglamalarni qaraymiz. Ular fizika, mexanika va texnikada muhim rol o‘ynaydi. Shuning uchun ham bunday differensial tenglamalar **matematik fizika tenglamalari** deyiladi.

Masala. Ox o'qi bo'yicha tarang qilib tortilgan va koordinatalar boshi $(0,0)$ hamda $(l,0)$ nuqtalarda $(l > 0)$ mustahkamlangan torni qaraylik. Bu torning muvozanat holatidagi taranglik kuchi T bo'lsin. Agar tashqi kuch ta'sirida tor muvozanat holatidan qo'zg'atilsa, unda torning tebranma harakati sodir bo'ladi.

Bu harakatda tordagi har bir x nuqta Ox o'qiga perpendikulyar hamda har bir momentda xOu tekislikda joylashgan holda o'zgaradi (1-chizma).



1-chizma.

Umuman aytganda kuch ta'sirida torning uzunligi ham, taranglik kuchi ham o'zgaradi. Biz torning kichik tebranishini qaraymizki, bunda torning uzunligi ham, taranglik kuchi ham o'zgarmay qolsin deb faraz qilamiz.

Aytaylik, $u = u(x,t)$ funksiya tor nuqtasining harakat qonunini ifodalasin. Bu funksiyaning o'rganish maqsadida torning x va $x + \Delta x$ nuqtalar oralig'ini olamiz. Bu oraliqning chetki nuqtalari miqdori T ga teng bo'lgan T_1 va T_2 taranglik kuchi ta'sirida bo'lib, ular shu nuqtalar bo'yicha turli tomonga yo'nalgan bo'ladi (2-chizma).

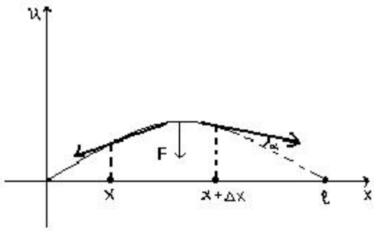
Taranglik kuchlarining Ox o'qidagi proyeksiyalari yig'ndisi

$$-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2. \tag{2}$$

Oy o'qidagi proyeksiyalar yig'indisi esa

$$-T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 \tag{3}$$

bo'ladi.



2-chizma.

Yuqoridagi farazimizga ko‘ra $\cos\alpha = 1$, $T_1 = T_2 = T$ hamda

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha = u'_x(x,t)$$

bo‘lishini e’tiborga olib, (2) yig‘indining 0 ga tengligini, (3) yig‘indini esa

$$T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = T(u'_x(x+\triangle x,t) - u'_x(x,t))$$

bo‘lishini topamiz.

Lagranj teoremasiga binoan

$$u'_x(x+\triangle x,t) - u'_x(x,t) = u''_{xx}(c,t)\cdot\triangle x(x < c < x+\triangle x)$$

bo‘ladi.

Ma’lumki, torning $[x, x+\triangle x]$ oraliqdagi qismining massasi $\rho\cdot\triangle x$ bo‘ladi, bunda ρ – chiziqli zichlik.

Agar $u''_{tt}(x,t)$ ning tezlanish ekanligini e’tiborga olsak, u holda Nyuton qonuniga (massaning tezlanishga ko‘paytmasi ta’sir etuvchi kuchga teng) muvofiq

$$\rho\cdot\triangle x\cdot U''_{tt}(x,t) = T\cdot u''_{xx}(c,t)\cdot\triangle x,$$

ya’ni

$$\rho\cdot U''_{tt}(x,t) = T\cdot U''_{xx}(c,t)$$

bo‘lishini topamiz. Keyingi tenglikda $\triangle x \to 0$ da (bunda $c \to x$) limitga o‘tsak unda

$$\rho \cdot U''_{tt}(x,t) = T \cdot U''_{xx}(x,t)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Natijada tor nuqtasining harakat qonuni $u(x,t)$ ni aniqlab beradigan ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaga kelamiz.

Odatda, (4) tenglama **tor tebranishining tenglamasi** deyiladi.

Eslatma. Bir qator fizik masalalar, yuqorida keltirilgan tenglamaga keladi.

Ularning turli yechish usullari mavjud.

2-§. Torning tebranish tenglamasini Furye usuli yordamida yechish

Odatda, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning ma’lum shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinadi. Ma’lum shartlar qatoriga boshlang‘ich va chegaraviy shartlar kiradi.

Boshlang‘ich shart torning tebranish oldidagi vaqtda holatini va tezligini aniqlaydi. Ular ushbu shartlar

$$u(x,0) = f(x),$$

$$u'_t(x,0) = \varphi(x),$$

ya’ni

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$$

shartlar orqali ifodalanadi, bunda $f(x)$ va $\varphi(x)$ berilgan funksiyalar.

Tebranish jarayonida torning chetki nuqtalardagi holatini aniqlovchi shart chegaraviy shart bo‘ladi. Modomiki, torning chetki nuqtalari mahkamlangan ekan, unda chegaraviy shart quyidagicha

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

yoki

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0$$

ifodalanadi.

Demak, masala tor tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

ning ushbu boshlang‘ich shartlar

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5}$$

va chegaraviy shartlar

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0 \tag{6}$$

ni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

(4) tenglamaning xususiy yechimini ushbu

$$u(x,t) = A(x) \cdot B(t)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Ravshanki,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(x)B''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A''(x)B(t)$$

bo‘ladi. Unda (4) tenglama quyidagi

$$A(x)B''(t) = a^2 A''(x) \cdot B(t),$$

ya’ni

$$\frac{B''(t)}{a^2 B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

ko‘rinishga keladi.

Keyingi tenglikdan ko‘rinadiki, uning o‘ng tomoni t ga chap tomonini esa x ga bog‘liq emas. Binobarin, bu tenglik na t ga va na x ga bog‘liq bo‘ladi.

Demak, nisbat o‘zgarmas.

Ayni paytda $u(x,t) > 0$ da torning holati qavariq bo‘lganligi sababli $u''_{xx}(x,t) < 0$ bo‘lib,

$$u(x,t) = A(x)B(t), \quad u''_{xx}(x,t) = A''(x) \cdot B(t)$$

larning ishoralari qarama-qarshi va ushbu

$$\frac{A''(x)}{A(x)}$$

nisbat manfiy ishorali bo‘ladi. Shularni e’tiborga olib

$$\frac{B''(t)}{a^2 B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda^2$$

deymiz. Natijada quyidagi

$$B''(t) + \lambda^2 a^2 B(t) = 0,$$

$$A''(x) + \lambda^2 A(x) = 0$$

oddiy differensial tenglamalrga ega bo‘lamiz va bu differensial tenglamalarning yechimlari

$$B(t) = C\cos\lambda at + D\sin\lambda at,$$

$$A(x) = E\cos\lambda x + F\sin\lambda x$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunday qilib (4) tenglamaning xususiy yechimi

$$u(x,t) = A(x) \cdot B(t) = (C\cos\lambda at + D\sin\lambda at)(E\cos\lambda x + F\sin\lambda x)$$

bo‘ladi.

Chegaraviy shartlardan foydalanib topamiz:

$$u(0,t) = (C\cos\lambda at + D\sin\lambda at)\cdot E = 0, \tag{5}$$

$$u(l,t) = (C\cos\lambda at + D\sin\lambda at)F\sin\lambda l = 0. \tag{6}$$

(5) tenglikdan $E = 0$ boʻlishi kelib chiqadi. (6) tenglikda esa λ ni shunday tanlaymizki,

$$\sin\lambda l = 0;\;\; \lambda l = k\pi,\;\; \lambda = \frac{k\pi}{l}$$

boʻlsin. Natijada (4) tenglamaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi ushbu

$$u_k(x,t) = \left(C'\cos\frac{k\pi}{l}t + D'\sin\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

xususiy yechimiga ega boʻlamiz, bunda $C' = CF$, $D' = DF$.

Bunday xususiy yechimlar cheksiz koʻp boʻlib, qaralayotgan tenglama chiziqli boʻlganligi sababli, bu xususiy yechimlar yigʻindisi ham yechim boʻladi:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi}{l}t)sin\frac{k\pi}{l}x$$

Endi boshlangʻich shartlardan foydalanib a_k va b_k larni topamiz:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Bu $f(x)$ funksiyaning sinuslar boʻyicha Furye qatoridir. Demak,

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \;\; (k = 1, 2, 3, ...). \tag{7}$$

Ravshanki,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi}{l}t + b_k\cos\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

bo‘lib, $t=0$ da

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

bo‘ladi. Bundan esa

$$\frac{k\pi a}{l}b_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

ya’ni

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \tag{8}$$

bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib (4) tor tebranish tenglamasining (5) boshlang‘ich, hamda (6) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k sin\frac{k\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

korinishda bo‘ladi. Bundagi a_k va b_k lar (7) va (8) munosabatlardan topiladi.

3-§. Issiqlikning tarqalish tenglamasi

Masala. Ox o‘qi bo‘yicha joylashgan va notekis qizdirilgan sterjenni qaraylik. Bu sterjen tashqi muhitdan issiqlik tarqalishidan saqlangan bo‘lsin. Bu holda sterjenning qattiqroq qizdirilgan qismi bilan kamroq qizdirilgan qismi orasida issiqlik almashinishi (issiqlik tarqalishi) sodir bo‘ladi. Masalan, boshlang‘ich vaqtda sterjen nuqtasidagi (nuqta bo‘yicha kesimidagi) harorat x ning olinishi bilan kamaysa, unda vaqt o‘tishi bilan issiqlik oqimining Ox o‘qi bo‘yicha musbat tomonga harakati yuzaga keladi.

Agar t momentga sterjenning x nuqtasidagi (sterjen kesimidagi) haroratni $u = u(x,t)$ deyilsa, unda $u'_t(x,t)$ xususiy hosila t momentda berilgan x kesimda haroratning ko‘tarilish tezligini, $u'_x(x,t)$ xususiy hosila esa sterjenning x nuqtasiga bog‘liq ravishda haroratning o‘zgarish tezligini bildiradi.

Agar $u'_x(x,t) \equiv 0$ bo‘lsa, unda harorat x ga bog‘liq bo‘lmay u sterjenda o‘zgarmas bo‘ladi.

Agar $u'_x(x,t) < 0$ bo‘lsa, unda sterjenning x nuqtasi tobora o‘ng tomonga o‘zgarganda harorat tobora kamaya boradi.

Fizikaning qonuniga ko‘ra sterjen kesimidan o‘tuvchi issiqlik oqimi (miqdori) sterjen kesimining yuzi S ga haroratning farqlanishiga hamda vaqt oralig‘i $\triangle t$ ichida abssissasi x bo‘lgan sterjen kesimi orqali o‘tuvchi (tarqaluvchi) issiqlik oqimi

$$Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\triangle t$$

bo‘ladi, bunda k koeffitsiyent sterjenning yasalgan materialiga bog‘liq.

Endi sterjenning abssissalari x va $x + \triangle x$ bo‘lgan kesimlari orasida issiqlik miqdorining va haroratning o‘zgarishini qaraymiz.

Yuqorida aytganimizdek, abssissasi x bo‘lgan sterjen kesimi orqali $\triangle t$ vaqt ichida o‘tgan issiqlik miqdori

$$Q = -kS\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\triangle t$$

bo‘ladi.

Shuningdek, abssissasi $x+\triangle x$ bo‘lgan sterjen kesimi o‘tishi bilan issiqlik oqimining Ox o‘qi bo‘yicha musbat tomonga harakati yuzaga keladi.

Agar t momentga sterjenning x nuqtasidagi (sterjen kesimidagi) haroratni $u = u(x,t)$ deyilsa, unda $u'_t(x,t)$ xususiy hosila t momentda berilgan x kesimda haroratning ko‘taraolish tezligini, $u'_t(x,t)$ xususiy hosila esa, sterjenning x nuqtasiga bog‘liq ravishda haroratning o‘zgarish tezligini bildiradi.

Agar $u'_t(x,t) \equiv 0$ bo‘lsa, unda harorat x ga bog‘liq bo‘lmay u sterjenda o‘zgarmas bo‘ladi.

Agar $u'_t(x,t) < 0$ bo‘lsa, unda sterjenning x nuqtasi tobora o‘ng tomonga o‘zgarganda harorat tobora kamaya boradi.

Fizikaning qonuniga ko‘ra sterjen kesimidan o‘tuvchi issiqlik oqimi (miqdori) sterjen kesimining yuzi S ga, haroratning farqlanishiga hamda vaqt oralig‘iga proporsional bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, kichik vaqt oralig‘i $\triangle t$ ichida abssissasi x bo‘lgan sterjen kesimi orqali o‘tuvchi (tarqaluvchi) issiqlik oqimi

$$Q = -kS\triangle t$$

bo‘ladi, bunda k koeffitsiyenti yasalgan materialiga bog‘liq.

Endi sterjenning abstissalari x va $x + \triangle x$ bo‘lgan kesimlari orasida issiqlik miqdorining va haroratning o‘zgarishini qaraymiz.

Yuqorida aytganimizdek, abssissasi x bo‘lgan sterjen kesimi orqali $\triangle t$ vaqt ichida o‘tgan issiqlik miqdori

$$Q = -kS\triangle t$$

bo‘ladi.

Shuningdek, abssissasi $x+\triangle x$ bo‘lgan sterjen kesimi orqali shu $\triangle t$ vaqt ichida o‘tgan issiqlik miqdori

$$Q - \triangle Q = -kS\triangle t$$

bo‘lib,

$$\triangle Q = kS\left[\frac{\partial u(x+\triangle x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]\triangle t = kS\frac{\partial^2 u(x+\theta\triangle x,t)}{\partial x}\triangle x\triangle t$$

$(0 < \theta < 1)$ bo‘ladi.

Ayni paytda sterjen orqali, uning x va $x + \triangle x$ kesimlari orasida o‘tgan issiqlik miqdori $\triangle Q$ shu oraliqda haroratni

$$\triangle u = c\frac{\triangle Q}{\triangle m}$$

ga o‘zgarishiga olib keladi, bunda $\triangle m$ – massa, c esa – sterjenning solishtirma issiqlik hajmi.

Ma’lumki, $\triangle m = \rho \cdot S \cdot \triangle x$, bunda ρ – sterjenning chiziqli zichligi.

Natijada

$$\triangle u = \frac{c}{\rho S}\frac{\triangle Q}{\triangle m} = \frac{c}{\rho S} kS \frac{\partial^2 u(x+\theta\triangle x, t)}{\partial x}\triangle t = \frac{kc}{\rho}\frac{\partial^2 u(x+\theta\triangle x, t)}{\partial x}\triangle t$$

bo‘lib,

$$\frac{\triangle u}{\triangle t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x+\theta\triangle x, t)}{\partial x}, \quad a^2 = \frac{kc}{\rho}$$

bo‘ladi.

Keyingi tenglikda $\triangle t \to 0$ va $\triangle x \to 0$ da limitga o‘tib

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{7}$$

bo‘lishini topamiz.

Odatda, (7) tenglama **issiqlik tarqalish tenglamasi** deyiladi.

4-§. Issiqlik tarqalish tenlamasini Furye usuli yordamida yechish

Aytaylik, Ox o‘qida joylashgan, uchlari $x = 0$, $x = l$ nuqtalarda bo‘lgan sterjenning issiqlik tarqalishi tenglamasi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

ni qaraylik.

Chegaraviy shartlar sterjenning chegaralarida vaqtga bog‘liq bo‘lgan haroratni berilishi bilan ifodalanadi. Biz sterjenning chegaralarida harorat o‘zgarmas bo‘lib, u nolga teng bo‘lsin deb qaraymiz:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0. \tag{8}$$

Vaqtning boshlanish momentida sterjen nuqtalarida haroratning tarqalishini berilishi bilan boshlang‘ich shart aniqlanadi. Demak,

$$u\Big|_{t=0} = f(x). \tag{9}$$

(8) va (5) munosabatlardan $f(0) = f(l) = 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Masala, issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{7}$$

ning chegaraviy (8) shartlarni hamda boshlang‘ich (9) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat

(7) tenglamaning xususuy yechimini ushbu

$$u(x,t) = A(x) \cdot B(t)$$

ko‘rinishda izlaymiz. Ravshanki,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A(x) \cdot B'(t), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = A''(x) \cdot B(t)$$

bo‘ladi.

Bu xususiy hosilalarni (7) ga qo‘yib topamiz:

$$A(x) \cdot B'(t) = a^2 A''(x) B(t).$$

Keyingi tenglikdan

$$\frac{1}{a^2}\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Ravshanki, tenglikning ikki tomoni x va t larga bog‘liq bo‘lmaydi. Binobarin, nisbat o‘zgarmas bo‘ladi:

$$\frac{1}{a^2}\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = -\lambda^2$$

Natijada quyidagi

$$B'(t) + a^2\lambda^2 B(t) = 0,$$

$$A''(x) + \lambda^2 A(x) = 0$$

differensial tenglamalarga kelamiz. Bu differensial tenglamalarning yechimlari

$$B(t) = ce^{-a^2\lambda^2 t},$$

$$A(x) = D\cos\lambda x + E\sin\lambda x$$

bo‘ladi.

Shunday qilib (7) tenglamaning xususiy yechimi

$$u(x,t) = (D\cos\lambda x + E\sin\lambda x + E, \sin\lambda x)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

bo‘ladi (bunda ixtiyoriy o‘zgarmaslar Dc va Ec larni yana D va E deb olindi.)

Chegaraviy shartlardan foydalanib topamiz:

$$u(0,t) = De^{-a^2\lambda^2 t} \equiv 0,$$

demak, $D = 0$;

$$u(l,t) = E\sin l\lambda e^{-a^2\lambda^2 t} \equiv 0,$$

demak, $\sin\lambda l = 0$, $\lambda l = k\pi$, $\lambda = \dfrac{k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$.

Natijada chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (7) tenglamaning cheksiz ko‘p xususiy yechimlari

$$u_k(x,t) = E_k \sin\frac{k\pi}{l} x e^{-a^2\frac{k^2\pi^2}{l}t}$$

ga ega bo‘lamiz. Ravshanki, ularning yig‘indisi

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin\frac{k\pi}{l} x e^{-a^2\frac{k^2\pi^2}{l}t}$$

ham (7) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Boshlang‘ich shartdan foydalanib topamiz:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k sin\frac{k\pi}{l} x.$$

Keyingi tenglikdan E_k ning $f(x)$ funksiya Fur'ye qatorining koeffitsiyenti ekani ko'rinadi:

$$E_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Demak,

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{k\pi}{l} x e^{-a^2 \frac{k^2 \pi^2}{l} t},$$

bunda

$$E_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

qaralayotgan (7) tenglamaning (8) chegaraviy va (9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi.

Adabiyotlar

1. T. Azlarov, H. Mansurov. Matematik analiz, 2-qism, Toshkent, "O'zbekiston", 1995.

2. Б.А. Абдуалимов. Олий математика. Тошкент: "Ўқитувчи", 1994.

3. Р. Курант. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I, II. Москва, "Наука", 1970.

4. Н.С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл хисоб. 1, 2-том. Тошкент: "Ўқитувчи", 1974.

Mundarija

Kirish....3

I qism. Analitik geometriya, algebra va matematik analiz.... 4

I bob. Dastlabki ma'lumotlar 4

1-§. To'plamlar va kombinatorika elementlari.... 4

2-§. Cheksiz to'plamlar. Sonli to'plamlar....13

3-§. Haqiqiy sonlar va ular ustida amallar.... 19

4-§. Funksiyalar va grafiklar....25

5-§. Funksiyalarning asosiy turlari.... 27

6-§. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning tenglamalari....33

7-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar....46

8-§. Tekislikda koordinatalar sistemasini almashtirish.... 60

9-§. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi.... 66

10-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.... 70

11-§. Fazoda Dekart koordinatalari sistemasi....73

12-§. Vektorlar algebrasi va uning tatbiqlari....80

13-§. Fazodagi to'g'ri chiziq va tekisliklarning vektor tenglamalari....94

14-§. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini affin almashtirish. Ikkinchi tartibli sirtlar.... 98

15-§. Chiziqli algebraning asosiy tushunchalari....102

16-§. Matritsalar va ular ustida amallar....118

II bob. Matematik analizning dastlabki tushunchalari 144

1-§. Sonli ketma-ketliklar....144

2-§. Funksiyaning limiti....153

3-§. Funksiyaning uzluksizligi....161

4-§. Funksiyaning hosilasi....170

5-§. Hosilaning geometrik va mehanik ma'nolari....178

6-§. Funksiyaning differensiali. Yuqori tartibli hosila
va differensiallar........ 182
7-§. Asosiy teoremalar. Lopital qoidasi. Teylor formulasi........ 189
8-§. Hosilaning ba'zi bir tatbiqlari........ 199
II qism. Aniqmas va aniq integral........ 224
I bob. Aniqmas integral........ 224
1-§. Aniqmas integral tushunchasi........ 224
2-§. Asosiy formulalar........ 227
3-§. Integrallash usullari........ 231
4-§. Bo'laklab integrallash usuli........ 236
5-§. Ratsional funksiyalarni integrallash........ 239
6-§. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash........ 248
7-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash........ 255
II-bob. Aniq integral
1-§. Funksiyaning integral, yuqori va quyi integrallari
yig'indilari tushunchalari........ 259
2-§. Yuqori hamda quyi integral yig'indilarning limiti.
Aniq integral........ 264
3-§. O'rta qiymat haqidagi teoremalar. Chegarasi o'zgaruvchi
aniq integrallar........ 271
4-§. Chegarasi o'zgaruvchi aniq integrallar........ 274
5-§. Aniq integralni hisoblash........ 276
6-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash........ 285
7-§. Aniq integralning geometrik tatbiqlari........ 293
8-§. Aniq integralning mexanik va fizik tatbiqlari........ 311
9-§. Xosmas integrallar........ 315
III-bob. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar
1-§. Tekislik va undagi to'plamlar........ 325
2-§. Ikki o'zgaruvchi funksiya uning limiti, uzluksizligi........ 329

3-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning hosila va differensiyalari........... 339
4-§. Yo‘nalish bo‘yicha hosila... 346
5-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari. Teylor formulasi.. 353
6-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari.......................... 358
7-§. Karrali integrallar.. 363
8-§. Ikki karrali integrallarni hisoblash usullari................................ 369
9-§. Ikki karrali integrallarning ba’zi tatbiqlari................................ 378
10-§. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning integrali haqida qo‘shimcha ma’lumotlar. Egri chiziqli integrallar. Grin formulasi............ 382
IV bob. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar.......................... 394
1-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi. Funksiyaning limiti, uzluksizligi.. 394
2-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning hosilasi............................ 397
3-§. Konform akslantirishlar... 400
4-§. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning integrali.......................... 405
5-§. Funksiyaning maxsus nuqtasi.. 409
6-§. Funksiyaning chegirmasi.. 411
III qism. Differensial tenglama va qatorlar............................ 414
I bob. Differensial tenglamalar.. 414
1-§. Differensial tenglama tushunchasi 414
2-§. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.................................. 421
3-§. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar................. 423
4-§. Bir jinsli differensial tenglamalar... 427
5-§. Chiziqli differensial tenglamalar.. 429
6-§. Bernulli tenglamasi.. 434
7-§. To‘liq differensialli tenglamalar.. 437
8-§. Umumiy ko‘rinishda berilgan birinchi tartibli differensial tenglamalarning ba’zi xususiy hollari...................... 443

9-§. Umumiy ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.......... 447
10-§. Ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar.......... 451
11-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar.......... 460
12-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar.......... 467
13-§. Ikkinchi tartib chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar.......... 472
14-§. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar..........480
15-§. Differensial tenglamalar sistemasi.......... 488
II bob. Qatorlar.......... 493
1-§. Sonli qatorlar. Asosiy tushunchalar. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari.......... 493
2-§. Musbat hadli qatorlar. Musbat hadli qatorlarda solishtirish alomati.......... 502
3-§. Musbat qatorlarda yaqinlashish alomatlari.......... 505
4-§. Ixtiyoriy hadli qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.......... 512
5-§. Funksional qatorlar.......... 516
6-§. Darajali qatorlar.......... 526
7-§. Darajali qatorlarning ba’zi tatbiqlari.......... 538
8-§. Furye qatorlari.......... 547
III bob. Ba’zi matematik fizika tenglamalari.......... 556
1-§. Xususiy hosilali differensial tenglama tushunchasi va torning tebranish tenglamasi.......... 556
2-§. Torning tebranish tenglamasini Furye usuli yordamida yechish.... 560

3-§. Issiqlikning tarqalish tenglamasi.. 564
4-§. Issiqlik tarqalish tenlamasini Furye usuli yordamida yechish........567
Adabiyotlar...570

I.G‘. G‘aniyev, X.T. Mansurov,
R.N. G‘anixo‘jayev, O.I. Egamberdiyev,
R.Sh. Isanov

OLIY MATEMATIKA

O‘quv qo‘llanma

Toshkent — «TURON-IQBOL» — 2013
100182. Toshkent sh., H. Boyqaro ko‘chasi, 51-uy
Tel.: 244-25-58. Faks.: 244-20-19

Muharrir *S. Alimboyeva*
Badiiy muharrir *E. Muratov*
Texnik muharrir *T. Smirnova*
Musahhih: *S. Abdunabiyeva*

Nashriyot litsenziyasi AI № 223, 16.11.12
Bosishga 05.06.2013 da ruxsat etildi. Bichimi $60x84^1/_{16}$.
«Bodoni» garniturasi. Ofset usulida bosildi.
Nashr t. 31,14. Shartli b.t. 33,48. Adadi 200 nusxa.
12-sonli buyurtma.

«TURON MATBAA» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, Olmazor tumani, Talabalar ko‘chasi, 2-uy.