**O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI**
**OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI**

**M. Karimov**
**R. Abdikarimov**

# Oliy matematika
**(o’quv qo’llanma)**

**Toshkent-2004**

**Oliy matematika. O'quv qo'llanma./M. Karimov, R. Abdikarimov. Toshkent., Toshkent Moliya Instituti, 2004 yil. 270 bet.**

Ushbu o'quv qo'llanma oliy matematikaning chiziqli algebra, tekislik va fazoda analitik geometriya elementlari, limitlar nazariyasi, differentsial va integral hisob, differentsial tenglamalar va qatorlar mavzularini o'z ichiga oladi.

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 2002 yil 28 fevralda tasdiqlangan «Biznes va boshqaruv», «Moliya», «Bank ishi», «Soliq va soliqqa tortish», «Buxgalteriya hisobi va audit», «Kasb ta'limi» ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, yangi dastur va davlat ta'lim standartlariga mos keladi. Har bir mavzu mustaqil ishlash uchun misollar bilan to'ldirildi.

O'quv qo'llanma «Matematika» kafedrasi majlisida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

____ yanvar 2004 y. ___son majlis bayoni.

«Matematika» kafedrasi mudiri: prof. Q.Safaeva

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining Toshkent moliya instituti qoshidagi oliy o'quv yurtlararo ilmiy-uslubiy kengashda muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

Rektorning o'quv-uslubiy
ishlar bo'yicha muovini prof. A. Vohobov

Tuzuvchilar: f.m.f.n., dots. M.Karimov
t.f.n. R.Abdikarimov
Taqrizchilar: f.m.f.n. A.Soliev
p.f.n., dots. Sh.Soipnazarov

## §1. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI

### 1. tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari

a , v , s va d haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

Ular 2- tartibli determinant yoki aniqlovchi deb ataluvchi ad – bc sonni aniqlaydi va $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga asosan, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

a,v,s va d sonlarga determinant elementlari deyiladi. Ikkinchi tartibli determinantda a,b- birinchi, c,d- ikkinchi satr, a,c- birinchi, b,d—ikkinchi ustun, a,d- bosh yoki birlamchi, b,c- ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

2-tartibli determinant misolida determinantlarning quyidagi asosiy xossalarini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Determinantning kattaligi:

1-xossa: satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa - o'zgarmaydi;

2-xossa: satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilsa -
- ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi;

3-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi k haqiqiy songa
kupaytirilsa - k marta ortadi;

4-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi nolga teng bo'lsa
- nolga teng;

5-xossa: ikki satr (ustun) mos elementlari o'zaro teng yoki
proportsional bo'lsa- nolga teng.

Quyida ta'riflanadigan 3- tartibli, ixtiyoriy n-tartibli determinantlar uchun ham yuqoridagi xossalar o'rinli.

### 2. tartibli determinantlar

Uchinchi tartibli determinant **yoki** aniqlovchi **deb,**

$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ **(1.1)**

yig'indiga teng songa aytiladi va

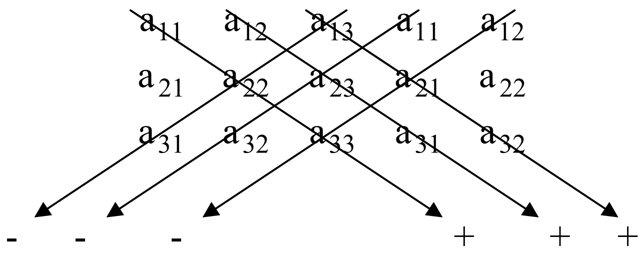
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

ko'rinishda yoziladi.

$a_{ik}$ haqiqiy sonlarga determinantning elementlari deyiladi.

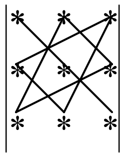
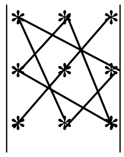
$a_{ik}$ element i-satr va k-ustun elementi bo'lib, ularning kesishmasida joylashgan. 3-tartibli determinantda ham satr va ustunlar, bosh va ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

(1.1) standart ifoda sodda tuzilishga ega. $a_{ik}$ elementlar bo'yicha hisoblanadigan $\Delta$ yig'indini Sarryus qoidasi yordamida tuzish mumkin. Determinant ustunlariga o'ngdan birinchi va ikkinchi ustunlarini ko'chirib yozib, kengaytirilgan jadval tuzamiz:



Bosh diagonal yo'nalishida joylashgan elementlar ko'paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo'nalishidagi elementlar ko'paytirilib manfiy ishora bilan olinsa, (1.1) yig'indi hosil bo'ladi.

$\Delta$ yig'indi uchburchaklar usulida ham tuzilishi mumkin:

$\Delta = +$  $-$ 

Oldidagi ishorasi bilan birga har bir ko'paytma determinantning hadi deyiladi. Har bir ko'paytma determinantning har bir satri va ustuni element - vakillaridan tarkib topgan. (1.1) ifodaning standart deyilishiga sabab, uning har bir hadida ko'paytuvchi elementlar birinchi indeks - satr nomerining o'sish tartibida joylashtirilgan. Ikkinchi indeks ustun nomerlari esa kuyidagi tartibda joylashgan:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right\} (1.2) \qquad \left.\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}\right\} (1.3)$$

(1.2) va (1.3) 1, 2 va 3 sonlarining o'rin almashtirishlaridir. (1, 2, 3) tartiblangan o'rin almashtirishga asosiy o'rin almashtirish deyiladi.

Agar o'rin almashtirishda uning ikki aniq elementlari o'rinlari almashtirilsa, ushbu elementlar transpozitsiyalangan deyiladi. Transpozitsiyalanganda o'rin almashtirish tizimi boshqasi bilan almashinadi. Masalan,

$$(1,\ 2,\ 3) \to (3, 2, 1) \to (3,\ 2,\ 1) \quad \text{ва оказо.}$$

Agar biror-bir o'rin almashtirish tizimi asosiysidan bir necha $N_1$, $N_2$, va hokazo transpozitsiyalash usullari bilan hosil qilingan bo'lsa, ushbu sonlar ayni vaqtda yoki juft yoki toq sonlar ekanligini ta'kidlash muhimdir. O'rin almashtirish tizimi asosiysidan juft (toq) sondagi transpozitsiyalar yordamida olingan bo'lsa, mos ravishda juft (toq) deyiladi.

$j = (j_1, j_2, j_3)$ o'rin almashtirish tizimi berilgan bo'lsin. Bu erda $j_1, j_2, j_3$ - 1, 2 va 3 sonlarining tanlangan biror-bir tartibi. t(j)- asosiy (1, 2, 3) o'rin almashtirishdan j o'rin almashtirishga o'tish uchun zarur transpozitsiyalar soni bo'lsin. Agar t(j) – juft (toq) son bo'lsa, j- juft (toq) o'rin almashtirishdir.

(1.2) o'rin almashtirishlar tizimi juft, (1.3) o'rin almashtirishlar tizimi esa toqdir.

Yuqorida keltirilgan tushunchalardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni boshqa teng kuchli ta'rifini berish mumkin.

3-tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig'indiga teng $\Delta$ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_{j} (-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} a_{3j3},$$

bu erda, $j(j_1, j_2, j_3)$ - asosiy (1, 2, 3) o'rin almashtirishdan hosil bo'lishi mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar.

Ushbu ta'rif n-tartibli determinantni ta'riflashda umumlashtirilishi mumkin.

## 3. n - tartibli determinantlar

n – tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig'indiga teng $\Delta$ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_{j} (-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} \ldots a_{njn} \qquad \text{ва}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi, bu erda $j\ (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ - asosiy (1, 2, …, n) o'rin almashtirishdan olinishi mumkin bo'lgan ixtiyoriy o'rin almashtirish, t(j) – asosiydan j o'rin almashtirishga o'tishda transpozitsiyalar soni.

$(-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} \ldots a_{njn}$ ko'paytmaga determinantning hadi deyiladi. n – tartibli determinant $n^2$ haqiqiy son – elementlar orqali aniqlanadi va yig'indi n! ta haddan iborat.

## O'z–o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Determinantning kattaligi uning satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa qanday o'zgaradi?
3. Determinantning satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilsachi?
4. Determinant biror-bir satri (ustuni) elementlari umumiy ko'paytuvchisini uning ishorasidan tashqariga ko'paytuvchi sifatida chiqarish mumkinmi?
5. Qanday hollarda determinantning kattaligi nolga teng?
6. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
7. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarryus qoidasi nimadan iborat?
8. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak sxemasini ezing.
9. Transpozitsiyalash deganda nimani tushunasiz?
10. Juft yoki toq o'rin almashtirish tizimi deb qanday o'rin almashtirishga aytiladi?
11. n- tartibli determinant deb nimaga aytiladi?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Ikkinchi tartibli determinant.
2. Determinant elementi.
3. Determinant satri.
4. Determinant ustuni.
5. Determinant bosh va ikkilamchi diagonali.
6. Uchinchi tartibli determinant.
7. Determinant hadi.
8. O'rin almashtirishda transpozitsiyalash.
9. Asosiy o'rin almashtirish.
10. Juft yoki toq o'rin almashtirish.
11. n - tartibli determinant.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**1.1.** Quyida berilgan aniqlovchilarni hisoblang:

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ **v)** $\begin{vmatrix} 1{,}5 & 8 \\ 1{,}25 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{2} & 5 \\ -0,(9) & \sqrt[4]{8} \end{vmatrix}$

**d)** $\begin{vmatrix} \sqrt{5}-2 & 3 \\ 3 & 2+\sqrt{5} \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -9,(6) \\ \sqrt[3]{\frac{27}{8}} & \sin\frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$ **yo)** $\begin{vmatrix} \sin 41^0 & \sin 49^0 \\ -\cos 41^0 & \cos 49^0 \end{vmatrix}$

**j)** $\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ (a^2-b^2)^{-1} & (a-b)^{-1} \end{vmatrix}$ **z)** $\begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{25b^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{5}} & \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\dfrac{1}{(\sqrt[3]{5b^{\frac{1}{3}}}+2)^{-1}}} \end{vmatrix}$

**i)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **k)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **l)** $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ **m)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

**n)** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$ **o)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **p)** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

**r)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$  **s)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & x & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

**1.2.** Tenglamalarni eching:

**a)** $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 3 \end{vmatrix}$  **b)** $\dfrac{1}{\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{6}$

**v)** $\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + x = 0$  **g)** $\begin{vmatrix} |x| & x^3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

**d)** $(0{,}6)^x (25/9)^{\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix}} = \left(\dfrac{27}{125}\right)^3$  **e)** $2^x \begin{vmatrix} 4^x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 = 0$

**yo)** $\log_4 \dfrac{2}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \log_4 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$  **j)** $\begin{vmatrix} 2 & \lg x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{\lg x}$

**z)** $|x|^{x\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$  **i)** $(0{,}6)^{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix}} + (0{,}8)^{\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$

**k)** $\begin{vmatrix} \sin x & 0 & -\dfrac{3}{2} \\ -2 & 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 1$  **l)** $\cos^2 \dfrac{\pi x}{4} + \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & x & 2 \\ 6 & -5 & x \end{vmatrix}} = 0$

**1.3.** Tengsizliklarni eching:

**a)** $\dfrac{5}{x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix}} \le 0$  **b)** $\dfrac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} < 1/3$  **v)** $\begin{vmatrix} x & 4 \\ |x| & x \end{vmatrix} + 3 > 0$

**g)** $\sqrt{x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix}} > -2$  **d)** $\sqrt{x\begin{vmatrix} x & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} > 2$  **e)** $\sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} < 2$

**yo)** $\sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} < \sqrt{x}$  **j)** $\sqrt{\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & x \end{vmatrix}} < x$  **z)** $\sqrt{x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} < \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

**i)** $\log_{0,5}\left(\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ x & 1 \end{vmatrix} - x^2\right) > 3$  **k)** $\log_x \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} > 1$

**l)** $\begin{vmatrix} 3^x & 2 & -1 \\ 9^x & 2^x & 0 \\ 2^x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

**1.4.** Quyidagi o'rin almashtirish tizimlarining juft yoki toqligini aniqlang:

**a)** (2; 1; 3), **b)** (3; 1; 2), **v)** (1; 3; 2; 4),
**g)** (2; 3; 1; 4), **d)** (3; 4; 1; 5; 2), **e)** (2; 5; 3; 4; 1),
**yo)** (2; 5; 3; 1; 4; 6), **j)** (6; 5; 3; 1; 4; 2).

## §2. DETERMINANTLARNING XOSSALARI

### 1. Minor va algebraik to’ldiruvchilar haqida tushuncha

n- tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinant berilgan bo’lib, uning ixtiyoriy i-satrini va ixtiyoriy k-ustunini o’chiramiz. Qolgan ifoda (n-1)–tartibli determinantni tashkil etadi va $a_{ik}$ elementning minori deyiladi. $a_{ik}$ element minori $M_{ik}$ yozuv bilan belgilanadi.

$a_{ik}$ elementning algebraik to’ldiruvchisi yoki ad’yunkti deb,

$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ kattalikka aytiladi.

Masalan, uchinchi tartibli $\Delta=|a_{ik}|$ determinantning $a_{12}$ elementi minori $M_{12}$ va algebraik to’ldiruvchisi $A_{12}$ mos ravishda:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$$

2. Determinantlarning xossalari

Ixtiyoriy n-tartibli determinant o’zining asosiy xossalaridan (§1 ga qaralsin) tashqari, ko’shimcha ravishda quyidagi xossalarga ham ega.

6-xossa: Determinantning ixtiyoriy satri yoki ustuni elementlarining o’z algebraik to’ldiruvchilariga ko’paytmalarining yig’indisi uning kattaligiga teng:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2,...,n) \quad \textbf{(2.1)} \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (k = 1,2,...,n) \quad \textbf{(2.2)}$$

(2.1) yig’indi n-tartibli determinantni i-satr elementlari bo’yicha yoyish formulasi deyilsa, (2.2) yig’indi k–ustun elementlari bo’yicha yoyish formulasi deyiladi.

Masala: Uchinchi tartibli $\Delta=|a_{ik}|$ determinantni ikkinchi ustun elementlari bo’yicha yoying.

Uchinchi tartibli determinantni ikkinchi ustun elementlari bo’yicha yoyish formulasini qo’llaymiz, natijada

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) -$$

$$-a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = \Delta$$

7-xossa: Determinant biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa parallel satr (yoki ustun) mos elementlari algebraik to’ldiruvchilariga ko’paytmalarining yig’indisi nolga teng:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j,\ i,j = 1,2,...,n)$$

Ushbu xossa determinantlarning 5- xossasi asosida isbotlanadi.

8-xossa: n-tartibli aniq bir satrlari (ustunlari) bir-biridan farq qiluvchi, qolganlari esa aynan bir xil bo'lgan $\Delta_1$ va $\Delta_2$ determinantlar berilgan bo'lsin. Berilgan $\Delta_1$ va $\Delta_2$ determinantlarning yig'indisi ko'rsatilgan farqli satri (ustuni) mos elementlarining yig'indisidan iborat, umumiy satrlari (ustunlari) esa o'zgarmas qoladigan n-tartibli $\Delta$ determinantga teng.

Masalan, uchinchi ustunlari farqli, qolgan ustunlari aynan bir xil uchinchi tartibli determinantlar quyidagicha qo'shiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}$$

9-xossa: Determinant kattaligi uning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa parallel satr (ustun) mos elementlarini bir xil songa ko'paytirib qo'shganda o'zgarmaydi.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashning ratsional usuli uning biror satri yoki ustunida keltirilgan xossa asosida nollar yig'ib, so'ngra shu satr yoki ustun bo'yicha yoyib hisoblashdir. Yuqori tartibli determinantni hisoblash masalasi ketma-ket ravishda quyi tartibli determinantlarni hisoblash bilan almashinadi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -15 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-17) = -153$$

10-xossa: n-tartibli berilgan $\Delta_1=|a_{iк}|$ va $\Delta_2=|b_{iк}|$ determinantlar ko'paytmasi n-tartibli $\Delta=|s_{iк}|$ determinantga teng va uning ixtiyoriy $s_{iк}$ elementi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

$c_{iк}$ element $\Delta_1$ determinant i-satri elementlarining $\Delta_2$ determinant k-ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

## O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. n-tartibli determinant ixtiyoriy elementi minori deb nimaga aytiladi?
2. Algebraik to’ldiruvchi yoki ad’yunkt deb nimaga aytiladi?
3. n-tartibli determinantni i-satr elementlari bo’yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
4. n-tartibli determinantni k-ustun elementlari bo’yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
5. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o’zgarmaydi?
6. Yuqori tartibli determinantlarni nollar yig’ib hisoblash usuli nimadan iborat?
7. Determinantlarni qo’shish mumkinmi va qanday?
8. Tartiblari teng determinantlarni ko’paytirish qoidasi nimadan iborat?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Determinant elementi minori.
2. Element algebraik to’ldiruvchisi yoki ad’yunkti.
3. Determinantni satr yoki ustun elementlari bo’yicha yoyish.
4. Determinantlarni qo’shish.
5. Determinantlarni ko’paytirish.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**2.1.** Berilgan $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 4\\ -5 & 1 & 3\end{vmatrix}$ aniqlovchining barcha elementlari algebraik to'ldiruvchilarini toping va $\Delta=\sum_{k=1}^{3} a_{i3}A_{3k}$ ekanligini tekshirib ko'ring.

**2.2.** Quyidagilarni eng ma'qul usulda hisoblang:

**a)** $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 5 & -4\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$

**v)** $\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -3 & 1\end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix}1 & 81 & 2\\ -1 & 9 & 1\\ 3 & -7 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -80 & 2\\ -1 & -9 & 1\\ 3 & 7 & 4\end{vmatrix}$

**d)** $\begin{vmatrix}-3 & 1 & -74\\ 4 & 0 & 9\\ -1 & 1{,}5 & -8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 2 & 75\\ 4 & 0 & -9\\ -1 & 3 & 8\end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -1\\ 101 & -99 & -7\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ -2 & -5 & 1\\ -101 & 98 & 7\end{vmatrix}$

**yo)** $\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ -1 & 14 & -13\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\ -1 & 0,(3) & 0\\ 2 & -14 & 13\end{vmatrix}$

**2.3.** Aniqlovchilarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib, berilgan $\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix}$ va $\Delta_2=\begin{vmatrix}7 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ aniqlovchilarni bir-biriga mumkin bo'lgan barcha usullarda ko'paytiring, $\Delta_1\Delta_2=52$ ekanligini tekshirib ko'ring.

# §3. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

## 1. Matritsa haqida tushuncha

$a_{i\kappa}$ haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to'g'ri to'rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

shaklidagi jadvalga n x m o'lchamli **matritsa** deyiladi.

$a_{i\kappa}$ haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi.

1 x m o'lchamli matritsaga **satr matritsa**, n x 1 o'lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi. **Nol matritsa** deb, har bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga aytiladi.

n x m o'lchamli A=($a_{i\kappa}$) va V=($b_{i\kappa}$) matritsalar berilgan bo'lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, matritsalar o'zaro teng deyiladi va A=V ko'rinishda yoziladi.

## 2. Matritsalar ustida amallar.

O'lchamlari aynan teng A va V matritsalarni qo'shganda, ularning mos elementlari qo'shiladi: A+V =($a_{i\kappa}$) + ($b_{i\kappa}$) = ($a_{i\kappa}$+$b_{i\kappa}$).

Haqiqiy son matritsaga ko'paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko'paytiriladi: k ($a_{i\kappa}$)=(k $a_{i\kappa}$).

Misol. Amallarni bajaring:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} -3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga bo'ysinadi: 1) A+V=V+A; 2) A+(B+C)=(A+B)+C; 3) k(A+B)=kA+kB; 4) k(nA)=(kn)A ; 5) (k+n)A=kA+nA.

Agar A matritsaning ustunlari soni V matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A va V matritsalar **o'zaro zanjirlangan matritsalar** deyiladi. O'zaro zanjirlangan matritsalarni ko'paytirish mumkin.

n x m o'lchamli A=($a_{i\kappa}$) matritsani m x p o'lchamli B=($b_{i\kappa}$) matritsaga ko'paytmasi n x p o'lchamli C=($c_{i\kappa}$) matritsaga teng bo'lib, uning $s_{i\kappa}$ elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} ,$$

ya'ni $s_{i\kappa}$ element A matritsa i-satri elementlarining V matritsa k-ustuni mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko'paytirish kuyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1. (kA)B=k(AB);  2. (A+B)C=AC+BC;
3. A(B+C)=AB+AC;  4. A(BC)=(AB)C.

Matritsalarning ko'paytmasi ko'paytuvchi matritsalar nolmas bo'lishiga qaramasdan, nol matritsani berishi ham mumkin.

A va V matritsalarning ko'paytmasi har doim o'rin almashtirish qonuniga bo'ysinavermaydi, ya'ni umuman olganda AV≠VA. AV=VA tenglikni qanoatlantiruvchi A va V matritsalarga **o'rin almashinuvchi** matritsalar deyiladi.

Berilgan n x m o'lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo'lgan m x n o'lchamli matritsaga A matritsaning **transponirlangan matritsa**si deyiladi va $A^T$ ko'rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko'paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o'rinli: $(AV)^T = V^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo'lgan matritsaga n–tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi. Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko'rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **yuqori uchburchakli matritsa;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **quyi uchburchakli matritsa;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **diagonal matritsa;**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$ - **birlik matritsa.**

Matritsalar o'zlarining quyidagi sonli xarakteristikalari bo'yicha taqqoslanadi: 1) kvadratik matritsa determinanti; 2) normasi; 3) rangi.

## 3. Kvadrat matritsa determinanti. Matritsa normasi.

Berilgan n - tartibli A= ($a_{ik}$) **kvadratik matritsaning determinanti yo**ki **aniqlovchisi** deb, n – tartibli $|a_{ik}|$ determinantga aytiladi va det(A) ko'rinishda yoziladi.

Kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi uning asosiy sonli xarakteristikasi hisoblanadi. Yuqori, quyi uchburchakli va diagonal matritsalarning determinanti bosh diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng bo'lsa, birlik matritsaning determinanti birga teng.

Ikki teng o'lchovli kvadrat matritsalar ko'paytmasining determinanti alohida matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng: det(AB)=det(A) det(B).

Berilgan n x m o'lchamli A=($a_{ik}$) **matritsaning normasi** deb, unga mos qo'yiluvchi quyidagi nomanfiy

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2}$$

songa aytiladi.

***Masalan,*** $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ ***matritsaning normasi***

$$N = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2 + (-9)^2 + 8^2 + 1^2} = 14.$$

## 4. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari.

n x m o'lchamli A=($a_{ik}$) matritsa berilgan bo'lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo'lmagan son bo'lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o'chiramiz. O'chirilgan elementlar p- tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o'z navbatida p-tartibli determinant yoki minorni mos qo'yish mumkin.

A **matritsaning rangi** deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va rang(A) ko'rinishida ifodalanadi.

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

Berilgan matritsa 3 x 2 o'lchamli bo'lgani uchun satrlari va ustunlari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli 2- tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta'rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng.

2-masala. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

V matritsadan ajralishi mumkin bo'lgan eng yuqori - ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo'la olmaydi. V matritsa nolmas matritsa bo'lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang.

S matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli $M_1$ minor ajraladi. $M_1$ minor kattaligini hisoblaymiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$M_1 = 0$ bo'lgani uchun, S matritsa rangi 3 ga teng bo'la olmaydi.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo'lgani uchun, rang(S) = 2.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o'zgarmaydi:

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko'paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o'rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko'paytirib, so'ngra qo'shganda;
4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta'rif asosida biz yuqorida masalalarda ko'rgan **«minorlar ajratib hisoblash»** usuli va nollar yig'ib hisoblashga asoslangan **«Gauss algoritmi»** usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig'ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: Dastlabki ko'rinishdagi matritsa yuqorida sanab o'tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matritsa**» ko'rinishiga keltiriladi. Trapetsiyasimon matritsa deb, bosh diagonaldan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo'lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning rangi yoki xuddi shuning o'zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig'ish usulida aniqlang.

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko'rinishini trapetsiyasimon ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo'lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Nol matritsa deb-chi?
4. Qanday matritsalarga o'zaro teng matritsalar deyiladi?
5. Aynan bir xil o'lchamli matritsalar qanday qo'shiladi?
6. Sonni matritsaga ko'paytirish amali qanday bajariladi?

7. Matritsalarni qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallari bo'ysinadigan xossalarni sanab o'ting?
8. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
9. O'zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko'paytiriladi?
10. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga bo'ysinadi?
11. Matritsalarni ko'paytirish amali o'rin almashtirish qonuniga bo'ysinadimi?
12. n-tartibli kvadratik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
13. Kvadrat matritsaning qanday xususiy ko'rinishlarini bilasiz?
14. Matritsalar taqqoslanishi mumkin bo'lgan qanday sonli xarakteristikalarni bilasiz?
15. n-tartibli kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?
16. Matritsaning normasi deb-chi?
17. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
18. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
19. Matritsa ustida qanday amallarni bajarganda uning rangi o'zgarmaydi?
20. Matritsa rangini nollar yig'ib aniqlash usuli nimadan iborat?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Matritsa.
2. Nol matritsa.
3. Kvadrat matritsa.
4. Yuqori yoki quyi uchburchakli matritsa.
5. Diagonal matritsa.
6. Birlik matritsa.
7. Trapetsiyasimon matritsa.
8. Transponirlangan matritsa.
9. Kvadratik matritsa determinanti yoki aniqlovchisi.
10. Matritsa normasi.
11. Matritsa osti minori.
12. Matritsa rangi.
13. Gauss algoritmi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**3.1.** Matritsalar ustida amallarni bajaring:

**a)** $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**v)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^2$

**e)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^2$ **yo)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

**3.2.** Quyida berilgan matritsalarning ranglarini «minorlar ajratish» usulida aniqlang:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**yo)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

**3.3.** Quyidagi matritsalarning ranglarini «Gauss algoritmi» usuli yordamida toping:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**v)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

**3.4.** x va y larning qanday qiymatlarida quyidagi

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa rangi 2 ga teng bo’ladi?

**3.5.** $\lambda$ parametrning qanday qiymatlarida $\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 2 & \log_2 \lambda \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{\lambda} \\ \sqrt{\lambda} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$ matritsalar o’zaro teng, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \lambda^2 - 16 & \frac{5}{\lambda + 4} \end{pmatrix}$ matritsa diagonal ko’rinishda bo’lishini toping.

# §4. TESKARI MATRITSA VA UNI QURISH

## 1. Teskari matritsa haqida tushuncha

n – tartibli kvadratik $A=(a_{i\kappa})$ matritsa berilgan bo'lsin. Agar A matritsa determinanti noldan farq qilib, uning rangi tartibi n ga teng bo'lsa, matritsaga maxsusmas matritsa deyiladi. Agarda det(A)=0 bo'lib, rangi n dan kichik bo'lsa, A matritsaga maxsus matritsa deyiladi.

**Teorema.** Ikki teng tartibli kvadrat matritsalarning ko'paytmasi, ko'paytuvchi matritsalarning har biri maxsusmas bo'lgandagina, maxsusmas matritsadan iborat bo'ladi.

To'g'ridan-to'g'ri ko'paytirish yo'li bilan n - tartibli birlik E va n -tartibli har qanday A matritsalarning o'zaro o'rin almashinuvchi ekanligini, ko'paytma A matritsani berishini, ya'ni $A\cdot E = E\cdot A = A$ tengliklar o'rinli bo'lishini misollarda tekshirib ko'rish qiyin emas.

Berilgan A kvadratik matritsaning teskari matritsasi deb, tartibi A matritsaning tartibiga teng va A matritsaga chapdan yoki o'ngdan ko'paytmasi birlik E matritsaga teng bo'lgan $A^{-1}$ matritsaga aytiladi: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Yuqoridagi teoremaga asosan E birlik matritsaning maxsusmas ekanligini e'tiborga olsak, maxsus matritsaning teskari matritsaga ega emasligini xulosa qilamiz. Har qanday maxsusmas kvadrat matritsaning yagona teskari matritsasi mavjudligi quyidagi teoremadan kelib chiqadi.

**Teorema.** Teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun det(A)≠0 bo'lib, A matritsaning maxsusmas bo'lishi zarur va etarli.

## 2. Teskari matritsa qurish algoritmlari

Berilgan maxsusmas kvadrat matritsaning teskari matritsasini qurishning «klassik» va Jordan usullari mavjud.

Berilgan $A=(a_{i\kappa})$ kvadratik matritsa har bir elementini o'zining ad'yunkti bilan almashtirib, so'ngra hosil bo'lgan matritsani transponirlasak, quyidagi A matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi $A^{v}$ ni hosil qilamiz:

$$A^{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A^{v}$ matritsaga A matritsaning ko'shma matritsasi deyiladi.

n- tartibli determinantning 6 va 7 xossalariga asosan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Tenglikni ixcham shaklda $A \cdot A^{\vee}$ =det $A \cdot E$  ko'rinishda yozish mumkin. Tenglamaning ikkala tomonini noldan farqli det A ga bo'lsak,

$$A\frac{1}{\det A}A^{\vee} = E.$$

Ikkinchi tomondan teskari matritsa ta'rifiga binoan $A \cdot A^{-1}=E$. Tenglamalarni solishtirib, A kvadratik maxsusmas matritsaning teskari matritsasi $A^{-1}$ uchun quyidagi formulani olamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^{\vee}$$

Oxirgi formula A maxsusmas matritsaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matritsa qurish jarayoni quyidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o'z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matritsa determinanti kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi. Agarda detA=0 bo'lsa, A matritsa maxsus va teskari matritsa mavjud emas;

2. $A=(a_{i\kappa})$ matritsa elementlarining mos ad'yunklari hisoblanadi va tartib saqlangan holda, matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasi $(A_{i\kappa})$ tuziladi;

3. $(A_{i\kappa})$ matritsa transponirlanadi va A matritsa elementlari mos  ad'yunklari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki shuning o'zi qo'shma $A^{\vee} = (A_{\kappa i})$ matritsasi tuziladi;

4. $A^{\vee} =(A_{\kappa i})$ matritsa har bir elementi detA ga bo'linadi va $A^{-1}$ teskari matritsa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maxsusmas matritsaning teskari matritsasini klassik usulda quring.

Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

formula asosida quriladi. Formulani qo'llab,

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Teskari matritsa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'ramiz:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Demak, berilgan A matritsaning teskarisi $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Berilgan A kvadratik matritsa teskarisi $A^{-1}$ Jordan usuli asosida quyidagicha quriladi: A matritsaga o'ngdan tartibi uning tartibiga teng birlik E matritsa qo'shiladi va kengaytirilgan (A | E) matritsa tuziladi. Parallel ravishda kengaytirilgan matritsaning chap va o'ng qismlari satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qism birlik matritsa ko'rinishiga keltiriladi. Kengaytirilgan matritsaning chap qismi birlik E matritsa ko'rinishiga keltirilganda uning o'ng qismida teskari $A^{-1}$ matritsa hosil bo'ladi. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi kuyidagi sxema shaklida ifodalanishi mumkin: $(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$.

Masala. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini. Jordan usuli yordamida quramiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{16} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{13}{16} \end{array}\right).$$

Oxirgi ko'rinishdagi kengaytirilgan matritsa o'ng qismida teskari matritsa shakli hosil bo'ldi. Teskari matritsa to'g'ri qurilganini ta'rif asosida tekshirib ko'rish mumkin.

Teskari matritsa o'zining quyidagi xossalariga ega:
1) $(A^{-1})^{-1}=A$; 2) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$; 3) $(AV)^{-1}=V^{-1}A^{-1}$.

## O'z - o'zini tekshirish uchun savollar

1. Maxsusmas matritsa deb qanday kvadratik matritsaga aytiladi?
2. Maxsus matritsa deb-chi?
3. Teng tartibli qanday kvadratik matritsalarni ko'paytirganda ko'paytma maxsusmas matritsadan iborat bo'ladi?
4. Maxsusmas matritsaning teskari matritsasi deb qanday matritsaga aytiladi?
5. Nima uchun maxsus matritsaning teskarisi mavjud emas?
6. Kvadratik matritsaning teskari matritsasini qurishning qanday usullarini bilasiz?
7. Teskari matritsa qurishning klassik usuli qanday jarayonlardan iborat? Formulasini yozing.
8. Uchinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisini klassik usulda qurish kengaytirilgan formulasini yozing?
9. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi nimalardan iborat?

10. Teskari matritsaning qanday xossalarini bilasiz?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Maxsusmas kvadratik matritsa.
2. Maxsus kvadratik matritsa.
3. Teskari matritsa.
4. Matritsa elementlari mos ad'yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki qo'shma matritsa.
5. Teskari matritsa qurish klassik usuli jarayonlari.
6. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**4.1.** Kuyidagi matritsalardan maxsuslarini ajrating:

**a)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 3 & -\text{tgx} \\ -\text{ctgx} & 0{,}5 \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

**4.2.** Quyida berilgan matritsalarning teskari matritsalarini «klassik usul»da toping:

**a)** $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

**4.3.** Quyidagi matritsalarning teskari matritsalarini «Jordano usuli»da aniqlang:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 1 & \text{ctg}\alpha \\ \text{tg}\alpha & 2 \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

## §5. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

### 1. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Sistemaning echimi.

Iqtisodiy masalalarning aksariyati bir necha noma'lumli (aytaylik m ta) chekli sondagi (aytaylik n ta) chiziqli tenglamalarni o'z ichiga olgan va ushbu tenglamalarning umumiy echimini topish masalasi qo'yilgan quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ .............................................. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \qquad (5.1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu erda, $a_{i\kappa}$– haqiqiy sonlar bo'lib, sistemaning koeffitsientlari; $b_i$ - haqiqiy sonlar esa uning ozod hadlari deyiladi. Sistemaning (5.1) ko'rinishdagi shakliga m ta noma'lumli n ta **chiziqli tenglamalar normal sistemasi** deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$ - **koeffitsentlar yoki asosiy matritsa,**

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$ – матрицага эса

**kengaytirilgan matritsa** deyiladi.

(5.1) **sistemaning echimi yoki echimlari to'plami** deb, uning har bir tenglamasini sonli ayniyatga aylantiradigan mumkin bo'lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan ($x_1$; $x_2$; … ; $x_m$) tizimlari to'plamiga aytiladi.

Sistemani echish deganda – uning barcha echimlarini topish yoki echimga ega emasligini ko'rsatish tushuniladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega bo'lsa - **birgalikda**, yagona echimga ega bo'lsa - **aniq**, cheksiz ko'p echimga ega bo'lsa - **aniqmas** va umuman echimi mavjud bo'lmasa – **birgalikda bo'lmagan** sistema deyiladi.

Tenglamalar sistemasining biror-bir tenglamasi zid (qarama-qarshi) tenglama bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda bo'lmagan sistemani tashkil etadi. Aynan teng echimlar to'plamiga ega tenglamalar sistemalariga esa **teng kuchli (ekvivalent) sistemalar** deb ataladi.

## 2. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi mavjudligi va yagonaligi haqida teoremalar.

(5.1) umumiy ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik masalasini quyidagi teorema ochib beradi.

**Kroneker-Kapelli teoremasi.** Chizikli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy matritsasi rangining kengaytirilgan matritsasi rangiga teng bo'lishi zarur va etarli. Agar asosiy A matritsa rangi kengaytirilgan (A | V) matritsa rangiga teng bo'lib, teng ranglar o'z navbatida noma'lumlar soni m ga teng bo'lsa, ya'ni rang(A)=rang(A | B)=m, sistema aniq bo'ladi. Agar A matritsa rangi kengaytirilgan (A | V) matritsa rangiga teng bo'lib, teng ranglar noma'lumlar soni m dan kichik bo'lsa, ya'ni rang(A)=rang(A | V) < m, sistema aniqmas bo'ladi. Agarda asosiy matritsa rangi kengaytirilgan matritsa rangidan kichik bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .............................................. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5.2}$$

(5.2) sistema uchun uning aniqlik sharti muhimdir.

**Kramer teoremasi.** n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi aniq bo'lishi uchun uning asosiy matritsasi determinantining noldan farqli bo'lishi zarur va etarli. Yagona echim $\left(\frac{\det A_1}{\det A}; \frac{\det A_2}{\det A}; \ ...; \ \frac{\det A_j}{\det A}; \ ...; \ \frac{\det A_n}{\det A}\right)$ tartiblangan tizimdan iborat bo'ladi, bu erda $A_j$ asosiy A matritsadan j-ustunning ozod hadlar ustuni bilan almashtirilgani bilan farq qiluvchi matritsa. Agarda detA=0 bo'lsa, (5.2) sistema yoki aniqmas yoki birgalikda bo'lmaydi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini birgalikda va aniqligini tekshiring. Birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida eching:

1) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Berilgan sistemalar uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lgani uchun, dastlab, Kramer teoremasini tatbiq etamiz:

1) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$ bo'lgani uchun - sistema aniq.

Yagona echim Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

Sistema echimi: ( -3; 2; 1).

2) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Kramer teoremasiga ko'ra, sistema yoki aniqmas yoki birgalikdamas. Kroneker-Kapelli teoremasiga murojaat etib, sistema kengaytirilgan matritsasi rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & | & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

rang(A) = 2 = 2 = rang(A | V) < 3 (noma'lumlar soni) shartlar bajarilgani uchun sistema aniqmas va quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer formulasi yordamida echish mumkin:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3+7 & 1 \\ 3x_3-5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{x_3+20}{7}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & x_3+7 \\ 4 & 3x_3-5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5x_3+9}{7}.$$

Sistema echimi: $\left(-\frac{x_3+20}{7}; \frac{5x_3+9}{7}; \; x_3\right).$

3) detA = 0 bo'lgani uchun sistema yoki aniqmas yoki birgalikdamas.
Sistema kengaytirilgan matritsasi rangini nollar yig'ib, hisoblaymiz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & | & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rang(A) = 2 < 3 = rang(A | V) munosabat o'rinli bo'lgani uchun sistema birgalikdamas.

## 3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas echimlari mavjudlik shartlari.

Agar (1) sistema tenglamalari barcha ozod hadlari nolga teng bo'lsa, chiziqli tenglamalar sistemasi **bir jinsli sistema** deyiladi. Agarda tenglamalar ozod hadlaridan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema **bir jinsli bo'lmagan sistema** deb ataladi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda, chunki rang(A) = rang(A | O) tenglik har doim o'rinli.

Bundan tashqari, bir jinsli sistema har doim m ta nollar tizimi - **nolli** yoki **trivial** (0; 0; …; 0) echimga egaligi bilan xarakterlanadi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi uchun uning nolmas echimlarga egalik shartini bilish muhimdir. Javob Kroneker–Kapelli teoremasidan kelib chiqadi.

**Teorema.** Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega bo'lishi uchun sistema asosiy matritsasi rangining noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va etarli.

Teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. Agar bir jinsli sistemaning noma'lumlari soni uning tenglamalari sonidan katta bo'lsa, sistema nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega;

2-xulosa. n ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham ega bo'lishi uchun sistema asosiy matritsasining determinanti nolga teng bo'lishi zarur va etarli.

## O'z- o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Sistemaning echimi deb-chi?
3. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo'lmagan sistemalar deyiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi echimi mavjudlik va yagonalik etarli shartlari nimalardan iborat?
5. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer teoremasi nimani aniqlab beradi?
6. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib echish mumkinmi?
7. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Nima uchun chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda va ajralib turuvchi xususiyati nimadan iborat?
9. Bir jinsli sistemaning nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham egalik etarli shartlaridan qaysilarini bilasiz?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Sistema echimi.
3. Birgalikdagi sistema.
4. Aniq sistema.
5. Aniqmas sistema.
6. Birgalikda bo'lmagan yoki zid sistema.
7. Sistemaning asosiy matritsasi.
8. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi.
9. Kramer formulalari.
10. Bir jinsli sistema.
11. Bir jinsli bo'lmagan sistema.
12. Bir jinsli sistemaning nolmas echimlari.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**5.1.** Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida va grafik usulda eching:

**a)** $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ 2x+\ y=9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 7x+2y=-8 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ -6x_1+7x_2=2 \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} 5x_1+6x_2=-12 \\ 4x_1+3x_2=3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-5 \\ 4x_1-6x_2=-9 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1+4x_2=-1 \\ 2x_1+8x_2=-2 \end{cases}$

**5.2.** Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida echimga ega emas (birgalikda emas):

**a)** $\begin{cases} x+\ ay=3 \\ x-2ay=a+1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1-ax_2=a+2 \\ (a+1)x_1-6x_2=4-a \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} ax_1+\ x_2=1 \\ x_1+ax_2=2-a \end{cases}$

**5.3.** Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida cheksiz ko'p echimga ega (aniqmas):

**a)** $\begin{cases} x+\ ay=-3 \\ (a-5)x-3ay=4a+1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax_1+\ x_2=1 \\ x_1+ax_2=2-a \end{cases}$

**v)** $\begin{cases} (a-1)x_1+\ ax_2=10-2a \\ \dfrac{a}{2}x_1+\ x_2=a-3 \end{cases}$

**5.4.** Quyidagi sistemalarning birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida eching:

**a)** $\begin{cases} 3x-2y+4z=5 \\ 2x+y-6z=-3 \\ x-4y+z=-2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=1 \\ 3x_1-5x_2-2x_3=-1 \end{cases}$

**v)** $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=3 \\ 5x_1\qquad +x_3=-4 \\ \qquad 6x_2+4x_3=1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 4x_1+9x_2+7x_3=-3 \\ x_1+\ x_2+\ x_3=0 \\ 2x_1-3x_2-\ x_3=2 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=6 \\ 2x_1+\ x_2-\ x_3=-1 \\ -3x_1-4x_2+5x_3=8 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+x_4=0 \\ 2x_1-\ x_2+3x_3+x_4=1 \\ 3x_1+4x_2-\ x_3+2x_4=2 \\ x_1-\ x_2-\ x_3\qquad =3 \end{cases}$

**yo)** $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 8x_1 + 7x_2 = 6 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

## §6. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISH USULLARI

### 1. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida echish.

n ta noma'lumli n ta chizikli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ............................................ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

berilgan bo'lsin. Matritsalarni ko'paytirish amali va matritsalar tengligi ta'rifidan foydalanib, sistemani $A{\cdot}X = V$ matritsali tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Bu erda, $A=(a_{ik})$ - asosiy matritsa, V – ozod hadlar ustun matritsasi va X - noma'lumlar ustun matritsasi.

Sistemaning asosiy matritsasi A maxsusmas bo'lib, $A^{-1}$ uning teskari matritsasi bo'lsin. $A{\cdot}X = V$ tenglama ikkala qismini chapdan teskari $A^{-1}$ matritsaga ko'paytiramiz va $A^{-1}{\cdot}A = E$, $E{\cdot}X = X$ tengliklarni e'tiborga olsak,

$$X = A^{-1}{\cdot}V \tag{6.1}$$

tenglamani olamiz. (6.1) tenglama **tenglamalar sistemasi echimini matritsa shaklda yozish yoki sistemani teskari matritsa usulida echish formulasi** deyiladi. Shunday qilib, sistemani teskari matritsa usulida echish uchun A kvadrat matritsa teskarisi $A^{-1}$ quriladi va u chapdan ozod hadlar matritsasi V ga ko'paytiriladi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini teskari matritsa usulida eching:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$

1) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Sistema echimi: ( 9; -5 ).

2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ qism matritsa rangi sistema rangiga teng bo'lgani uchun sistema dastlabki ko'rinishini unga teng kuchli quyidagi shakli bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = -2x_2 + 2 \\ 3x_1 + x_3 = -6x_2 + 5 \end{cases}$$

Yuqoridagi sistemani matritsalar usulini qo'llab echish mumkin:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}1&4\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2x_2+2\\-6x_2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_2+\dfrac{22}{13}\\-\dfrac{1}{13}\end{pmatrix}.$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy echim ko'rinishlaridan biri $(-2x_2+\frac{22}{13};x_2;-\frac{1}{13})$ shaklda yozilishi mumkin. Bu erda $x_2 \in R$.

3) Sistema asosiy matritsasi teskarisini Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\-4&3&2&0&1&0\\5&-4&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{5}{16}&\frac{3}{8}&\frac{7}{16}\\0&1&0&\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\0&0&1&\frac{1}{16}&\frac{7}{8}&\frac{11}{16}\end{array}\right)$$

Sistema yagona echimini teskari matritsa usuli formulasini qo'llab, quramiz:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{16}&\frac{3}{8}&\frac{7}{16}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{16}&\frac{7}{8}&\frac{11}{16}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\9\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Sistema echimi: ( -2; -1; 2 ).

Har bir usul kabi teskari matritsa usuli o'zining afzallik va noqulaylik jihatlarga ega. Bir nechta asosiy matritsalari aynan teng va biri-biridan faqat ozod hadlari ustuni bilan farq qiluvchi sistemalarni teskari matritsa usulida echgan maqsadga muvofiq. Chunki, bir marta qurilgan teskari matritsa mos ozod hadlari ustuniga ko'paytiriladi va natija olinaveradi. Usulning noqulay jihati teskari matritsa qurish jarayoni bilan bog'liq bo'lib, ayniqsa, detA nolga yaqin bo'lganda ko'p xonali sonlar ustida hisob-kitoblarni talab etadi.

## 2. Sistemaning umumiy echimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi.

m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar sistema tenglamalarining birida $x_k$ (k={1, 2, …, m}) noma'lum +1 koeffitsient bilan qatnashib, qolgan barcha tenglamalarida $x_k$ noma'lumli hadlar mavjud bo'lmasa yoki yo'qotilgan bo'lsa, sistema $x_k$ noma'lumga nisbatan ajratilgan yoki $x_k$ noma'lum sistemaning ajratilgan noma'lumi deyiladi. Ajratilgan noma'lum bazis noma'lum deb ham yuritiladi.

Sistemaning har bir tenglamasi ajratilgan yoki bazis noma'lumga ega ko'rinishiga **noma'lumlari ajratilgan** yoki **bazisga keltirilgan sistema** deyiladi. Har qanday birgalikdagi sistema o'zining ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lmagan noma'lumlari ajratilmagan, ozod yoki erkli noma'lumlar deb ataladi. Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - x_5 = -1 \\ \quad - x_2 + x_3 \qquad 4x_5 = 7 \\ \quad + 5x_2 \qquad + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemada $x_1$, $x_3$ va $x_4$ ajratilgan yoki bazis noma'lumlar bo'lsa, $x_2$ va $x_5$ noma'lumlar esa ozod yoki erkli noma'lumlardir.

Agar noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning har bir noma'lumi uning ajratilgan yoki bazis noma'lumlari tizimiga tegishli bo'lsa, sistema aniq, ya'ni yagona echimga ega bo'ladi. Agarda noma'lumlari ajratilgan sistema erkli noma'lumlarga ham ega bo'lsa, aniqmas, ya'ni cheksiz ko'p echimlarga ega bo'ladi.

Berilgan dastlabki shakldagi sistemaning **umumiy echimi** deb, unga teng kuchli bo'lgan noma'lumlari ajratilgan yoki biror-bir bazisga keltirilgan sistemaga aytiladi.

Sistemaning umumiy echimini qurish usuliga esa **Gauss usuli** deyiladi. Sistemaning barcha echimlarini topish uchun uning umumiy echimini qurish etarli. Berilgan sistemaning umumiy echimini aniqlash uchun uning ustida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi:

1) sistema tenglamalari o'rinlarini almashtirish mumkin;
2) sistema biror-bir tenglamasi ikkala qismini biror noldan farqli songa ko'paytirish mumkin;
3) sistema biror-bir tenglamasiga uning boshqa tenglamasini songa ko'paytirib, qo'shish mumkin.

Agar sistemani almashtirish jarayonida $0x_1+ 0x_2+\ldots+ 0x_m =0$ nol yoki trivial tenglama hosil bo'lsa, u o'chiriladi. Agarda $0x_1+0x_2+\ldots+0x_m=b$ $(b\neq 0)$ zid yoki qarama-qarshi tenglama hosil bo'lsa, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

Sistema umumiy echimini qurish usuli – Gauss usulining bir necha modifikatsiyalari mavjud. Quyida **Gaussning klassik** yoki ixcham sxema usuli va **Jordan modifikatsiyalari** bilan tanishamiz.

Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli to'g'ri va teskari yurishlardan iborat. To'g'ri yurishda sistemaning asosiy matritsasi trapetsiyali yoki uchburchakli ko'rinishga keltiriladi. Teskari yurishda uning noma'lumlari ketma-ket ravishda aniqlanadi va umumiy echim quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemani Gaussning klassik usulida eching.

$$\begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 - \ \ \ x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ \mathbf{x_1} + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 - \ \ \ x_3 = 7 \\ \qquad + 4x_2 + \ \ \ x_3 = 9 \\ \qquad + \frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + \ \ x_2 - \ \ \ x_3 = \ \ 7 \\ \qquad + 4x_2 + \ \ \ x_3 = \ \ 9 \\ \qquad\qquad -\frac{27}{8}x_3 = -\frac{27}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: Dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A \mid B)$ matritsasi quriladi. Yuqorida zikr etilgan sistemani teng kuchli sistemaga aylantiruvchi elementar almashtirishlardan foydalanib, kengaytirilgan matritsaning chap qismida yoki uning qism ostida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda birlik matritsadan o'ngda echimlar ustuni hosil bo'ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A \mid V) \sim (E \mid X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini echish Gauss-Jordan usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurish Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o'ng ustunda bir yo'la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko'paytmasi – echimlar ustuni quriladi.

Masala. §5 da Kramer formulalari yordamida echilgan sistemalarni Gauss-Jordan usulida eching.

$$1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 2 & 3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 8 & 0 & 5 & | & -19 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ -27 & 0 & 0 & | & 81 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -40 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistema aniqmas bo'lib, umumiy echim ko'rinishlaridan biri $(x_1; -5x_1 - 13; -7x_1 - 20)$ shaklga ega. Bu erda, $x_1$ erkli noma'lum va $x_1 \in R$.

$$3)\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -39 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi zid tenglama. Demak, sistemaning o'zi ham zid, ya'ni birgalikda emas.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkinmi va qanday ?
2. Sistema echimi matritsa ko'rinishida qanday yoziladi?
3. Sistemani matritsa usulida echish yoki teskari matritsa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?
4. Ajratilgan noma'lum deb qanday noma'lumga aytiladi?
5. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
6. Birgalikdagi sistema nima bilan xarakterlanadi va erkli noma'lumlar deb nimaga aytiladi?
7. Sistemaning umumiy echimi deb nimaga aytiladi?
8. Gauss usuli deb-chi?
9. Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?
10. Sistema Gaussning klassik usulida qanday echiladi?
11. Sistema ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
12. Sistema barcha echimlarini topish o'rniga uning umumiy echimini qurish etarlimi?
13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyatini so'zlab bering va sxemasini yozing?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Matritsali tenglama.
2. Sistema echimining matritsa ko'rinishi.
3. Teskari matritsa usuli.
4. Ajratilgan yoki bazis noma'lum.
5. Noma'lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema.
6. Noma'lumlari ajratilgan sistemaning bazis noma'lumlari tizimi.
7. Noma'lumlari ajratilgan sistemaning erkli noma'lumlari.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy echimi.
9. Gauss usuli.
10. Sistema ustida elementar almashtirishlar.
11. Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli.
12. To'g'ri yurish va teskari yurish.
13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**6.1.** Quyidagi sistemalarni teskari matritsa usulida eching:

**a)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 - 9x_2 = 1 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

**e)** $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ **yo)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

**j)** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ **z)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

**6.2.** Quyidagi sistemalarni Gaussning ixcham sxemasi usulida eching:

**a)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ -6x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -2 \\ 3x_1 - 9x_2 = 6 \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

**yo)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

**z)** $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

**k)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

**6.3.** Quyidagi sistemalarni Gauss-Jordano usulida eching:

**a)** $\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

**v)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -4 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -5 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

**yo)** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$

**z)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases}$

**k)** $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 9 \\ 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 3x_5 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$

**6.4.** Quyida berilgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemalaridan aniqmaslarini ajratib ko'rsating va ularning umumiy echimini yozing:

**a)** $\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ 9x + 4y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2{,}5x_1 - 1{,}(6)x_2 = 0 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - \quad y - \quad 3z = 0 \\ x - 0{,}5y - 1{,}5z = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + \quad x_3 = 0 \\ 2x_1 + \quad x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - \quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

yo) $\begin{cases} x - 4y - \; z = 0 \\ 3x - 6y - \; z = 0 \\ -x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + 4x_3 + \quad x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - \quad x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

**6.5.** Quyidagi bir jinsli sistemalar λ parametrning kanday qiymatlarida nolmas echimlarga ham ega ekanligini aniqlang:

a) $\begin{cases} x_1 - (2-\lambda)x_2 = 0 \\ (\lambda - 4)x_1 + \quad 3x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + \; x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ 2x_1 - \quad x_2 + 4x_3 + \quad x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_2 - 6x_3 - \quad x_4 = 0 \\ 5x_1 - \; x_2 + \; 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

**6.6.** Quyida berilgan sistemalar λ parametrning qanday qiymatlarida birgalikda emasligini aniqlang:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = \lambda^2 \\ x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - \quad x_2 + \quad x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -\lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

v) $\begin{cases} x_1 + \quad x_2 - \; x_3 - \; x_4 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 + \; x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad\quad 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - \quad x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

# §7. ARIFMETIK VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

## 1. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo. Arifmetik vektor haqida tushuncha.

O'rta maktab matematika kursida real fazo vektorlari – yo'nalishli kesma shaklida tasvirlanishi mumkin bo'lgan geometrik vektorlar va ular ustida amallar o'rganilgan edi. Maktab kursida real (bir, ikki va uch o'lchovli) fazo vektorlari va nuqtalari orasida o'zaro birga-bir moslik borligini uqish muhimdir. Real $R_3$ fazo tushuncha va elementlarini ixtiyoriy n ($n\geq 4$, $n\in N$) o'lchovli fazo uchun yoyish yoki umumlashtirish mumkin. n o'lchovli haqiqiy fazo abstrakt - to'qima tushuncha bo'lib, uning vektorlarini yo'nalishli kesma – geometrik vektor shaklida emas, balki arifmetik ifodalash mumkin.

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo tushuncha va elementlari murakkab, xususan iqtisodiy jarayonlarni matematik tekshirish imkonini beradi.

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo deb, mumkin bo'lgan barcha n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plamiga aytiladi va $R_n$ yozuv bilan belgilanadi.

Har bir alohida olingan $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tizim $R_n$ fazo arifmetik vektori yoki nuqtasi deyiladi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlarga **x** vektor yoki nuqtaning mos koordinatalari yoki komponentlari deyiladi. Tizim koordinatalari soni n esa **x** arifmetik vektor yoki nuqta o'lchovi deyiladi.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorning qarama-qarshi vektori deb $-\mathbf{x}=(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ vektorga aytiladi. n ta nollardan iborat (0, 0, …, 0) tizimga n o'lchovli nol vektor deyiladi va $\boldsymbol{\theta}$ xarfi bilan belgilanadi.

Ikki n o'lchovli $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \dots, u_n)$ arifmetik vektorlar berilgan bo'lsin.

$x_i=u_i$ ($i=\{1,2, \dots, n\}$) munosabatlar o'rinli, ya'ni vektorlarning har bir mos koordinatalari o'zaro teng bo'lsa, **x** va **u** vektorlarga o'zaro teng vektorlar deyiladi. **x** va **u** vektorlarning tengligi $\mathbf{x}=\mathbf{u}$ ko'rinishda yoziladi.

## 2. Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar va ularning xossalari.

n o'lchovli arifmetik vektorlar ustida **chiziqli amallar** quyidagicha bajariladi:

1. Berilgan **x** va **u** vektorlarni qo'shganda ularning mos koordinatalari qo'shiladi: $\mathbf{x} + \mathbf{u} = (x_1+u_1; x_2+u_2; \dots; x_n+u_n)$.
2. Berilgan **x** vektorni k haqiqiy songa ko'paytirganda uning har bir koordinatasi k marta ortadi: $k\mathbf{x} = (kx_1; kx_2; \dots; kx_n)$.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{x}$;
2) $\mathbf{x} + (\mathbf{u} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{z}$;
3) $\mathbf{x} + (- \mathbf{u}) = \mathbf{x} - \mathbf{u}$;
4) $\alpha (\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \alpha \mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}\, u$;
5) $(\alpha + \beta)\, \mathbf{x} = \alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{x}$;
6) $\alpha (\beta\, \mathbf{x}) = (\alpha\, \beta)\, \mathbf{x}$;
7) $\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}$;
8) $\mathbf{x}\, 1 = \mathbf{x}$,

bu erda, **x, u** va **z** – arifmetik vektorlar, α va β esa haqiqiy sonlar.

## 3. Arifmetik vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Vektor uzunligi. Skalyar ko'paytma xossalari.

Berilgan $\mathbf{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ va $\mathbf{y}=(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ arifmetik vektorlarning **skalyar ko'paytmasi** deb, vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng songa aytiladi va $(\mathbf{x},\ \mathbf{u})$ shaklda yoziladi. Ta'rifga binoan,

$$(\mathbf{x},\mathbf{u}) = x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_ny_n \quad \text{yoki} \quad (\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Berilgan $\mathbf{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ vektorning moduli yoki uzunligi (normasi) deb, quyidagi formula bo'yicha aniqlanadigan nomanfiy $|\mathbf{x}|$ songa aytiladi:

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} \quad \text{yoki} \quad |\mathbf{x}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1) $(\mathbf{x},\mathbf{x})\geq 0$ , 3) $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{x},\mathbf{z})$,

2) $(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{y})$, 4) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$.

## 4. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Vektorlar orasidagi burchak. Uchburchak tengsizligi.

Skalyar ko'paytma xossalaridan foydalanib, quyidagi **Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi**ni isbotlash mumkin:

$$|(\mathbf{x},\mathbf{u})| \leq |\mathbf{x}|\ |\mathbf{u}|.$$

Tengsizlik bo'yicha **x** va **u** vektorlar skalyar ko'paytmasi absolyut qiymati vektorlar modullari ko'paytmasidan katta emas.

Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi koordinatalarda

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

ko'rinishda yoziladi. Shunday bir yagona $\lambda=\cos\varphi \in [-1;\ 1]$ $(\varphi\in[0;\pi])$ son tanlash mumkinki, bunda

$$(\mathbf{x},\mathbf{u}) = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{u}|\cos\varphi \quad (\varphi \in [0;\ \pi]).$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikdan real fazoda bo'lgani kabi, abstrakt $R_n$ fazoda ham uning **x** va **u** arifmetik vektorlari orasidagi burchak haqida gapirish mumkin va uning kattaligi kosinusini aniqlash mumkin:

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \quad (\varphi\in[0;\pi])$$

$R_n$ fazoda ham **uchburchak** yoki **Minkovskiy tengsizligi** deb ataluvchi

$$|\mathbf{x}+\mathbf{u}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{u}|$$

tengsizlik o'rinli.

## O’z – o’zini tekshirish uchun savollar

1. n o’lchovli haqiqiy arifmetik fazo deganda nimani tushunasiz?
2. n o’lchovli arifmetik vektor yoki nuqta deb-chi?
3. Qanday arifmetik vektorlarga o’zaro teng vektorlar deyiladi?
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
5. Arifmetik vektorlar qanday qo’shiladi?
6. Arifmetik vektor va son qanday ko’paytiriladi?
7. Vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar bo’ysinadigan xossalarni sanab o’ting?
8. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi deb nimaga aytiladi?
9. Arifmetik vektor uzunligi deb-chi?
10. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi bo’ysinadigan qanday xossalarni bilasiz?
11. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini yozing?
12. n o’lchovli fazo arifmetik vektorlari orasidagi burchakni topish masalasini qo’yish mumkinmi?
13. Uchburchak yoki Minkovskiy tengsizligini yozing?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. n o’lchovli arifmetik fazo.
2. Arifmetik vektor.
3. Nol vektor.
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
5. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi.
6. Arifmetik vektor uzunligi yoki moduli.
7. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi.
8. Arifmetik vektorlar orasidagi burchak.
9. Uchburchak tengsizligi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**7.1.** Geometrik **a** va **b** vektorlar o’zaro qanday xususiyatga ega bo’lganda quyidagi munosabatlar bajariladi:

**a)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; **b)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$; **v)** $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$;

**g)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; **d)** $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$; **e)** $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$;

**yo)** $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\boldsymbol{\theta}$.

**7.2.** $\lambda$ parametrning qanday qiymatlarida $\mathbf{a}(1;\ \sqrt{\lambda+3};\ -5;\ \dfrac{6}{\lambda+1})$ va $\mathbf{b}(2-\lambda;\ 2\lambda;\ -5;\ \log_2(\lambda+7))$ vektorlar o’zaro teng, $\mathbf{s}(\lambda^2-1;\ 0;\ \lg|\lambda|;\ 0;\ \arccos|\lambda|)$ esa nol vektor bo’lishini toping?

**7.3.** $\mathbf{a}=(-2;\ 1;\ -2)$ va $\mathbf{b}=(3;\ -4;\ 0)$ vektorlar berilgan. Quyidagi amallarni bajaring yoki hisoblang:

**a)** $-2\mathbf{a}$ ; **b)** $5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ ; **v)** $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ; **g)** $\sqrt{\mathbf{b}^2}$ ;

**d)** $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$ ; **e)** $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$ ; **yo)** $(3\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-2\mathbf{b})$.

**7.4.** Quyidagi vektorlar orasidagi burchaklarni toping:

**a)** $\mathbf{a}(\sqrt{3}\ ; -1)$ va $\mathbf{b}(0;\ 1)$;

**b)** $\mathbf{a}(-5;\ 3;\ -1)$ va $\mathbf{b}(-2;\ -3;\ 1)$;

**v)** $\mathbf{a}(1;\ 0;\ 1;\ 0)$ va $\mathbf{b}(1;\ 1;\ 1;\ 1)$;

**g)** $\mathbf{a}(1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 0)$ va $\mathbf{b}(2;\ 0;\ 1;\ 0;\ 2)$.

# §8. VEKTORLAR SISTEMASI

## 1. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor tenglama shaklida yozish.

n o'lchovli m ta vektorlardan iborat quyidagi

$\mathbf{a_1}(a_{11}; a_{21}; \ldots; a_{n1})$

$\mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22}; \ldots; a_{n2})$

(*)

…………………

$\mathbf{a_m}(a_{1m}; a_{2m}; \ldots; a_{nm})$

vektorlar sistemasi va $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

n o'lchovli $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\ldots+\lambda_m\mathbf{a_m}$ yoki $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{a_j}$ vektorga $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ vektorlarning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ koeffitsientli chiziqli **kombinatsiyasi** deyiladi.

Masala. $\mathbf{a_1}(1; -1; 2; -3)$, $\mathbf{a_2}(3; 0; 1; -2)$, $\mathbf{a_3}(-1; 2; 1; 3)$ vektorlar sistemasi berilgan. $2\mathbf{a_1}-\mathbf{a_2}+3\mathbf{a_3}$ chiziqli kombinatsiya koordinatalarini aniqlang.

Vektorlar ustida ko'rsatilgan chiziqli amallarni bajaramiz:

$$2a_1^T - a_2^T + 3a_3^T = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{matrix}2\cdot1-3+3\cdot(-1)\\2\cdot(-1)-0+3\cdot2\\2\cdot2-1+3\cdot1\\2\cdot(-3)-(-2)+3\cdot3\end{matrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\6\\5\end{pmatrix}$$

Demak, $2\mathbf{a_1} - \mathbf{a_2} + 3\mathbf{a_3} = (-4; 4; 6; 5)$.

Vektorlar ustida chiziqli amallardan foydalanib, vektorlar tengligi ta'rifiga asoslanib, m noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

ko'rinishini kuyidagicha

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\ldots\\a_{n1}\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\ldots\\a_{n2}\end{pmatrix}x_2 + \ldots + \begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\ldots\\a_{nm}\end{pmatrix}x_m = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}$$

yoki $\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = b$ yoki $\sum_{j=1}^{m} x_j\mathbf{a_j} = b$ (8.1)

vektor shakldа yozish mumkin. (8.1) tenglik **chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning vektor**

**shakli** deyiladi.

$\mathbf{a_j}(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ (j={1; 2; …; m}) mos ravishda j – shart vektori, $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorga esa **cheklash vektori** deyiladi. (8.1) vektor tenglamani qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m)$ tizimlari to'plamiga uning echimi deyiladi. Agar $(k_1; k_2; \dots; k_m)$ tizim (8.1) tenglama echimlaridan biri bo'lsa, u holda $k_1\mathbf{a_1}+k_2\mathbf{a_2}+\dots+k_m\mathbf{a_m} =\mathbf{b}$ yoki ixchamroq yozganda $\sum_{j=1}^{m} k_j\mathbf{a_j} = \mathbf{b}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Boshqacha aytganda $\mathbf{a_j}$, (j={1; 2; …; m}) shart vektorlarining mos ravishda $k_j$, (j={1; 2; …; m}) koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi **b** cheklash vektoriga teng.

## 2. Vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish.

(*) vektorlar sistemasi va $\mathbf{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ vektor berilgan bo'lsin.

Ta'rifga binoan, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\mathbf{a_j}$ va **b** vektorlarning o'zaro tengligini ta'minlaydigan tartiblangan $(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m)$ tizim tanlash (tayinlash yoki ko'rsatish) mumkin bo'lsa, n o'lchovli **b** vektor berilgan n o'lchovli (*) vektorlar sistemasi bo'yicha yoyiladi deyiladi va $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m$ sonlar **yoyilma koeffitsientlari** deb ataladi.

**b** vektorni berilgan $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_m}$ vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish uchun $\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_j}x_j = \mathbf{b}$ chiziqli tenglamalar sistemasining echimlaridan birini ko'rsatish etarli. Agar chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda va aniq bo'lsa, **b** vektor (*) sistema vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyiladi, agar birgalikda va aniqmas bo'lsa, cheksiz ko'p usulda yoyilishi mumkin. Agarda chizikli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmasa, **b** vektor (*) sistema vektorlari bo'yicha yoyilmaydi.

Masala. $\mathbf{b}(3; -7; 6; 9)$ vektorni $\mathbf{a_1}(1; -1; 2; 0)$, $\mathbf{a_2}(2; -2; 1; 3)$, $\mathbf{a_3}(-1; 3; 0; 1)$, $\mathbf{a_4}(-3; 1; 2; 4)$ vektorlar sistemasi bo'yicha yoying.

$\mathbf{b} = \mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4$ vektor tenglama tuzamiz va uning echimini Gauss-Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & | & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & | & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, **b** vektor berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yagona usulda $\mathbf{b} = \mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2} - \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4}$ ko'rinishda yoyiladi.

## 3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar sistemalari.

n o'lchovli m ta vektorlardan iborat (*) vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \dots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ (bu erda $\boldsymbol{\theta}$ - n o'lchovli nol vektor) vektor tenglama yoki shuning o'zi m ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama aniq bo'lib, yagona trivial (nol) echimga ega bo'lsa, (*) vektorlar sistemasi o'zaro chiziqli bog'lik bo'lmagan yoki chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama aniqmas bo'lib, trivial echimdan tashqari notrivial (nolmas) echimlarga ham ega bo'lsa, (*) vektorlar sistemasi chiziqli bog'lik sistema deyiladi.

Aniqlik uchun nolmas $(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ echimda $x_m \neq 0$ bo'lsin. Unda

$$\mathbf{a^{(m)}} = -\frac{x_1}{x_m}\mathbf{a_1} - \frac{x_2}{x_m}\mathbf{a_2} - \ldots - \frac{x_{m-1}}{x_m}\mathbf{a_{m-1}}$$

munosabat o'rinli bo'lib, (*) vektorlaridan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasiga teng. Bu esa sistemaning chiziqli bog'liqligini anglatadi.

Agar vektorlar sistemasi yagona nolmas vektordan tashkil topgan bo'lsa-chiziqli erkli; yagona nol vektordan iborat bo'lsa, chiziqli bog'liqdir. Chiziqli erkli sistemaning har qanday qism osti sistemasi – chiziqli erkli, chiziqli bog'liq sistemaning har qanday kengaytirilgan sistemasi esa chiziqli bog'liqdir. Demak, tarkibida nol vektor mavjud har qanday vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir.

Berilgan sistema vektorlari koordinatalaridan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matritsa tuzamiz.

(*) vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liqligi quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

**Teorema.** Agar berilgan (*) sistema vektorlari aniqlaydigan A matritsa rangi r sistema vektorlari soni m ga teng bo'lsin, ya'ni r=m, (*) sistema chiziqli erkli, agarda A matritsa rangi r, sistema vektorlari soni m dan kichik, ya'ni r<m bo'lsa, (*) sistema chiziqli bog'liqdir.

Teorema isboti bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yagona trivial echimga egaligi va trivial echimdan tashqari notrivial echimlarga egaligi haqidagi teorema asosida isbotlanadi va uning shartlari tasdig'ini quyidagi xususiy misollarda tekshirib ko'rish mumkin.

Masalalar.

1) $R_2$ haqiqiy fazoda (koordinatalar tekisligida) ikki $\mathbf{a_1}(a_{11}; a_{21})$ va $\mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22})$ vektorlardan iborat sistema berilgan bo'lsin. Agar vektorlar kollinear bo'lmasa, r(A)=2=2=m munosabatlar o'rinli va sistema – chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo'lsa, r(A) =1<2=m munosabatlar o'rinli bo'lib, sistema chiziqli bog'liqdir.

2) $R_2$ haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ (k≥3) vektorlar berilgan bo'lsin. Ushbu holda r(A)≤2<k=m munosabatlar o'rinli bo'lib, sistemaning ixtiyoriy vektori qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanishi mumkin. $R_2$ fazoda 3 ta va undan ortiq vektorlar sistemasi har doim chiziqli bog'liq sistemani tashkil etadi.

3) $R_3$ haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}(a_{11}; a_{12}; a_{13})$ va $\mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22}; a_{32})$ vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar vektorlar kollinear bo'lmasa, r(A)=2=2=m munosabatlar o'rinli va sistema chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo'lsa, r(A)=1<2=m shartlar bajariladi va sistema chiziqli bog'liqdir.

4) $R_3$ haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ vektorlardan iborat sistema berilgan bo'lsin. Agar vektorlar o'zaro komplanar bo'lmasa, r(A)=3=3 = m munosabatlar o'rinli va sistema – chiziqli erkli. Aks holda, r(A)≤2<3=m shartlar o'rinli bo'lib sistema chiziqli bog'liqdir.

5) $R_3$ haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ (k≥4) vektorlar sistemasi uchun r(A)≤3<k=m munosabatlar o'rinli bo'lib, sistema har doim chiziqli bog'liq. $R_3$ fazoda kamida to'rtta vektorlardan iborat har qanday sistema chiziqli bog'liqdir va hokazo.

Masala. $\mathbf{a_1}$(2; -1; 3; 0), $\mathbf{a_2}$(8; -9; 1; -4), $\mathbf{a_3}$(-3; 4; 1; 2) vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liqligini aniqlang.

Sistema vektorlari koordinatalaridan matritsa tuzamiz va uning rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\mathrm{rang(A)} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -1 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & \frac{5}{2} \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

r(A)=2<3=m munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun berilgan sistema chiziqli bog'liq sistemani tashkil etadi.

## O'z–o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. m ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal shaklini vektor shaklda yozing.
3. Vektor tenglamaning echimi deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha qanday yoyish mumkin?
5. Berilgan vektor berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yagona, cheksiz ko'p usullarda yoyilishi yoki umuman yoyilmasligi mumkinmi?
6. Qanday vektorlar sistemasiga chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi?
7. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Yagona nolmas vektordan, yagona nol vektordan iborat sistemalar qanday sistemalar?
9. Chiziqli erkli sistemaning qism osti, chiziqli bog'liq sistemaning kengaytirilgan va tarkibida nol vektor mavjud vektorlar sistemalari haqida nimalar deyish mumkin?
10. Vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog'liq bo'lishi etarli shartlari nimalardan iborat?
11. $R_2$ fazoda berilgan ikki o'zaro kollinear va nokollinear vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? $R_2$ fazoning har qanday uchta vektorlari haqida-chi?
12. $R_3$ fazoda berilgan uchta o'zaro komplanar va nokomplanar vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? $R_3$ fazoning har qanday to'rtta vektorlari haqida-chi?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi.
2. Chiziqli kombinatsiya koeffitsientlari.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning shakllaridan biri-vektor tenglama.
4. Shartlar va cheklash vektorlari.
5. Vektor tenglama echimi.
6. Vektorni vektorlar sistemasi bo’yicha yoyish.
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasi.
8. Chiziqli bog’liq vektorlar sistemasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**8.1.** Quyida vektorlar sistemasi va ularning chiziqli kombinatsiyasi berilgan:

**a)** $\mathbf{a}_1(1; -3)$, $\mathbf{a}_2(2; 5)$, $\mathbf{a}_3(-2; 1)$ va $-\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$;

**b)** $\mathbf{a}_1(0; 2; -1)$, $\mathbf{a}_2(4; -3; 2)$ va $3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$;

**v)** $\mathbf{a}_1(-1; 0; 3; -2)$, $\mathbf{a}_2(2; 3; -1; 5)$, $\mathbf{a}_3(-3; 4; 1; 2)$ va $2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$.

Chiziqli kombinatsiyalar koordinatalarini aniqlang.

**8.2.** **b** vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo’yicha yozing:

**a)** $\mathbf{b}(5; 3)$: $\mathbf{a}_1(1; -4)$, $\mathbf{a}_2(3; 5)$;

**b)** $\mathbf{b}(-3; 7)$: $\mathbf{a}_1(1; -2)$, $\mathbf{a}_2(-2; 4)$;

**v)** $\mathbf{b}(9; -2; -3)$: $\mathbf{a}_1(4; 1; 5)$, $\mathbf{a}_2(-5; -1; -4)$, $\mathbf{a}_3(1; -1; 2)$;

**g)** $\mathbf{b}(1; -3; 2)$: $\mathbf{a}_1(1; -2; -2)$, $\mathbf{a}_2(-3; 5; 6)$;

**d)** $\mathbf{b}(6; -1; -8)$: $\mathbf{a}_1(1; 2; 3)$, $\mathbf{a}_2(-4; 1; 6)$, $\mathbf{a}_3(5; 2; -1)$;

**e)** $\mathbf{b}(1; -3; 2)$: $\mathbf{a}_1(1; 4; -1)$, $\mathbf{a}_2(-2; 1; 3)$, $\mathbf{a}_3(-5; -2; 7)$;

**yo)** $\mathbf{b}(3;-1; 4; 5)$: $\mathbf{a}_1(2; 1; 3; 2)$, $\mathbf{a}_2(1;-2; 4;-4)$, $\mathbf{a}_3(3; 1; -5; 2)$, $\mathbf{a}_4(-4;-3; 1;-6)$;

**j)** $\mathbf{b}(2; 1;-4; 0)$: $\mathbf{a}_1(1; 2; 1; 3)$, $\mathbf{a}_2(-3; 1; 5;-1)$, $\mathbf{a}_3(2; 4;-1; 6)$, $\mathbf{a}_4(1; 3; 1;5)$.

**8.3.** Quyidagi vektorlar sistemalarining chiziqli erkli yoki chiziqli bog’liqligini aniqlang:

**a)** $\mathbf{a}_1(1; -3)$, $\mathbf{a}_2(-2; 6)$; **b)** $\mathbf{a}_1(1; -3)$, $\mathbf{a}_2(-2; 5)$; **v)** $\mathbf{a}_1(1; -3; 2)$, $\mathbf{a}_2(2; -6; 5)$;

**g)** $\mathbf{a}_1(-2; 4; 6)$, $\mathbf{a}_2(-3; 6; 9)$ **d)** $\mathbf{a}_1(1; 4; 5)$, $\mathbf{a}_2(2; -1; 1)$, $\mathbf{a}_3(-1; 1; 3)$;

**e)** $\mathbf{a}_1(2; 1; -4)$, $\mathbf{a}_2(2; -1; 1)$, $\mathbf{a}_3(-1; 1; 3)$;

**yo)** $\mathbf{a}_1(2; 0; -1; 1)$, $\mathbf{a}_2(3; 8; -1; 5)$, $\mathbf{a}_3(1; 0; -2; 4)$, $\mathbf{a}_4(-1; 0; 1; -3)$;

**j)** $\mathbf{a}_1(1; 0; 0; 1)$ , $\mathbf{a}_2(2; -1; 2; -1)$, $\mathbf{a}_3(3; 2; 4; 1)$, $\mathbf{a}_4(1; 1; 1; 1)$.

## §9. VEKTORLAR SISTEMASINING BAZISI VA RANGI. KANONIK BAZIS

### 1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.

n o'lchovli m ta $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, chiziqli bog'liq sistemani tashkil etsin. $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \ldots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema esa berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ sistemaning qism osti sistemalaridan biri bo'lsin.

Agar: birinchidan, $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \ldots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema chiziqli erkli; ikkinchidan, $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ sistemaning har bir vektori $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \ldots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilsa, u holda $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \ldots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ vektorlar sistemasiga $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ **vektorlar sistemasining bazisi** deyiladi.

$\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini sistemaning bazisigacha to'ldirish mumkin. Berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ sistemaning bazislaridan birini topish uchun $\mathbf{a_1}x_1+\mathbf{a_2}x_2+\ldots+\mathbf{a_m}x_m=\boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama tuziladi va uning biror-bir ko'rinishdagi umumiy echimi quriladi. Qurilgan umumiy echimning bazis noma'lumlari oldidagi mos koeffitsient – vektorlardan iborat sistema uning bazisini tashkil etadi. Har qanday chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi umumiy echim ko'rinishlariga mos holda bir nechta bazisga ega bo'lishi mumkin. Har bir bazisdagi vektorlar soni esa tengligicha qoladi.

Berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning **rangi** deyiladi.

Masala. Quyida berilgan vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang:

$$\mathbf{a_1}(1; -1; 2; 3),\quad \mathbf{a_2}(-2; -3; 0; 1),\quad \mathbf{a_3}(-2; -9; 4; 6),\quad \mathbf{a_4}(-1; 2; -2; -1).$$

$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4 = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama umumiy echimini Gauss-Jordan usulida quramiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1$, $x_2$ va $x_4$ noma'lumlar umumiy echimning bazis noma'lumlari. Demak, mos ravishda, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ va $\mathbf{a_4}$ vektorlar tizimi berilgan sistemaning bazislaridan birini tashkil etadi. Tizim 3 ta vektordan tarkib topgani uchun, berilgan vektorlar sistemasining rangi 3 ga teng.

Agar $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining rangi r ga teng bo'lsa, u holda sistemaning r ta vektoridan tuzilgan har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasi uning bazisi bo'ladi.

### 2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari.

Agar berilgan ikki n o'lchovli $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlar o'zaro **ortogonal vektorlar** deyiladi. «Ortogonal» iborasi real fazo vektorlari uchun «perpendikulyar» iborasi bilan almashtirilishi mumkin. Masalan, $\mathbf{a_1}(-1; 2; 0; 3)$ va $\mathbf{a_2}(4; 2; -5; 0)$ vektorlar o'zaro ortogonal vektorlardir, chunki

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}) = -1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-5) + 3\cdot 0 = 0\,.$$

$n$ o'lchovli nolmas vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistemaga **ortogonal vektorlar sistemasi** deyiladi.

Masalan, $\mathbf{a}_1(3;\ 2;\ 1)$, $\mathbf{a}_2(2;\ -3;\ 0)$, $\mathbf{a}_3(-3;\ -2;\ 13)$ vektorlar sistemasi ortogonaldir, chunki $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)=0$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)=0$ va $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)=0$.

Har qanday nolmas vektorlardan iborat ortogonal vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir.

$n$ o'lchovli $k$ ta $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorlardan iborat chiziqli erkli sistema berilgan bo'lsin. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish mumkin, ya'ni chiziqli erkli $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ sistemani, mos ravishda $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Almashtirish quyidagi Shmidt formulalari yordamida amalga oshiriladi:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_t = \mathbf{a}_t - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(\mathbf{b}_i, \mathbf{a}_t)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)} \mathbf{b}_i \qquad (\mathbf{t} \in \{2;\ 3;\ldots;\ \mathbf{k}\}).$$

**$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$** chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal **$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$** vektorlar sistemasini keltirilgan qurish usuli **$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$** vektorlar sistemasini **ortogonallash jarayoni** deyiladi.

Masala: $\mathbf{a}_1(1;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{a}_2(0;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{a}_3(0;\ 0;\ 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir, chunki rang$(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)=3$ $=3$ (vektorlar soni). Demak, ortogonallash jarayonini qo'llab, berilgan sistemani $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin.

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1(1;\ 1;\ 1);$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 = (0;\ 1;\ 1) - \frac{2}{3}(1;\ 1;\ 1) = (-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3});$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}\mathbf{b}_1 - \frac{(\mathbf{b}_2, \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}\mathbf{b}_2 = (0;\ 0;\ 1) - \frac{1}{3}(1;\ 1;\ 1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}) =$$

$$= (0; -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1; 1; 1); (-2; 1; 1); (0; -1; 1) natijani olamiz.

Nolmas **b** vektorning normallangan yoki birlik vektori deb, $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori normallangan, ya'ni birlik vektor ko'rinishga keltirilgan ortogonal sistemaga **ortonormallangan vektorlar sistemasi** deyiladi.

Agar $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ ortogonal vektorlar sistemasi bo'lsa, $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|}$ ortonormallangan vektorlar sistemasidir.

Masala. $\mathbf{a}_1(1;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{a}_2(0;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{a}_3(0;\ 0;\ 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortonormallangan sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi ustida dastlab qurilgan ortogonal **b**$_1$(1; 1; 1); **b**$_2$(-2; 1; 1); **b**$_3$(0; -1; 1) sistemaning har bir vektorini birlik ko'rinishiga keltiramiz.

$$\frac{\mathbf{b_1}}{|\mathbf{b_1}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1;\ 1;\ 1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\mathbf{b_2}}{|\mathbf{b_2}|}=\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2;\ 1;\ 1)=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\mathbf{b_3}}{|\mathbf{b_3}|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0;-\ 1;\ 1)=\left(0;\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

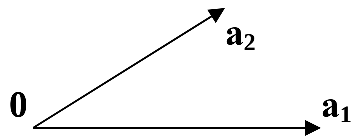
Ortonormallangan sistema $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \left(0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektorlar tarkibidan iborat.

## 3. $R_n$ fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis.

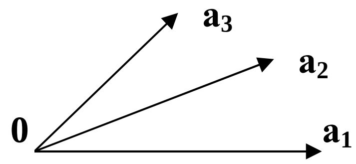
n o'lchovli haqiqiy arifmetik $R_n$ fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli n o'lchovli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi. n o'lchovli n ta **a**$_1$, **a**$_2$, …, **a**$_n$ vektorlardan iborat tartiblangan tizim $R_n$ fazo bazisi va **a** uning ixtiyoriy vektori bo'lsin. U holda **a** vektor tanlangan bazis vektorlari bo'yicha ularning yagona chiziqli kombinatsiyasi $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_n\mathbf{a_n}$ ko'rinishida yoyilishi mumkin. $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ haqiqiy sonlarga **a** vektorning **a**$_1$, **a**$_2$, …, **a**$_n$ bazisdagi koordinatalari deyiladi.

Xususan, haqiqiy koordinatalar tekisligi ($R_2$) bazisi deb, tekislikda tanlangan ixtiyoriy tartiblangan ikkita nokollinear vektorlarga aytiladi.

$R_2$ fazoda tanlangan 0 nuqta va **a**$_1$, **a**$_2$ bazis birgalikda tekislikda D*ekart koordinatalari sistemasi* deyiladi (9.1-rasm).




9.1-rasm




9.2-rasm

Ixtiyoriy **a**Є$R_2$ vektor tanlangan **a**$_1$, **a**$_2$ bazis vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

Haqiqiy real uch o'lchovli fazo ($R_3$) bazisi deb, unda ixtiyoriy tanlangan uchta tartiblangan nokomplanar vektorlarga aytiladi.

$R_3$ fazoda tanlangan 0 nukta va **a**$_1$, **a**$_2$, **a**$_3$ bazis birgalikda fazoda D*ekart koordinatalari sistemasi* deyiladi (9.2-rasm). Ixtiyoriy **a**Є$R_3$ vektor tanlangan **a**$_1$, **a**$_2$, **a**$_3$ bazis vektorlari bo'yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

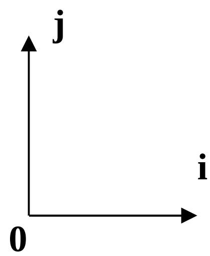
n-o'lchovli haqiqiy arifmetik **fazo** ($R_n$) **ortogonal bazisi** deb, vektorlari juft-jufti bilan o'zaro ortogonal bo'lgan bazisga aytiladi.

$R_n$ **fazo ortonormallangan bazisi** deb esa, har bir vektori normallangan ortogonal bazisga aytiladi.

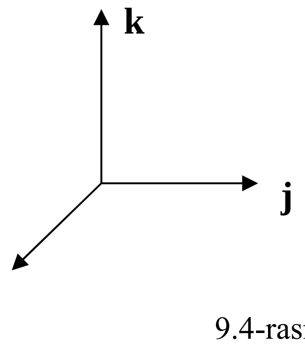
n-o'lchovli n ta $\mathbf{e_1}$(1; 0; …; 0), $\mathbf{e_2}$(0; 1; …; 0), …, $\mathbf{e_n}$(0; 0; …; 1) vektorlardan iborat ortonormallangan bazisga $\mathbf{R_n}$ **fazo kanonik bazisi** deyiladi.

Xususan **i**(1; 0), **j**(0; 1) bazis $R_2$ fazo kanonik bazisi deyilsa, **i**(1; 0; 0), **j**(0; 1; 0), **k**(0; 0; 1) bazis esa $R_3$ fazo kanonik bazisi deyiladi.

Tekislikda (fazoda) ortonormallangan bazisli *Dekart* koordinatalar sistemasiga *t¤¨ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi (9.3-rasm, 9.4-rasm).




9.3-rasm




9.4-rasm

$R_n$ fazoda berilgan ixtiyoriy chiziqli erkli vektorlar sistemasini fazo bazisigacha to'ldirish mumkin.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorlar sistemasi bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini uning bazisigacha to'ldirish mumkinmi?
3. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasining bazislaridan biri qanday quriladi?
4. Chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi bir necha bazisga ega bo'lishi mumkinmi va nima uchun?
5. Vektorlar sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
6. Ortogonal vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasini ortogonal sistemaga aylantirish mumkinmi va qanday?
8. Ortogonallash jarayoni deganda nimani tushunasiz?
9. Ortonormallangan vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
10. Ortogonal sistemani ortonormallangan sistemaga aylantirish jarayoni nimadan iborat?
11. n- o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
12. $R_n$ fazo ixtiyoriy vektorini uning bazisi bo'yicha yoyish mumkinmi va qanday?
13. $R_n$ fazo kanonik bazisi deb nimaga aytiladi?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Vektorlar sistemasi bazisi.
2. Vektorlar sistemasi rangi.
3. Ortogonal vektorlar sistemasi.
4. Ortogonallash jarayoni.
5. Ortonormallangan vektorlar sistemasi.
6. Fazo bazisi.
7. Kanonik bazis.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**9.1.** Quyida berilgan vektorlar sistemalarining bazislaridan birini quring va ranglarini aniqlang:

**a)** $\mathbf{a_1}(2; -5)$, $\mathbf{a_2}(-6; 15)$;

**b)** $\mathbf{a_1}(3; -1; 2)$, $\mathbf{a_2}(1; 4; -1)$, $\mathbf{a_3}(7; 2; 3)$;

**v)** $\mathbf{a_1}(1; 2; -1; 3)$, $\mathbf{a_2}(0; 3; 4; 1)$, $\mathbf{a_3}(-2; -1; 6; -5)$, $\mathbf{a_4}(5; 4; 2; -4)$;

**g)** $\mathbf{a_1}(-3; 1; 1; 4)$, $\mathbf{a_2}(-2; 0; -1; 5)$, $\mathbf{a_3}(5; -3; -5; -2)$, $\mathbf{a_4}(-1; 1; 2; -1)$;

**d)** $\mathbf{a_1}(1;-2; 3; 0; -1)$, $\mathbf{a_2}(2; 4; -1; 3; 1)$, $\mathbf{a_3}(-3; 1; 0; 4; 2)$, $\mathbf{a_4}(-6; -9; 5; -2; -1)$; $\mathbf{a_5}(-9; 0; -2; 5; 4)$.

**9.2.** Vektorlar juftliklaridan o'zaro ortogonallarini ajrating:

**a)** $\mathbf{a_1}(2; -3)$ va $\mathbf{a_2}(6; 4)$; **b)** $\mathbf{a_1}(-4; 3)$ va $\mathbf{a_2}(2; 3)$;

**v)** $\mathbf{a_1}(1; 3; 2)$ va $\mathbf{a_2}(0; 2; -3)$; **g)** $\mathbf{a_1}(-1; 5; -4)$ va $\mathbf{a_2}(3; 0; 2)$;

**d)** $\mathbf{a_1}(1; 3; 2; -3)$ va $\mathbf{a_2}(1; 1; 1; 2)$; **e)** $\mathbf{a_1}(1; 2; 3; 4)$ va $\mathbf{a_2}(-2; 0; 1; 2)$.

**9.3.** Quyida berilgan chiziqli erkli vektorlar sistemalari ustida ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari quring:

**a)** $\mathbf{a_1}(1; 1)$, $\mathbf{a_2}(1; 2)$; **b)** $\mathbf{a_1}(1; 0; 1)$, $\mathbf{a_2}(1; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(1; -3; 3)$;

**v)** $\mathbf{a_1}(1; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(0; 0; 1; 1)$.

**9.4.** $\mathbf{a_1}(1; 3; 2)$, $\mathbf{a_2}(0; 2; -3)$, $\mathbf{a_3}(13; -3; -2)$ vektorlar sistemasi $R_3$ fazoning ortogonal bazisi bo'la olishini ko'rsating va $\mathbf{b}(-9; 9; 19)$ vektorning ushbu bazisidagi koordinatalarini toping.

**9.5.** $\mathbf{a_1}(2; 1; 1; 1)$ va $\mathbf{a_2}(-3; 2; 3; 1)$ vektorlarning ortogonalligini tekshirib ko'ring. Ularni $R_4$ fazoning ortonormal bazisigacha to'ldiring.

# §10. BIR JINSLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING FUNDAMENTAL ECHIMLARI TIZIMI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI UMUMIY ECHIMI VEKTOR SHAKLI

## 1. Vektor ko'rinishda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik shartlari.

m ta noma'lumli n ta chizikli tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \mathbf{b}.$$

Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ shartlar vektorlari sistemasi rangining **b** cheklash vektori hisobiga kengaytirilgan $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}, \mathbf{b}$ vektorlar sistemasi rangiga teng bo'lishi zarur va etarli.

Agar rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$)=rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}, \mathbf{b}$) = m bo'lsa, sistema aniq bo'ladi.

Agar rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$)=rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}, \mathbf{b}$) < m bo'lsa, sistema aniqmas bo'ladi.

Agarda rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$)<rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}, \mathbf{b}$) bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

m ta noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}.$$

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki shartlar vektorlari $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ sistemasi rangi cheklash nol vektori hisobiga kengaytirilgan $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}, \boldsymbol{\theta}$ sistema rangiga teng va m ta nollar tizimi uning echimi bo'lishi bilan xarakterlanadi. Bir jinsli sistema uchun rang( $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$)=m munosabat o'rinli bo'lsa, sistema aniq bo'lib, yagona nol echimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun rang($\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$)<m munosabat o'rinli bo'lsa, sistema nol echimdan tashqari nolmas echimlarga ham egaligi bilan xarakterlanadi. Ushbu holda, har bir nolmas echim m o'lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Demak, sistema echimlarining chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli-erkliligi yoki chiziqli–bog'liqligi haqida gapirish mumkin. Bir jinsli sistema har qanday echimlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi uning echimibo'laoladi.

## 3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari tizimi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari sistemasi yoki tizimi deb, uning chiziqli bog'liq bo'lmagan nolmas $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots, \mathbf{F_к}$ echimlariga aytiladiki, sistemaning har bir echimi ushbu echimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida aniqlanishi mumkin.

Bir jinsli sistema shartlar vektorlari $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ sistemasining rangi r ga teng bo'lib, sistema noma'lumlari soni n dan kichik bo'lsin. Bunday bir jinsli sistema o'zining fundamental echimlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi va tizim har biri m o'lchovli $m-r$ nolmas vektorlardan tarkib topadi.

Bir jinsli sistemaning fundamental echimlari tizimi quyidagicha quriladi:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy echimi quriladi;

2. $m-r$ o'lchovli $m-r$ ta vektorlardan iborat biror – bir chiziqli – erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Har bir vektori $m-r$ o'lchovli $\mathbf{e_1}(1; 0; \ldots; 0)$, $\mathbf{e_2}(0; 1; \ldots; 0)$, …, $\mathbf{e_{m-r}}(0; 0; \ldots; 1)$

sistemani tanlash mumkin;

3. Umumiy echim erkli noma'lumlari o'rniga $\mathbf{e_1}$ vektor mos koordinatalarini qo'yib, bazis noma'lumlar aniqlanadi va mos ravishda $\mathbf{F_1}$ fundamental echim quriladi. $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, …, $\mathbf{e_{m-r}}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, …, $\mathbf{F_{m-r}}$ fundamental echimlar quriladi.

Masala. Quyida berilgan bir jinsli sistemaning fundamental echimlari tizimidan birini quring va uning umumiy echimini vektor shaklda aniqlang:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ \quad 5x_2 + x_3 \quad + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sistemaning umumiy echimini Gauss – Jordan usulida quramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 5 & | & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{13}{5} & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema noma'lumlari soni m = 5 va sistema rangi r = 2 bo'lgani uchun, m – r = 3. Chiziqli – erkli $\mathbf{e_1}$( 1; 0; 0 ) , $\mathbf{e_2}$( 0; 1; 0 ) va $\mathbf{e_3}$( 0; 0; 1 ) sistemani tanlaymiz. $\mathbf{e_1}$(1; 0; 0) vektor koordinatalarini umumiy echimning mos erkli noma'lumlari o'rniga qo'yib, bazis noma'lumlarni aniqlaymiz va $\mathbf{F_1}$(2; 1; 0; 0; -1) fundamental echimni quramiz. $\mathbf{e_2}$(0; 1; 0) vektor erdamida $\mathbf{F_2}(-\frac{13}{5};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{7}{5})$ va $\mathbf{e_3}$( 0; 0; 1 ) vektor yordamida esa $\mathbf{F_3}$(1; 0; 0; 1; 0) fundamental echimlarni quramiz.

Bir jinsli sistemaning umumiy echimi qurilgan fundamental echimlar tizimi orqali vektor shaklda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{X} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu erda $\lambda_1$ , $\lambda_2$ va $\lambda_3$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

## 3. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi umumiy echimi vektor shakli.

m ta noma'lumli n ta chizikli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin:

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \neq \boldsymbol{\theta}).$$

Sistemaning ozod hadlari ustuni nol ustun bilan almashtirilgan

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$$

ko'rinishiga dastlabki bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deyiladi. Sistemani keltirilgan ko'rinishga keltirish uchun uning cheklash vektori **b** ni nol vektor **θ** bilan almashtirish kifoya.

Berilgan bir jinslimas sistemaning umumiy echimini vektor shaklda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F_0} + \lambda_1\mathbf{F_1} + \lambda_2\mathbf{F_2} + \ldots + \lambda_{m-r}\mathbf{F_{m-r}}.$$

Bu erda, $\mathbf{F_0}$ - dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy echimlaridan biri, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, …, $\mathbf{F_{m-r}}$ - keltirilgan sistema fundamental echimlari tizimi, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Masala. Quyida berilgan sistema umumiy echimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 2 \\ \quad 5x_2 - 7x_3 \qquad + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Biz oldingi masalada berilgan sistema keltirilgan sistemasi fundamental echimlari tizimini qurdik. Berilgan sistema xususiy echimlaridan birini, aytaylik, $\mathbf{F_0} = (\frac{6}{5}; 0; 0; 0; \frac{1}{5})$ ni tuzish qiyin emas. Demak, berilgan sistema umumiy echimi vektor shakli quyidagicha yozilishi mumkin

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu erda, $\lambda_1$, $\lambda_2$ va $\lambda_3$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik etarli sharti nimadan iborat?
2. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik etarli shartlari nimalardan iborat?
3. Sistemaning birgalikdamaslik etarli sharti-chi?
4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari tizimi deb nimaga aytiladi?
5. Bir jinsli sistema qanday shartlar bajarilganda o'zining fundamental echimlari tizimiga egaligi bilan xarakterlanadi?
6. Bir jinsli sistema fundamental echimlari tizimini qurish jarayoni nimalarni o'z ichiga oladi?
7. Agar bir jinsli sistema fundamental echimlari tizimi qurilgan bo'lsa, uning umumiy echimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
8. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?

9. Bir jinslimas sistema umumiy echimi vektor shaklda qanday yoziladi?

**Ma'ruzaning tayanch iboralari**

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi shartlar vektorlari sistemasining rangi.
2. Sistema kengaytirilgan vektorlari sistemasining rangi.
3. Bir jinsli sistema fundamental echimlari tizimi.
4. Fundamental echimlar tizimini qurish jarayoni.
5. Fundamental echimlar chiziqli kombinatsiyasi.
6. Bir jinsli sistema umumiy echimining vektor shakli.
7. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi.
8. Bir jinslimas sistema umumiy echimining vektor shakli.

**Mustaqil ishlash uchun misollar**

**10.1.** Quyida berilgan bir jinsli sistemalarning fundamental echimlari tizimlaridan birini quring va umumiy echimlarini vektor shaklida yozing:

**a)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

**v)** $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$

**10.2.** Sistema umumiy echimlarini vektor shaklda quring:

**a)** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$

**v)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 2x_6 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 = -1 \end{cases}$

# §11. CHIZIQLI ALGEBRA USULLARINING BA'ZI CHIZIQLI IQTISODIY MODELLARNING TAHLILIDA QO'LLANILISHI

## 1. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Rejalashtirishning asosiy masalasi

Chiziqli algebra usullari keng qo'lamda iqtisodiyotni rejalashtirish bilan bog'liq masalalarni echishda qo'llaniladi. Biz quyida asosan tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiyotni sonli tahlil qilish va xususan, ijtimoiy mahsulot ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish masalasi o'zaro ishlab chiqarish mahsulotlari va xizmatlar oqimlarini qarashga keltiriladi. Shu nuqtai nazardan iqtisodiy sistema har biri biror-bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga moslashgan tarmoqlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar o'zaro ayirboshlanadi va tarmoqlar orasida mahsulot oqimlari vujudga keladi. O'zaro mahsulot oqimlarining vujudga kelishi muqarrardir, chunki har bir tarmoq o'z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida o'zga tarmoq mahsulotidan foydalanadi yoki uni sarflaydi.

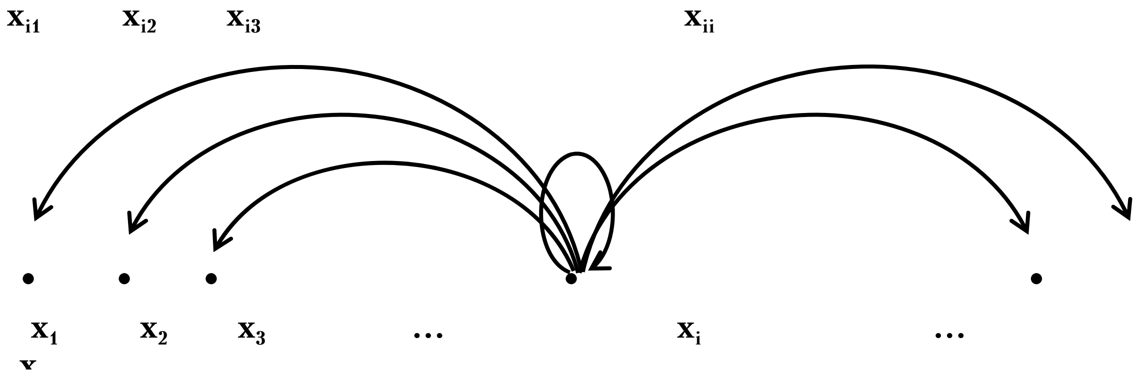
Iqtisodiyotning normal rivojlanish asosiy shartlaridan biri barcha tarmoqlar bo'yicha ishlab chiqarish sarflari va umumiy yig'indi mahsulot orasida balansning mavjudligidir. Bunda ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ishlab chiqarish tarmoqlari sohasiga qaytmasligini va shaxsiy extiyojni qondirishga, jamg'arishga sarflanishini yoki eksportga chiqarilishini e'tiborga olish talab etiladi.

Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o'zaro bog'liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishlab chiqarish tsikli yakunlanadigan vaqtni o'z ichiga olgan davrni qaraymiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, …, n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo'lsin. Aytaylik, qaralayotgan davrda $x_1$ – metallurgiya tarmog'ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, $x_2$ – kimyo tarmog'ining ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, $x_3$ – avtomobilsozlik tarmog'ining ishlab chiqaradigan engil avtomobillari soni bo'lsin va hokazo.

$\mathbf{x}(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi. k –tarmoqning $x_k$ birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini $x_{ik}$ orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda $x_{13}$ – $x_3$ dona engil avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti metall sarfi miqdorini anglatadi. i - tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori $y_i$ bo'lsin. $\mathbf{u}(u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i - tarmog'i mahsuloti $x_i$ uchun moddiy balans sxemasini «mahsulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash» printsipi bo'yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.




Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i \quad (i = 1;\ 2;\ ...;\ n) \qquad (11.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i-mahsulotning bevosita sarfi miqdori $a_{ik}$ bo'lsin. $a_{ik}$ kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsientlari yoki texnologik koeffitsientlar deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, $a_{13}$ – 1 dona engil avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O'z-o'zidan ko'rinadiki, i – mahsulotning k - tarmoqqa jami sarfi $x_{ik}$ k-tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i - maxsulotning bevosita sarfi $a_{ik}$ ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori $x_k$ ga ko'paytirilganiga teng: $\mathbf{x_{ik} = a_{ik}x_k}$ ya'ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik printsipi o'rinli bo'lsin. (11.1) tenglamalar sistemasini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + y_i \qquad \text{yoki} \qquad x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = y_i$$

ko'rinishda yozish mumkin. Oxirgi sistemani, o'z navbatida, vektor-matritsa ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{X - AX = U} \qquad \text{yoki} \qquad \mathbf{(E - A)X = U} \qquad (11.2)$$

Bu erda, E – n-tartibli birlik matritsa bo'lib, $A=(a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi yoki texnologik matritsa.

$a_{ik}$ kattaliklarni o'zgarmas deb qaraymiz. (11.2) tenglamaga Leontevning chiziqli modeli deyiladi. Agar $\mathbf{U} = \boldsymbol{\theta}$ bo'lsa, Leontev modeli yopiq, $\mathbf{U} \neq \boldsymbol{\theta}$ bo'lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko'rinishida qo'yilishi mumkin:

1) Yakuniy mahsulot hajmlari vektori **U** ga qarab, sistema yalpi mahsulot hajmi vektori **X** ni hisoblash;
2) **X** ga qarab, **U** ni hisoblash.

Rejalashtirishni asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya'ni **U** vektorning berilishiga qarab, **X** vektorni hisoblashdir. Leontevning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj **U** ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma'nosiga ko'ra **X** nomanfiy bo'lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo'lganda nomanfiy echimga ega bo'lishini tekshirishdan iborat.

$\mathbf{X_0\text{-}AX_0}$ vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas $\mathbf{X_0}$ vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model) deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralilik zaruriy va etarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (11.2) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi etarli.

Agar (11.2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy **U** vektor uchun (11.2) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas **X** echimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy **U** vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi **X** vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E\text{-}A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala echimi

$$X = (E\text{-}A)^{-1}\,U \qquad \textbf{(11.3)}$$

formula bo'yicha topiladi.

## 2. Bilvosita xarajatlar haqida tushuncha. To'la xarajatlar haqida tushuncha

Sistemaning bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi $A=(a_{ik})$ berilgan bo'lsin. Ma'lumki, k - tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun $\mathbf{a}^{\mathbf{k}}=(a_{1k};\ a_{2k};\ \ldots;\ a_{nk})^T$ mahsulotlar zarur. Bu A matritsaning k – ustunidan iborat. O'z navbatida, $\mathbf{a}^{\mathbf{k}}$ mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun $\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}$ mahsulotlar zarur bo'ladi. $\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}$ ustun vektor bo'lib, $\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}=(a_{1k}^{(1)};\ a_{2k}^{(1)};\ \ldots;\ a_{nk}^{(1)})^T$ va $\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}=A\mathbf{a}^{\mathbf{k}}$.

Vektor–matritsali tenglamada $\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}$ vektorning koordinatalari k-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan barcha tarmoqlar mahsulotlarini tayyorlashda i – mahsulot xarajatlari bo'lib, birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari deyiladi.

$\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}$ $(k\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ n\})$ ustun vektorlardan tuzilgan $A^{(1)}$ matritsa birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi va

$$A^{(1)}=(a^{1(1)};\ a^{2(1)};\ \ldots;\ a^{k(1)};\ \ldots;\ a^{n(1)})=(Aa^1;\ Aa^2;\ \ldots;\ Aa^k;\ \ldots;\ Aa^n)=AA=A^2.$$

Shunday qilib, $A^{(1)}=AA=A^2$.

Birinchi tartibli bilvosita xarajatni ta'minlash uchun zarur xarajatlar ikkinchi tartibli bilvosita xarajatlar deyiladi va $\mathbf{a}^{\mathbf{k(2)}}=A\mathbf{a}^{\mathbf{k(1)}}$. $A^2=AA^{(1)}$ – ikkinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi.

Yuqoridagi mulohazalarni davom ettirib, j - tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari va ularning matritsasini kiritish mumkin, ya'ni

$$\mathbf{a}^{\mathbf{k(j)}}=A^j\mathbf{a}^{\mathbf{k}} \quad \text{va} \quad A^{(j)}=AA^{(j-1)}.$$

Bevosita va barcha tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari yig'indisi

$$c_{ik} = a_{ik} + a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)} + \ldots + a_{ik}^{(j)} + \ldots\ .$$

to'la xarajat koeffitsientlari deyiladi.

$C=(c_{ik})$ **–** matritsa, mos ravishda, to'liq moddiy xarajat koeffitsientlari matritsasi deyilib,

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(j)} + \ldots\ .$$

$B = C + E = E + A + A^{(1)} + A^{(2)} + \ldots + A^{(j)} + \ldots$ matritsa ham o'z navbatida, to'la xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi. A matritsa samarali bo'lsa, matritsali qator yaqinlashuvchidir. V matritsa elementlari k-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun i - mahsulot sarflaridan tashqari, har bir tarmoqning bir birlik yakuniy mahsulotini vujudga keltirish xarajatlarini ham o'z ichiga oladi. $V=(E\text{-}A)^{-1}$ tenglikni isbotlash qiyin emas. Natijada (11.3) formula **X = VU** ko'rinishni oladi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

Ikki tarmoqdan iborat iqtisodiy sistemaning bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi A va yakuniy mahsulot vektori **U** berilgan. Sistemaning yalpi mahsulot hajmi vektori **X** ni toping.

Dastlab:

**a)** sistemaning tarmoqlararo moddiy balans modelini tuzing;

**b)** V matritsani matritsali qatorni kesish usulida taqriban quring va **X** ni toping;

**v)** V matritsani teskari matritsa topish Jordan usulida quring va **X** ni toping;

**g)** Masalani programma yordamida kompyuterda eching.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}24\\ 0{,}12 & 0{,}08\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}1000\\ 1200\end{pmatrix}$$

$$2)\ A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}18\\ 0{,}14 & 0{,}06\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}1200\\ 1400\end{pmatrix}$$

$$3)\ A=\begin{pmatrix}0{,}16 & 0{,}2\\ 0{,}15 & 0{,}1\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}1400\\ 1600\end{pmatrix}$$

$$4)\ A=\begin{pmatrix}0{,}22 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0{,}16\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}1600\\ 1800\end{pmatrix}$$

$$5)\ A=\begin{pmatrix}0{,}14 & 0{,}18\\ 0{,}1 & 0{,}21\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}1800\\ 2000\end{pmatrix}$$

```
5   CLS
10 PRINT “MM-70 Karimova Madina &  KBI-91 Abdikarimova Dinora”
20 KEY OFF
30 PRINT “@ copyright by Karimova Madina &  Abdikarimova Dinora”
40 LOCATE 3, 11
50 PRINT “matritsa ustida amallar va ularning iqtisodiyotda qo’llanishi”
60 LOCATE 4, 20
65 PRINT “balans modelini tuzish”
66 LOCATE 5, 21
70 PRINT “Ixtiyoriy tugmani bosing”
80 A$= INKEY$: IF A$ = “ ” THEN 80
100 DIM A(2, 2), AA(2, 2), Y(2)
105 PRINT “A matritsani kiriting”
110 FOR I = 1 TO 2
115 C = 0
120 FOR J = 1 TO 2
122 PRINT “A”; I; J
125 INPUT A(I, J)
```

```
130 C = C + A(I, J)
135 PRINT “E-A matritsani quring”
140 IF I = J THEN A(I, J) = 1 – A(I, J) ELSE A(I, J) = 0 – A(I, J)
160 NEXT J
170 ‘ matritsani samaradorligini tekshiring,
180 IF ABS(C) >= 1 THEN 480
190 NEXT I
200 PRINT “U vektorni kiriting”
210 FOR I = 1 TO 2: PRINT “Y”; I: INPUT Y(I): NEXT I
220 ’ teskari matritsa quring
230 D = A(1, 1) * A(2, 2) – A(1, 2) * A(2, 1): IF D = 0 THEN 500
250 AA(1, 1)=A(2, 2): AA(2, 1)=-A(1,2):AA(1,2)=-A(2, 1): AA(2,2)=A(1, 1)
260 FOR I = 1 TO 2
270 FOR J = 1 TO 2
280 A(I, J) = AA(J, I) / D
300 NEXT J, I
330 ‘ X yalpi mahsulot hajmini hisoblang
360 FOR I = 1 TO 2
380 S = 0
400 FOR J = 1 TO 2
410 S = S + A(I, J) * Y(J)
420 NEXT J: X(I) = S
430 NEXT I
440 PRINT “yalpi mahsulot hajmi”
450 FOR I = 1 TO 2: PRINT “x”; I; “=”; X(I): NEXT I
470 GOTO 510
480 PRINT “matritsa samarali emas”
490 GOTO 510
500 PRINT “determinant nolga teng”
510 LOCATE 22, 30: PRINT            “see you”  520 END
```

# §12. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ

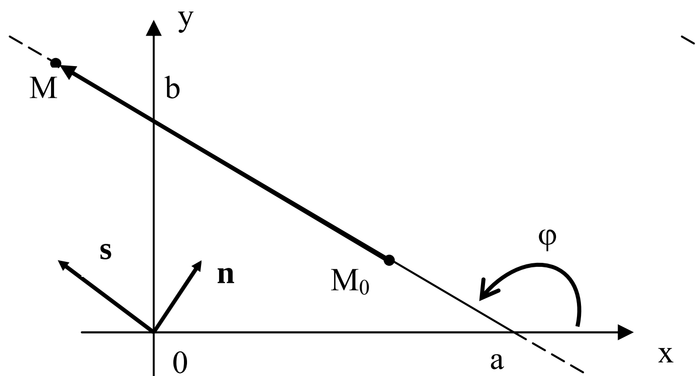
## 1. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari

Tekislikda koordinatalar sistemasini tanlash uning nuqtalarini analitik ifodalash imkonini beradi.

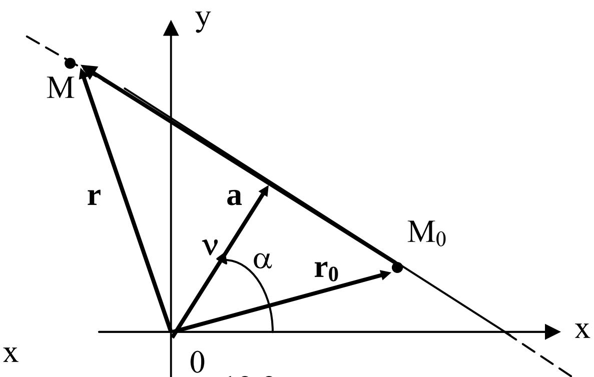
Analitik geometriyada tekislikdagi har qanday chiziq biror-bir umumiy xossaga ega nuqtalar to'plami sifatida qaraladi. Tekislikda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga mos holda qaralayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari x va u orqali belgilansa, uning barcha nuqtalari uchun umumiy xossa x va u larga nisbatan tenglama ko'rinishida ifodalanadi.

Shunday qilib, chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta koordinatalarini qanoatlantiruvchi x va u larga nisbatan $F(x, u)=0$ tenglamaga chiziq tenglamasi deyiladi yoki $F(x, u)=0$ tenglama chiziqni aniqlaydi deyiladi.

Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lsin. To'g'ri chiziqning tekislikdagi tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini ushbu to'g'ri chiziqning biror-bir $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasi va to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nolmas **n**(A;B) $(A^2+B^2\neq 0)$ vektor yoki to'g'ri chiziqqa parallel nolmas **s**(m; n) $(m^2+n^2 \neq 0)$ vektor to'liq aniqlaydi. **n** vektor to'g'ri chiziqning normal vektori, **s** vektor esa yo'naltiruvchi vektori deyiladi (12.1-rasm).



12.1 – rasm.



12.2 – rasm.

Koordinatalar sistemasining boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqni oxiri to'g'ri chiziqda joylashgan uning yagona **a** normal radius vektori birga-bir aniqlaydi (12.2-rasm).

To'g'ri chiziqning ixtiyoriy M(x; y) nuqtasi uchun **n**(A; B) va $\mathbf{M_0M}$ $(x-x_0;\ u-u_0)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{M_0M}) = 0 \text{ yoki koordinatalarda } A(x-x_0) + V(u-u_0) = 0.$$

Tenglamalar nuqtasi va normal vektori bilan berilgan to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

$$A x + V u + S = 0 , ( A^2 + V^2 \neq 0 ) \qquad (12.1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. To'g'ri chiziq umumiy (12.1) ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, quyidagi tasdiqlar o'rinli:

a) Agar $S = 0$ bo'lsa, $A x + V u = 0$ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

b) **n**(A; B) nolmas vektor (12.1) ko'rinishdagi to'g'ri chiziqning normal vektoridir.

Agar umumiy tenglamada $A V S \neq 0$ munosabat o'rinli bo'lsa, (12.1) tenglama quyidagi ko’rinishga keltiriladi:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (12.2)$$

(12.2) tenglama to’g’ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi.

Agar (12.1) tenglamada V≠0 bo’lsa, umumiy tenglama to’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deb ataluvchi

$$\mathbf{u=kx+b} \qquad (12.3)$$

ko’rinishga keltiriladi, bu erda, k = tgφ – to’g’ri chiziqning burchak koeffitsienti, φ - to’g’ri chiziq bilan ox abstsissa o’qining musbat yo’nalishi orasidagi burchak kattaligi va b=u(0) – boshlang’ich ordinata.

To’g’ri chiziqning ixtiyoriy M(x; u) nuqtasi uchun **s**(m; n) va $\mathbf{M_0M}$($x–x_0$; $u–u_0$) vektorlar o’zaro kollinear, demak

$$\mathbf{M_0M}=t\mathbf{s} \qquad (12.4)$$

bu erda, t- ixtiyoriy haqiqiy son bo’lib, parametr deyiladi.

(12.4) tenglama to’g’ri chiziqning vektor parametrli tenglamasi deyiladi va koordinatalarda

$$\begin{cases} x-x_0=tm, \\ y-y_0=tn \end{cases} \qquad (12.5)$$

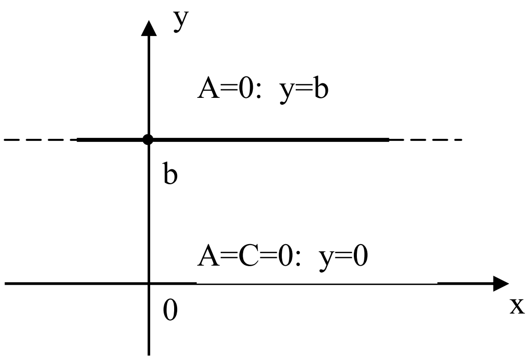
ko’rinishni oladi. (12.5) tenglamalarga to’g’ri chizikning parametrli tenglamalari deyiladi.

Agar (12.5) tenglamalarda t parametr yo’qotilsa, to’g’ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi quyidagi

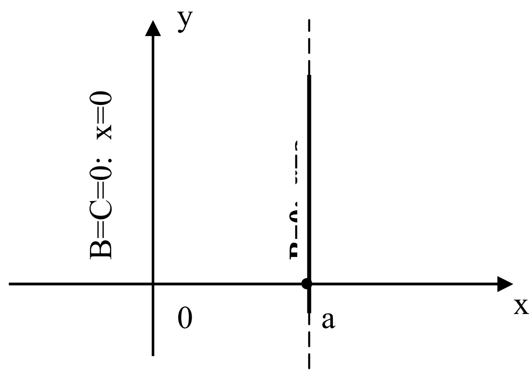
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (12.6)$$

ko’rinishdagi tenglamasi hosil bo’ladi.

Umumiy (12.1) ko’rinishdagi tenglamaning turli xususiy hollari va ularga mos to’g’ri chiziqlar quyidagi rasmlarda keltirilgan:




12.3 – rasm.




12.4 – rasm.

Agar |**a**|=P (P≥0), $\mathbf{v}=\frac{\mathbf{a}}{P}=(\cos\alpha;\cos\beta)-\mathbf{a}$ normal radius vektorning birlik vektori bo’lib, to’g’ri chiziqning ixtiyoriy M(x; u) nuqtasining mos radius vektori **r**(x; u) bo’lsa, u holda **r** radius vektorning **a yo**ki **v** vektordagi sonli proektsiyasi R ga teng:

$$Pr_{\mathbf{v}}\mathbf{r}=R \quad \text{yoki} \quad |\mathbf{v}|\,Pr_{\mathbf{v}}\mathbf{r}=R \quad \text{yoki} \quad (\mathbf{r},\mathbf{v})=R\ (R\geq 0) \qquad (12.7)$$

(12.7) tenglama to’g’ri chiziqning vektor ko’rinishdagi tenglamasi deyiladi. (12.7) tenglama koordinatalarda

$$x\cos\alpha + u\cos\beta = R \quad \text{yoki} \quad x\cos\alpha + u\sin\alpha = R \ (R\geq 0) \qquad (12.8)$$

ko'rinishni oladi. Bu erda, $\alpha$ - **a** yoki **v** vektorning 0x o'qining musbat yo'nalashi bilan hosil qilgan burchak kattaligi. (12.8) shakldagi tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi. (12.1) shakldagi tenglamadan (12.8) shakldagi tenglamaga o'tish uchun umumiy ko'rinishdagi tenglama normallovchi ko'paytuvchi deb ataladigan $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ songa ko'paytiriladi, bunda + yoki – ishoradan S ozod had ishorasining qarama–qarshisi tanlanadi, aks holda $R = -\mu S \geq 0$ munosabat bajarilmaydi.

Masala. $3x + 4u - 8 = 0$ tenglamani normal ko'rinishga keltiring.

Berilgan umumiy shakldagi tenglama uchun normallovchi ko'paytuvchi $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$. Tenglamani $\mu = \frac{1}{5}$ ga ko'paytiramiz, natijada to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda normal holga keltiriladi:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{8}{5}.$$

## 2. Berilgan bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Berilgan $M_0(x_0;\ u_0)$ nuqtadan o'tuvchi va burchak koeffitsienti k ga teng bo'lgan to'g'ri chiziq $u - u_0 = k(x - x_0)$ tenglama bilan aniqlanadi.

Koordinatalar tekisligida berilgan ikki $M_1(x_1;\ u_1)$ va $M_2(x_2;\ u_2)$ $(M_1 \neq M_2)$ nuqtalardan o'tuvchi yagona to'g'ri chiziq tenglamasi $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ ko'rinishga ega.

Burchak koeffitsientli $u = k_1x + v_1$ ($l_1$) va $u = k_2x + v_2$ ($l_2$) tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi $\varphi$ burchak kattaligi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (12.5 – rasm):

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Oxirgi formuladan burchak koeffitsientlar tilida $l_1$ va $l_2$ to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari kelib chiqadi:

$$l_1 \perp l_2:\ 1 + k_1k_2 = 0, \qquad l_1 \parallel l_2:\ k_1 = k_2.$$

Koordinatalar tekisligida umumiy ko'rinishdagi

$$A_1x + V_1u + S_1 = 0 \ (l_1) \quad \text{va} \quad A_2x + V_2u + S_2 = 0 \ (l_2)$$

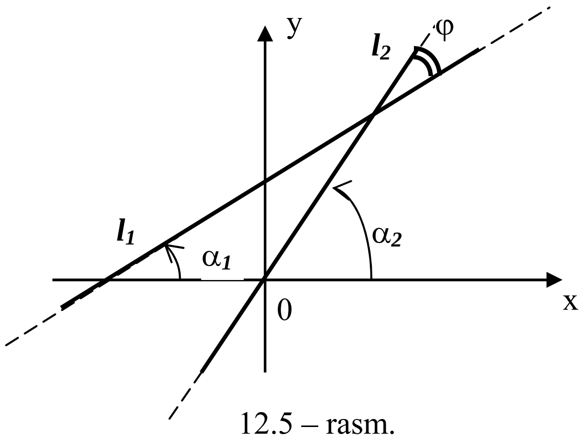
tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi $\varphi$ burchak kattaligi $l_1$ va $l_2$ to'g'ri chiziqlarning normal $\mathbf{n_1}(A_1;\ V_1)$ va $\mathbf{n_2}(A_2;\ B_2)$ vektorlari orasidagi burchak kattaligiga teng.

Ushbu tasdiq umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

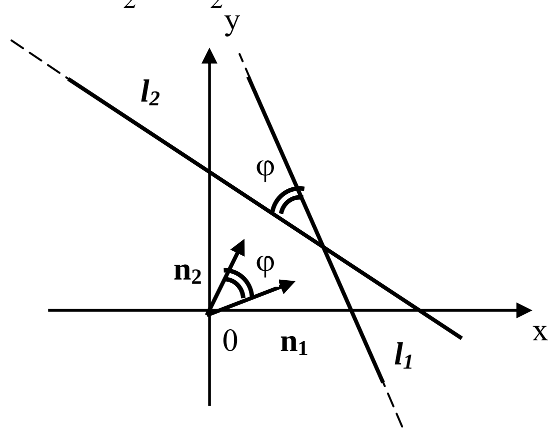
$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2})}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|} = \frac{(A_1A_2 + B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

A va V koeffitsientlar tilida $l_1$ va $l_2$ to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$l_1 \perp l_2: \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad l_1 \parallel l_2: \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$




12.5 – rasm.




12.6 – rasm.

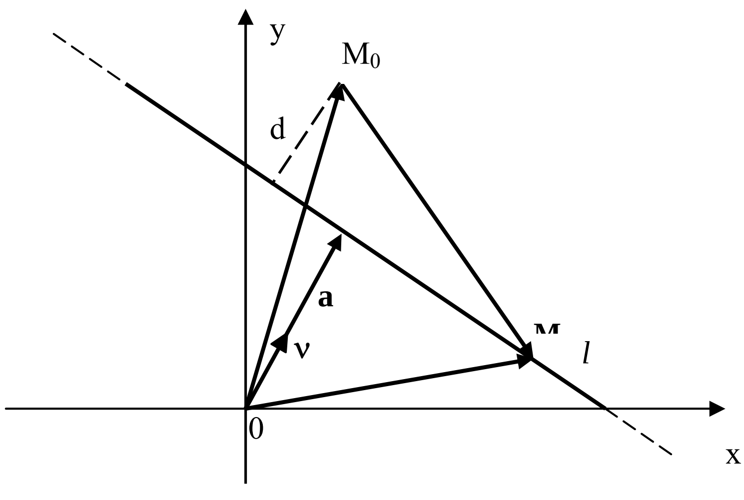
### 3. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Koordinatalar tekisligida $M_0(x_0;\, u_0)$ nuqta va umumiy $Ax+Vu+S=0$ shakldagi tenglamasi bilan $l$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Berilgan $M_0$ nuqtadan berilgan $l$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofa $\mathbf{M_0M}(x - x_0;\, u - u_0)$ vektorning **a** yoki **ν** vektordagi sonli proektsiyasining absolyut qiymatiga teng (12.7 – rasm):

$$d = |Pr_{\mathbf{v}}(\mathbf{OM} - \mathbf{OM_0})| = |(\mathbf{OM} - \mathbf{OM_0}),\, \mathbf{v}| = |(\mathbf{OM},\mathbf{v}) - (\mathbf{OM_0},\mathbf{v})|.$$

Yoki $d = |(\mathbf{OM_0},\, \mathbf{v}) - (\mathbf{OM},\, \mathbf{v})|$. Vektor shakldagi so'nggi formula $(\mathbf{OM},\, \mathbf{v})=R$ ekanligini hisobga olsak, koordinatalarda $d = |x_0 \cos\alpha + u_0 \sin\alpha - R|$ ko'rinishni oladi.




12.7 - rasm.

A va V koeffitsientlar tilida esa d masofa quyidagi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formula vosituasida hisoblanadi.

Masala. $M_0(-4; 1)$ nuqtadan 3x + 4u – 8 = 0 to’g’ri chiziqqacha masofani toping?

Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha masofani hisoblash formulasini qo’llaymiz:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ (bir.).}$$

## O’z – o’zini tekshirish uchun savollar

1. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o’tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to’g’ri chiziq tenglamasini yozing?
2. Tekislikda to’g’ri chiziqning umumiy ko’rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
3. Umumiy tenglamada A va V koeffitsientlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
4. To’g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang?
5. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini yozing va koeffitsientlarining geometrik ma’nosini izohlang?
6. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o’tuvchi va berilgan vektor yo’nalishidagi to’g’ri chiziqning parametrli tenglamalarini yozing?
7. To’g’ri chiziqning kanonik ko’rinishdagi tenglamasini yozing?
8. Koordinatalar tekisligida to’g’ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang?
9. To’g’ri chiziqning normal ko’rinishdagi tenglamasi deb qanday shakl-dagi tenglamaga aytiladi?
10. To’g’ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasini uning normal shakldagi tenglamasiga keltirish jarayoni nimalardan iborat?
11. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o’tuvchi va burchak koeffitsienti ma’lum bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasini yozing?
12. Koordinatalar tekisligida berilgan ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini yozing?
13. Burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak qanday formula yordamida aniqlanadi?
14. Burchak koeffitsientlar tilida to’g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?
15. Umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to’g’ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
16. Umumiy tenglamalar koeffitsientlari tilida to’g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari nimalardan iborat?
17. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan berilgan to’g’ri chiziqqacha bo’lgan

masofani hisoblash formulalarini yozing va ularni izohlang?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Koordinatalar tekisligida chiziq tenglamasi.
2. Normal vektor.
3. Yo’naltiruvchi vektor.
4. To’g’ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasi.
5. To’g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. To’g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
7. Burchak koeffitsient.
8. To’g’ri chiziqning parametrli tenglamalari.
9. To’g’ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamasi.
10. To’g’ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi.
11. To’g’ri chiziqning normal shakldagi tenglamasi.
12. Normallovchi ko’paytuvchi.
13. Bir nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi.
14. Ikki nuqtadan o’tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi.
15. To’g’ri chiziqlar orasidagi burchak.
16. Perpendikulyar to’g’ri chiziqlar.
17. Parallel to’g’ri chiziqlar.
18. Nuqtadan to’g’ri chiziqqacha masofa.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**12.1.** A(1; 2), V(2; 3), S(-2; 0), D(-3; -1) nuqtalar ichidan 3x-4u+5=0 to’g’ri chiziqda yotganlarini ajratib ko’rsating?

**12.2.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to’g’ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing:

**a)** Koordinatalar boshidan o’tuvchi va **n**(1;4) vektorga perpendikulyar;

**b)** A(2; -5) nuqtadan o’tuvchi va **s**(3; 4) vektorga parallel;

**v)** Koordinata o’qlaridan a=5, b=-3 kesmalar ajratuvchi;

**g)** V(-4; -1) nuqtadan o’tuvchi va burchak koeffitsienti k=2;

**d)** S(-1; 3) va D(2; 5) nuqtalardan o’tuvchi;

**e)** **m**(2; -1) vektorga perpendikulyar bo’lib, ou ordinatani 3 nuqtada kesuvchi;

**yo)** Uchlari E(4;-5), N(2; 3) nuqtalarda kesmaning o’rta perpendikulyari;

**j)** F(8; 6) nuqtadan o’tib koordinatalar burchaklaridan yuzasi 12 kv. bir. uchburchak ajratuvchi.

**12.3.** ABCD parallelogramning uchta uchi koordinatalari berilgan:
A(-2; 7), V(4; -2), S(-6; -4). Uning tomonlari tenglamalarini tuzing va D nuqta koordinatalarini toping.

**12.4.** AVS uchburchak uchlari koordinatalari berilgan:
A(3; 2), V(1; 5) va S(-1; 2). Quyidagilarni aniqlang:

**a)** S uchidan tushirilgan CD balandlik tenglamasi va uzunligini;

**b)** Burchak AVS kattaligini;

**v)** A uchidan o'tkazilgan AE mediana tenglamasini;

**g)** AE mediana va CD balandlik kesishgan nuqta koordinatalarini.

**12.5.** Quyidagi to'g'ri chiziq juftliklari ichidan o'zaro parallel va perpendikulyar bo'lganlarini ajratib ko'rsating:

**a)** 2x–u–3=0 va 6x-3u+5=0; **b)** x-2u-7=0 va 6x+3u+2=0;

**v)** 3x+2u+4=0 va 5x-7u+6=0; **g)** u=2x+3 va x+2u-5=0;

**d)** $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ va u = -2x+5.

**12.6.** K(-1; 3) nuqtadan quyidagi to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan masofalarni toping:

**a)** x-u=0; **b)** 3x-4u+1=0; **v)** 8x+6u-9=0.

**12.7.** **12.5** masaladagi o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

**12.8.** 2x+5u-3=0 to'g'ri chiziqda yotib, (3; -7) va (5; -1) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtani toping.

**12.9.** Qarama-qarshi uchlari (-6; 7) va (-2; 3) nuqtalarda joylashgan kvadratning tomonlari tenglamalarini tuzing.

**12.10.** Uchburchak uchlaridan biri (-1; 2) nuqtada bo'lib, uning ikki medianalari tenglamalari berilgan: 5x+4u-17=0, 4x-u-8=0.
Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

# §13. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

## 1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha. Ellips va uning kanonik tenglamasi

Chiziq tenglamasi koordinatalar sistemasining joylashishiga qarab turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Koordinatalarni almashtirish yordamida chiziqning ixtiyoriy shakldagi tenglamasini sodda (kanonik) ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb,

$$Ax^2+2Bxu+Cu^2+2Dx+2Eu+F = 0 \quad (A^2+V^2+S^2 \neq 0)$$

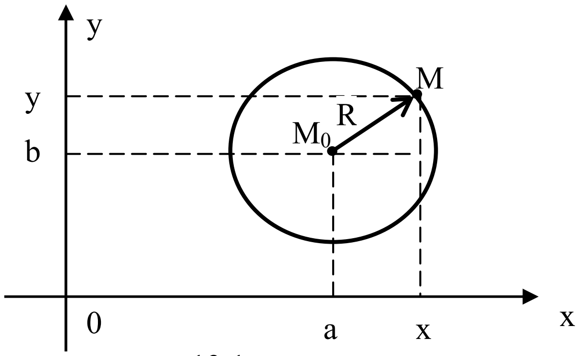
shakldagi tenglamaga aytiladi.

O'rta maktab matematikasida o'rganilgan aylana ikkinchi tartibli egri chiziqlar jumlasiga kiradi. Buning tasdig'i sifatida aylanaga berilgan ta'rifni va uning sodda tenglamasini eslash kifoya. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, koordinatalar tekisligida markaz deb ataluvchi $M_0(a;\ v)$ nuqtadan teng radius deb ataluvchi R masofada yotuvchi nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) bo'lmish aylana quyidagi

$$(x - a)^2 + (u - v)^2 = R^2$$

tenglama bilan aniqlanadi (13.1–rasm ).

Ushbu tenglama aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatalar boshida va R radiusli aylana $x^2 + u^2 = R^2$ tenglama vositasida ifodalanadi.




13.1- rasm.

Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlashi uchun uning koeffitsientlari quyidagi munosabatlarni bajarishi etarli:

$$A = S\ ,\ \ V = 0 \quad \text{va} \quad D^2 + E^2 - AF > 0\ .$$

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas kattalikka (fokuslar orasidagi masofadan katta) teng nuqtalar to'plamiga **ellips** deyiladi.

Agar o'zgarmas kattalikni 2a, fokuslar orasidagi masofani esa 2s bilan belgilasak va tekislikda ox abstsissa o'qi fokuslari orqali o'tuvchi, koordinatalar boshi $F_1F_2$ kesmaning o'rtasida joylashgan koordinatalar sistemasi tanlasak, ellips tenglamasi soddalashadi va quyidagi kanonik ko'rinishga keladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{bu erda} \quad b^2=a^2-s^2 \ \ (a>s).$$

Ushbu holda ellips fokuslari: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ (13.2-rasm ).

Koordinatalar boshi 0 nuqta ellipsning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlari hisoblanadi.

$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ nuqtalarga ellipsning uchlari, $0A_2=a$ va $0A_1=b$ kesma uzunliklariga uning mos ravishda katta va kichik yarim o'qlari deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikki simmetriya o'qlariga va simmetriya markaziga ega qavariq yopik chiziqdir.

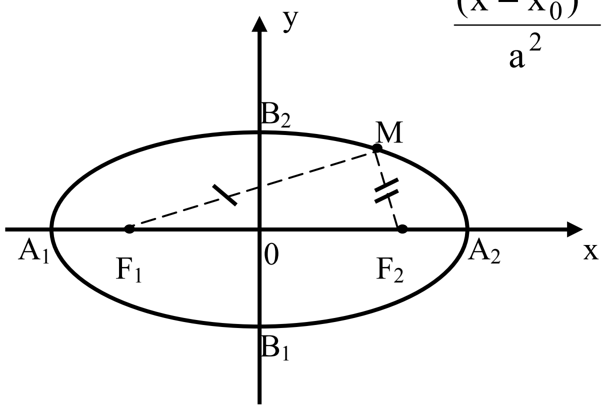
$\varepsilon=\frac{c}{a}$ kattalikka ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi va har qanday ellips uchun $\varepsilon<1$ munosabat o'rinli. Ekstsentrisitet ellipsning cho'zinchoqligini xarakterlaydigan kattalikdir.

Aylana ellipsning xususiy holi bo'lib, ekstsentrisiteti 0 ga teng yoki katta va kichik yarim o'qlari teng bo'lgan ellipsdir.

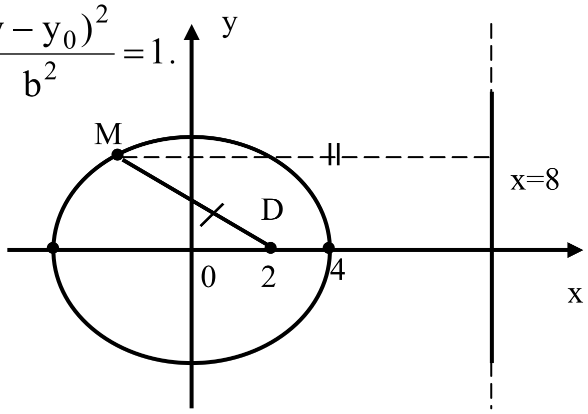
Simmetriya markazi $(x_0;\ u_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel ellips tenglamasi quyidagi ko'rinishdan iborat:

Masala. D(2; 0) nuqtaga x=8 to'g'ri chiziqqa qaraganda ikki marta yaqinroq masofada joylashadigan M(x, u) nuqtalarning harakat traektoriyasini aniqlang.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$




13.2 – rasm.




13.3 – rasm.

M nuqta harakat traektoriyasini tekislikda 2DM = MK tenglamani qanoatlantiruvchi M nuqtalar to'plami sifatida aniqlaymiz (13.3 – rasm). Koordinatalar tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani va nuqtadan vertikal to'g'ri chiziqqacha masofani topish formulalarini qo'llab,

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|8-x|$$

tenglamani olamiz va uni soddalashtirsak, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ko'rinishga keladi. Shunday qilib, M nuqta ellips bo'ylab harakatlanadi, ellipsning katta o'qi va fokuslari ox abstsissa o'qida joylashadi (13.3 – rasm).

## *2.* Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan $F_1$ va $F_2$ nuqtalargacha masofalari ayirmasi absolyut qiymati o'zgarmas kattalikka (nolga teng emas va fokuslar orasidagi masofadan kichik) teng nuqtalar to'plamiga **giperbola** deyiladi.

Agar o'zgarmas kattalik 2a, fokuslar orasidagi masofa 2s orqali belgilansa va yuqorida ellips uchun tanlangan koordinatalar sistemasi tanlansa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishga keladi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{bu erda } b^2 = s^2 - a^2 \ (s > a).$$

Giperbola fokuslari: $F_1(-c; 0)$ va $F_2(c; 0)$ (13.4 – rasm).

0 nuqta giperbolaning simmetriya markazi, koordinata o'qlari esa uning simmetriya o'qlaridir. Giperbola abstsissa o'qini haqiqiy uchlari deb ataluvchi $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesadi.

$0A = a$ kattalik uning haqiqiy yarim o'qi deyiladi. $V_1(0; -b)$ va $V_2(0; b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari deyilsa, $0V_2 = b$ kattalik uning mavhum yarim o'qi deyiladi.

Giperbolaning asosiy to'g'ri to'rtburchagi deb, markazi koordinatalar boshida, tomonlari koordinata o'qlariga parallel va uning uchlaridan o'tuvchi to'g'ri to'rtburchakka aytiladi.

Giperbola o'zining ikkita $y = \pm\frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan aniqlanadigan asimptotalariga ega. Giperbola asimptotalari uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi diagonallaridir. Giperbolani qurish uchun dastlab uning asosiy to'g'ri to'rtburchagini va asimptotalarini qurgan ma'qul.

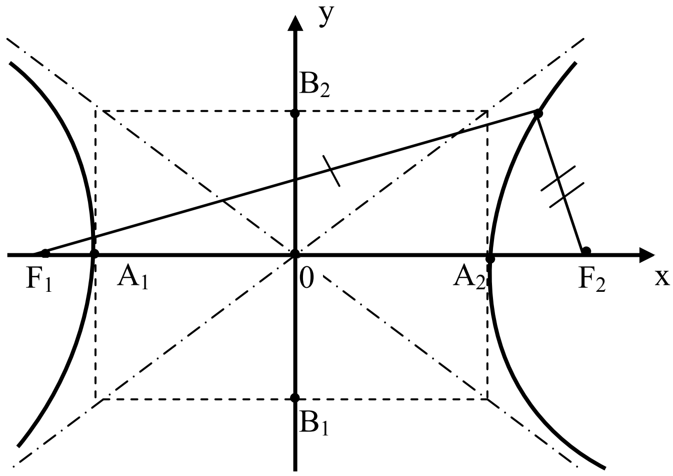
Giperbola ekstsentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rt-burchagining cho'zinchoqligini xarakterlaydi.

Simmetriya markazi $(x_0; u_0)$ nuqtada va simmetriya o'qlari koordinata o'qlariga parallel giperbola

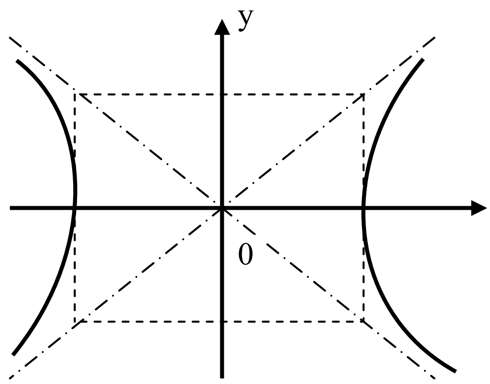
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Yarim o'qlari teng, ya'ni $a = b$ giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi. Teng tomonlama giperbola tenglamasi $x^2 - u^2 = a^2$ ko'rinishda bo'lib, uning asosiy to'g'ri to'rtburchagi kvadratdan iborat va ekstsentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng.




13.4 – rasm.




13.5 – rasm.

Masala. Asimptotalari $y = \pm\frac{1}{2}x$ tenglamalar bilan berilgan, fokuslari orasidagi masofa 10 birlikka teng bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Giperbola fokuslari abstsissa o'qida yotadi deb qarab, uning kanonik tenglamasini tuzamiz: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fokuslar orasidagi masofa $F_1F_2 = 2c = 10$ bo'lganidan, s = 5.

Giperbola uchun $s^2=a^2+b^2$ bo'lganidan va $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ berilganidan foydalanib, quyidagi sistemani tuzamiz va uni echamiz:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Sistema echimi: $a = 2\sqrt{5}$ va $b = 2\sqrt{5}$. Demak, giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ kanonik tenglamadan iborat (13.5–rasm).

### 3. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

Tekislikda fokusi deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va direktrisasi deb ataluvchi berilgan $DD'$ to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi nuqtalar tuplamiga **parabola** deyiladi.

Abstsissa o'qi F fokus nuqtadan $DD'$ direktrisaga perpendikulyar ravishda o'tuvchi, ordinata o'qi esa fokus va direktrisalarning o'rtasidan o'tuvchi koordinatalar sistemasi tanlasak, parabola tenglamasi quyidagi kanonik ko'rinishni oladi

$$u^2 = 2 R x,$$

bu erda, R – fokus va direktrisa orasidagi masofa.

Direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$, fokus esa $F(\frac{P}{2}; 0)$ (13.6 – rasm).

Koordinatalar boshi parabola uchi, abstsissa o'qi esa uning simmetriya o'qidir. Parabola ekstsentrisiteti $\varepsilon = 1$.

Agar ordinata o'qi parabola simmetriya o'qi bo'lsa, u holda uning tenglamasi $x^2 = 2Ru$ (R>0) ko'rinishda bo'lib, direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$ va fokusi $F(0; \frac{P}{2})$ nuqtadir.

Uchi $(x_0; u_0)$ nuqtada, simmetriya o'qlari koordinata o'qlaridan biriga parallel parabola quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

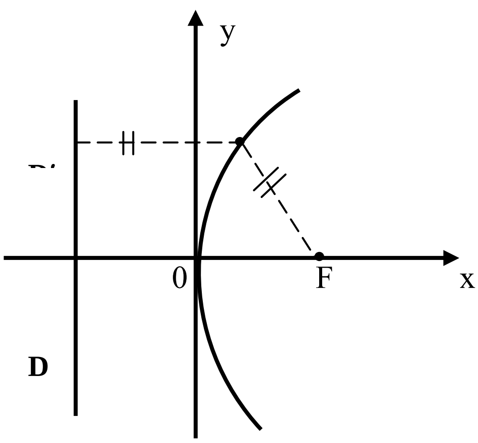
$$(u-u_0)^2 = 2R(x-x_0) \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 = 2R(u-u_0).$$

Masala. 0u ordinata o'qiga va $x^2 + u^2 = 4$ aylanaga urinuvchi aylanalar markazlari to'plami tenglamasini tuzing.

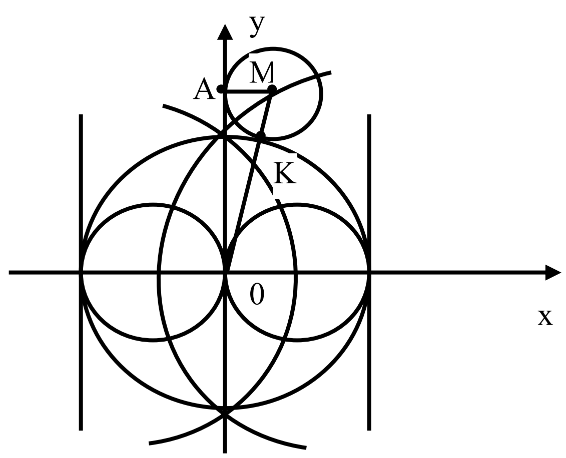
M(x; u) – aylanalar markazlari to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Masala shartiga binoan KM = AM (13.7 – rasm). Berilgan aylana radiusi 0K=2 ekanligini va KM=0M–0K tenglikni hisobga olsak, koordinatalarda quyidagi tenglamani olamiz:

$$x^2 + u^2 - 2 = |x| \quad \text{yoki} \quad u^2 = 4|x| + 4.$$

Ushbu tenglama uchlari (-1; 0) va (1; 0) nuqtalarda, fokuslari koordinatalar boshida, direktrisalari mos ravishda x =-2 va x=2 to'g'ri chiziqlardan iborat, abstsissa o'qi simmetriya o'qi bo'lgan parabolalarni ifodalaydi (13.7–rasm).




13.6 – rasm.




13.7 – rasm.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini yozing.
2. Umumiy tenglama koeffitsientlari qanday munosabatlarni qanoatlantirganda, ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlaydi?

3. Tekislikda qanday nuqtalar to’plamiga ellips deyiladi?
4. Ellipsning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
5. Ellipsning uchlari, yarim o’qlari, simmetriya markazi va simmetriya o’qlarini ko’rsating.
6. Ellipsning ekstsentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?
7. Qanday ellipsga aylana deyiladi?
8. Tekislikda qanday nuqtalar to’plamiga giperbola deyiladi?
9. Giperbolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni sharxlang.
10. Giperbolaning haqiqiy va mavhum uchlarini, yarim o’qlarini ko’rsating, simmetriya markazi, simmetriya o’qlari va asosiy to’g’ri to’rtburchagi mavjudmi?
11. Giperbolaning ekstsentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?
12. Qanday to’g’ri chiziqlarga giperbolaning asimptotalari deyiladi va ularning tenglamalarini yozing?
13. Qanday giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi va uning kanonik tenglamasini yozing?
14. Tekislikda qanday nuqtalar to’plamiga parabola deyiladi?
15. Parabolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izoh-lang?
16. Parabola fokusini aniqlang va direktrisasi tenglamasini yozing?
17. Ordinata o’qi simmetriya o’qi bo’lgan parabola, uning direktrisasi tenglamalarini yozing va fokusini aniqlang?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq.
2. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
3. Ellips fokuslari, uchlari, katta va kichik yarim o’qlari, simmetriya markazi va simmetriya o’qlari.
4. Ellips ekstsentrisiteti.
5. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
6. Giperbola fokuslari, haqiqiy va mavhum uchlari, yarim o’qlari, simmetriya markazi va simmetriya o’qlari.
7. Giperbola ekstsentrisiteti.
8. Giperbola asimptotalari va ularning tenglamalari.
9. Teng tomonli giperbola.
10. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
11. Parabola fokusi, direktrisasi, uchi va simmetriya o’qi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**13.1.** Ellipsning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo’yicha tuzing:

**a)** $F_1(-3; 0)$ va $F_2(3; 0)$ fokuslarigacha bo’lgan masofalar yig’indisi $2a=10$;

**b)** uchlari $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $V_1(0; -3)$ va $V_2(0; 3)$ nuqtalarda;

**v)** fokuslari orasidagi masofa $2S=8$ va ekstsentrisiteti $\varepsilon=0,5$;

**g)** $(1; 3)$ va $(-4; -1)$ nuqtalardan o’tuvchi;

**d)** katta yarim o'qi a=10 va ekstsentrisiteti ε=0,6;

**e)** (-2; $\frac{11}{\sqrt{15}}$) nuqtadan o'tib, ekstsentrisiteti ε=$\frac{2}{\sqrt{15}}$;

**13.2.** Abstsissa o'qi bilan A(4; 0) uchida, ordinata bilan esa V(0; 3) uchida urinuvchi ellips tenglamasini tuzing.

**13.3.** R(1; -1) nuqtadan $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsga kesuvchi o'tkazilgan. Agar R nuqta hosil bo'lgan vatarning o'rta nuqtasi bo'lsa, kesuvchi tenglamasini tuzing.

**13.4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellips to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

**13.5.** Giperbolaning kanonik tenglamasini quyida berilganlar bo'yicha tuzing:

**a)** $F_1$(-4; 0) va $F_2$(4; 0) fokuslarigacha masofalar ayirmasining moduli 2a=6;

**b)** haqiqiy uchlari orasidagi masofa 2a=8, fokuslari orasidagi masofa 2s=10;

**v)** haqiqiy yarim o'qi a=3 va (6; $2\sqrt{3}$) nuqtadan o'tuvchi;

**g)** ($4\sqrt{17}$; 4) va (4; 0) nuqtalardan o'tuvchi;

**d)** (-5; 3) nuqtadan o'tib, ekstsentrisiteti ε=$\sqrt{2}$;

**e)** (-$\sqrt{2}$; 1) nuqtadan o'tib, teng yonli bo'lgan;

**yo)** asimptotalari orasidagi burchak $60^0$ va (6; -3) nuqtadan o'tuvchi.

**13.6.** F(-8; 0) nuqtaga nisbatan x=-2 to'g'ri chiziqqa ikki marta yaqin masofada joylashgan M(x; u) nuqta xarakat traektoriyasini quring?

**13.7.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbola to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

**13.8.** Parabolaning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo'yicha tuzing:

**a)** 0x o'qida joylashgan fokusi va uchigacha masofa $\frac{P}{2}=4$;

**b)** 0u o'qida joylashgan fokusi va direktrisasi orasidagi masofa R=6;

**v)** abstsissa o'qi simmetriya o'qi bo'lib, M(2; 3) nuqtadan o'tuvchi;

**g)** uchi koordinatalar boshida va fokusi (3; 0) nuqtada;

**d)** uchi koordinatalar boshida va direktrisasi u+12=0.

**13.9.** $u^2$=12x parabola nuqtalaridan x-u+7=0 to'g'ri chiziqqacha eng qisqa masofani toping.

**13.10.** $u^2$=4x parabola to'g'ri burchak ostida ko'rinadigan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini quring.

# §14. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. FAZODA TEKISLIK

## 1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi

$R_3$ fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, **a** radius vektor berilgan bo'lsin. **a** radius vektor oxiridan vektorga yagona mumkin bo'lgan perpendikulyar tekislik (T) o'tkazilgan, M(x, u, z) nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi va **0M = r**(x, u, z) nuqtaning radius vektori bo'lsin.

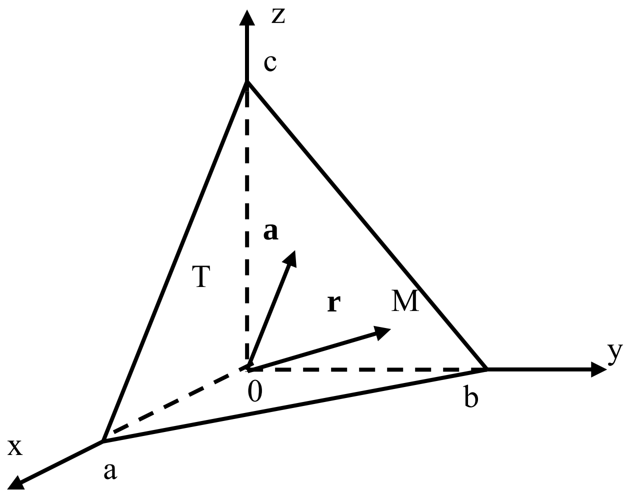
$|\mathbf{a}| = R$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{a}}{P} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - **a** vektorning birlik vektori, $\alpha$, $\beta$ va $\gamma$ **a** yoki **v** vektorning koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchaklari bo'lsin (14.1 – rasm).

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ **a** yoki **v** vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Har qanday **r** vektorning **v** vektordagi sonli proektsiyasi R ga teng:

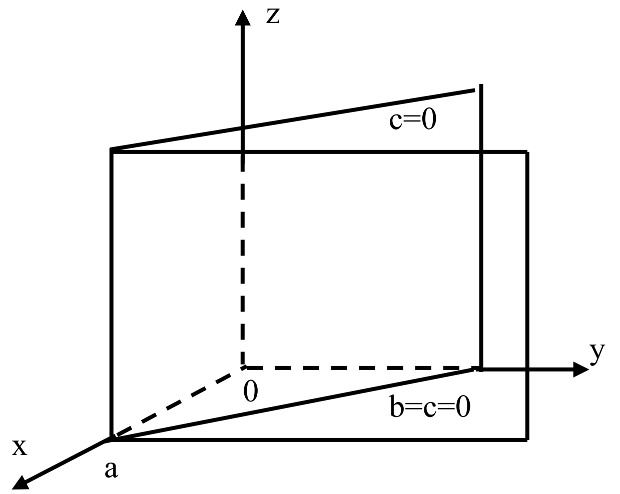
$$Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{r} = R \quad \text{yoki} \quad (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R \ \ (R \geq 0) \qquad (14.1)$$

(14.1) tenglamaga T tekislikning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi. Vektor tenglama koordinatalarda

$$x\cos\alpha + u\cos\beta + z\cos\gamma = R \ \ (R \geq 0) \qquad (14.2)$$




14.1 – rasm.




14.2 – rasm.

ko'rinishda yoziladi. (14.2) tenglama tekislikning normal shakldagi tenglamasi deyiladi. Agar (14.2) tenglamani noldan farqli biror-bir songa ko'paytirsak, tenglamaga teng kuchli

$$A x + V u + S z + D = 0 \ \ (A^2 + V^2 + S^2 \neq 0) \qquad (14.3)$$

ko'rinishdagi tenglamani olamiz. (14.3) tenglamaga T tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi.

Har qanday (14.3) ko'rinishdagi tenglamani (14.2) normal shakldagi tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun umumiy tenglamani normallovchi ko’paytuvchi $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ga ko’paytirish etarli. R= -μ D ning nomanfiyligini ta’minlash maksadida “+” yoki “–” ishoralaridan ozod had D ishorasining qarama-qarshisi tanlanadi. Natijada

$$\mu A x + \mu V u + \mu S z = R \quad (R \geq 0)$$

Bu erda, $(\mu A)^2 + (\mu V)^2 + (\mu S)^2 = 1$ munosabat o’rinli bo’lib, **v** = (μA, μV, μS) vektorning birlik vektor va uning koordinata o’qlaridagi sonli proektsiyalari, mos ravishda quyidagilarga

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu V = \cos\beta, \quad \mu S = \cos\gamma$$

tengligini payqash qiyin emas.

Agar tekislik umumiy ko’rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo’lsa, tenglama shaklidan tekislikning o’zi haqida quyidagilarni aniqlash mumkin: 1) agar D = 0 bo’lsa, A x + V u + S z = 0 tekislik koordinata boshidan o’tadi; 2) **N** = (A, V, S) vektor T tekislikka perpendikulyar, ya’ni tekislikning normal vektoridir, chunki u **v**=(μA, μV, μS) vektorga kollinear: μ**N**=**v**.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini tahlil qilish mumkin. Agar S=0 bo’lsa, Ax+Vu+D=0 tenglama bir tomondan x0u koordinatalar tekisligida to’g’ri chiziqni ifodalasa, $R_3$ fazoda to’g’ri chiziqdan o’tib, x0u koordinatalar tekisligiga perpendikulyar yoki 0z applikata o’kiga parallel tekislikni aniqlaydi (14.2–rasm). V=S=0 bo’lsa, Ax + D=0 tekislik 0x abstsissa o’qini $x = -\frac{D}{A} = a$ nuqtada o’qqa perpendikulyar yoki u0z koordinatalar tekisligiga parallel ravishda kesuvchi tekislikni aniqlaydi (14.2–rasm) va hokazo. X=0 – u0z koordinatalar tekisligi tenglamasi, u=0 – x0z koordinatalar tekisligi tenglamasi va z=0 esa x0u koordinatalar tekisligi tenglamasidir.

Agar umumiy ko’rinishdagi tekislik tenglamasida A, V, S va D sonlarning har biri noldan farq qilsa, u holda (14.3) umumiy tenglama quyidagi ko’rinishga keltirilishi mumkin

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{14.4}$$

bu erda, $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ va $c = -\frac{D}{C}$. (14.4) tenglamaga tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (14.2 – rasm).

Berilgan $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqtadan berilgan **N**(A, V, S) vektorga perpendikulyar ravishda o’tuvchi tekislik tenglamasi vektor shaklda (**N, r–r₀**)=0 ko’rinishda yozilsa, koordinatalarda

$$A(x-x_0) + V(u-u_0) + S(z-z_0) = 0$$

shaklda yoziladi. Bu erda, $\mathbf{r_0}$ – $M_0$ nuqtaning radius vektori.

Masala. $M_0(-2, 3, -1)$ nuqtadan o’tib, **N=**(1, -4, 2) vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Tuzilgan tenglamaga binoan: $1\cdot(x+2) - 4\cdot(y-3) + 2\cdot(z+1) = 0$ yoki $x - 4u + 2z + 16 = 0$.

## 2. Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari

Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ va $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular orqali o'tuvchi yagona tekislik tenglamasini tuzish masalasi qo'yilgan bo'lsin.

Tekislik $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tgani uchun $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ tenglama o'rinli, bu erda A, V va S koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas. Tekislik berilgan ikkinchi $(x_2; y_2; z_2)$ va uchinchi $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan ham o'tgani uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$
$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

A, V va S noma'lumlarga nisbatan uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ldi. Ma'lumki, ushbu bir jinsli sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina nolmas echimlarga ega. Demak, berilgan bir to'g'ri chiziqda etmaydigan uchta nuqtadan o'tuvchi yagona tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shaklda yoziladi.Tenglamani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oxirgi ikki tenglamaning o'zaro teng kuchli ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Ikki $T_1$ va $T_2$ tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (T_1) \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (T_2) \end{cases}$$

Berilgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak ularning normal $\mathbf{N_1}(A_1; B_1; C_1)$ va $\mathbf{N_2}(A_2; B_2; C_2)$ vektorlari orasidagi $\varphi$ burchakka teng. Ushbu tenglik tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2})}{|\mathbf{N_1}||\mathbf{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Bu erda, $0 \le \varphi \le \pi$. Berilgan tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagilardan iborat:

$T_1 \perp T_2$: $(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2})=0$ yoki $A_1A_2 + V_1V_2 + S_1S_2 = 0$,

$T_1 \,||\, T_2$: $\mathbf{N_1}=\lambda\mathbf{N_2}$ yoki $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Masala. x + u + z = 1 va z = 0 tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Berilgan tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchak mos normal vektorlar (1, 1, 1) va (0, 0, 1) orasidagi φ burchakka teng:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}.$$

Demak, $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

## 3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa.

$R_3$ fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, berilgan $M_0$ nuqtadan umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan berilgan Ax+Vu+Sz+D=0 ($A^2+V^2+S^2\neq 0$) tekislik orasidagi d masofani topish masalasi qo'yilgan bulsin.

$\mathbf{r_0}(x_0, u_0, z_0)$ vektor $M_0$ nuqtaning radius vektori va $\mathbf{r}(x, u, z)$ vektor esa tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi radius vektori bo'lsin. d masofa $\mathbf{r_0} - \mathbf{r}$ vektorning **a** yoki **v** vektordagi sonli proektsiyasining absolyut qiymatiga teng: $d=|Pr_{\mathbf{v}}(\mathbf{r_0}-\mathbf{r})|$. Masofani hisoblash formulasi vektor ko'rinishda yoki tekislikning normal tenglamasi parametrlari orqali yozilishi mumkin (§13 ga qarang). Tekislikning umumiy tenglamasi parametrlari orqali esa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ko'rinishda yoziladi.

Masala. (-1, 4, -3) nuqtadan x+2u–2z+5=0 tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash formulasiga binoan:

$$d = \frac{|-1 + 2\cdot 4 - 2\cdot(-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6 \text{ ( bir.).}$$

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
2. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
3. Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing?
4. Tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
5. Umumiy tenglama koeffitsientlarining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
6. Tekislik umumiy ko'rinishdagi tenglamasi uning normal shakldagi tenglamasiga qanday keltiriladi?
7. Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo'lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?
8. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi

va nima uchun?

9. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing?
10. Fazoda bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?
11. Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasi qanday echiladi?
12. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?
13. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha bo'lgan masofani hisoblash formulasini yozing?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislik umumiy tenglamasini normallash.
5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. Nuqtadan vektorga perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekislik tenglamasi.
7. Uchta bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
8. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak.
9. Tekisliklarning perpendikulyarligi.
10. Tekisliklarning parallelligi.
11. Nuqtadan tekislikgacha masofa.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**14.1.** (1; 2; -3) nuktadan o'tib, **n**(4; -1; 5) vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

**14.2.** (0; -1; 2), (2; 1; 3) va (1; 2; 3) nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

**14.3.** (2; -3; 1) nuqtadan o'tib, 4x+u-2z+7=0 tekislikka parallel va perpendikulyar ravishda o'tuvchi tekisliklar tenglamalarini tuzing.

**14.4.** 0u ordinata o'qidan va (1; 2; 3) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

**14.5.** ABCD tetraedr uchlari berilgan A(3; -1; 5), V(4; -1; 3), S(0; 5; 1) va D(4; 0; 2):

**a)** C nuqtadan o'tib, AV qirraga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini yozing.

**b)** D uchidan o'tib, AVS yoqqa parallel tekislik tenglamasini yozing.

**14.6.** Quyidagi tekisliklarning koordinatalari sistemasiga nisbatan joylashishi xususiyatlarini ko'rsating:

| | | |
|---|---|---|
| **a)** x-u+1=0; | **b)** x+2z=0; | **v)** x-2u+3z=0; |
| **g)** u-z+2=0; | **d)** x+3=0; | **e)** 2z+3=0; |
| **yo)** 2x-z+4=0; | **j)** 3u+z=0; | **z)** 4x+3u=0; |
| **i)** 2u-5=0. | | |

**14.7.** Tekisliklar tenglamalarini tuzing:

**a)** (3; 2; -1) nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar tekisligini har biriga parallel bo'lgan;

**b)** (-2; 3; 1) nuqtadan va koordinata o'klarining har biridan o'tuvchi.

**14.8.** Quyidagi tekislik tenglamalarini kesmalarga nisbatan va normal ko'rinishga keltiring:

**a)** 3x-2u-6z+5=0; **b)** –x+8u-4z+17=0.

**14.9.** (4; 5; -3) va (2; -1; 3) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalar geometrik o'rni tenglamasini yozing.

**14.10.** x+5u-z+2=0 va 4x-u+3z-1=0 tekisliklar kesishish chizig'idan o'tuvchi va: **a)** koordinatalar boshidan; **b)** (1; 1; 1) nuqtadan; **v)** 0u o'qiga parallel bo'lgan tekisliklar o'tkazing.

**14.11.** Quyida tekislik juftliklari orasidagi ikki yoqlama burchaklarni toping:

**a)** 2x-2u+z+5=0 va 16x+8u+2z-1=0;

**b)** 2x+5u+4z+8=0 va 6x-3z+1=0.

**14.12.** Quyidagi nuqtalardan berilgan tekisliklargacha masofalarni to ping:

**a)** (3; -1; 4), 2x+2u+z-9=0;

**b)** (1; 0; -3), 2x+3u+5=0;

**v)** (-1; 2; $\sqrt{2}$), 5x-3u+$\sqrt{2}$ z=0.

**14.13.** Ax+Vu+Sz+$D_1$=0 va Ax+Vu+Sz+$D_2$=0 o'zaro parallel tekisliklar orasidagi masofani topish formulasini keltirib chiqaring.

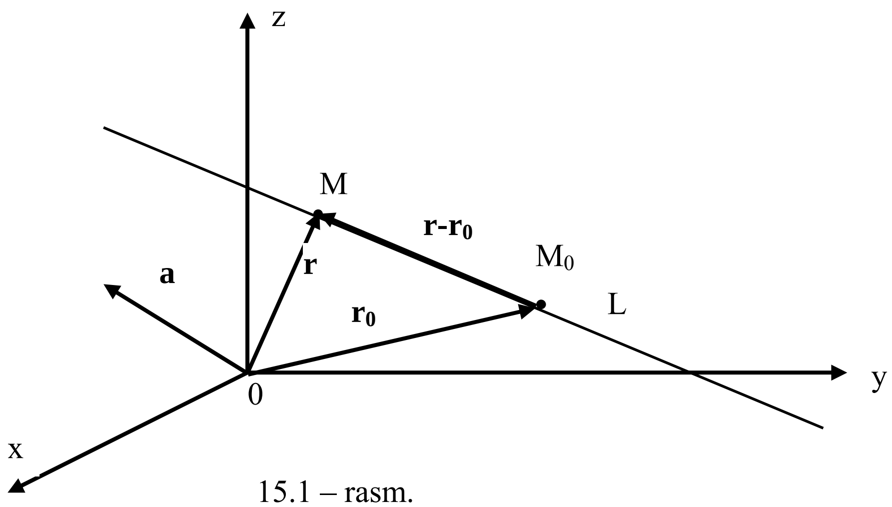
# §15. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ

## 1. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.

Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo'lib, $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqta va nolmas **a**$(a_1, a_2, a_3)$ radius vektor berilgan bo'lsin. $M_0$ nuqtadan **a** vektorga parallel L to'g'ri chiziq o'tkazamiz. M(x, u, z) nuqta L to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi va **r**(x, u, z) vektor uning radius vektori, $\mathbf{r_0}(x_0, u_0, z_0)$ vektor esa berilgan $M_0$ nuqtaning radius vektori bo'lsin. $\mathbf{r - r_0}$ vektor L to'g'ri chiziqda yotgani uchun berilgan **a** vektorga kollineardir:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t\,\mathbf{a} \tag{15.1}$$

(15.1) tenglamada t ixtiyoriy haqiqiy son bo'lib, parametr deyiladi. Agar t parametr haqiqiy sonlar o'qida turli son qiymat qabul qilsa, $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\,\mathbf{a}$ vektor oxiri L to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiladi (15.1-rasm). (15.1) tenglamaga fazoda berilgan nuqtadan berilgan vektor yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.




15.1 – rasm.

Koordinatalarda (15.1) tenglama quyidagi uchta tenglamalarga ajraladi:

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1, \\ y - y_0 = ta_2, \\ z - z_0 = ta_3. \end{cases} \tag{15.2}$$

(15.2) tenglamalarga to'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi. Agar (15.2) sistemada t parametr yo'qotilsa, quyidagi qo'sh tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) \tag{15.3}$$

(15.3) ko'rinishdagi tenglamaga fazoda to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. (15.3) tenglamada $a_1$, $a_2$, $a_3$ sonlardan ixtiyoriy biri yoki ikkitasi nolga teng bo'lishi mumkin.

Ushbu hollarda, qulayligi uchun maxrajlarda bir yoki ikkita nollar yozish qabul qilingan bo’lib, yozuv shartli tus oladi. (15.3) tenglama fazoda $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqtadan o’tib, $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektorga parallel to’g’ri chiziqni aniqlaydi.

Masala. Koordinatalar fazosida (2, -3, 1) nuqtadan o’tib, (-1, 0, 4) vektorga parallel bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasini tuzing.

To’g’ri chiziqning kanonik ko’rinishdagi tenglamasi, (15.3) tenglamaga binoan,

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{4}$$

shaklda bo’ladi. Ushbu tenglamalar o’z navbatida quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} 4x+z-7=0, \\ \qquad y+3=0. \end{cases}$$

Shunday qilib, qaralayotgan to’g’ri chiziq $z = -4x+7$ va $u=-3$ tekisliklarning umumiy kesishish to’g’ri chizig’idan iborat.

Fazoda ikki tekislik o’zlarining umumiy

$$A_1x + V_1 u + S_1z + D_1 = 0 \ (T_1) \quad \text{va} \quad A_2x + V_2u + S_2z + D_2 = 0 \ (T_2)$$

ko’rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo’lsin.

Agar $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar o’rinli bo’lsa, $T_1$ va $T_2$ tekisliklar turli o’zaro parallel tekisliklarni aniqlaydi. Agar $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar bajarilsa, $T_1$ va $T_2$ tekisliklar ustma – ust joylashadi, ya’ni berilgan tenglamalar teng kuchli bo’lib, aynan bir tekislikni aniqlaydi. Qolgan barcha hollarda tekisliklar to’g’ri chiziq bo’ylab kesishadi. Berilgan tekisliklar umumiy tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{15.4}$$

sistema aynan to’g’ri chiziqni aniqlashi uchun

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matritsa rangining 2 ga teng bo’lishi zarur va etarlidir. Yoki xuddi shuning o’zi, quyidagi ikkinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

aniqlovchilardan birining noldan farqli bo’lishi kifoya.

Aniqlik uchun ulardan birinchisi noldan farqli bo’lsin. Unda (15.4) tenglamalar sistemasini x va u ga nisbatan echish mumkin:

$$\begin{cases} x=\alpha z+\mu, \\ y=\beta z+\nu. \end{cases}$$

Yuqoridagi tenglamalar sistemasi esa, quyidagi

$$\frac{x-\mu}{\alpha}=\frac{y-\nu}{\beta}=\frac{z}{1}$$

tenglamalarga teng kuchli, bu erda, α, β, μ va ν ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Haqiqatdan ham, ushbu tenglamalar fazoda (μ, ν, 0) nuqtadan o'tib, (α, β, 1) vektorga parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Asosiy matritsasi rangi 2 ga teng bo'lganda, (15.4) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasiga fazoviy to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari deyiladi.

Masala. 0u ordinata o'qining kanonik shakldagi tenglamalarini tuzing.

0u o'qi x0u va u0z koordinata tekisliklari kesishmasidan iborat:

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x=0y \\ z=0y \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasini shartli ravishda $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ ko'rinishda yozish mumkin. Haqiqatdan ham, 0u o'qi (0, 0, 0) nuqtadan o'tib, **j**(0, 1, 0) vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqdir.

## 2. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari

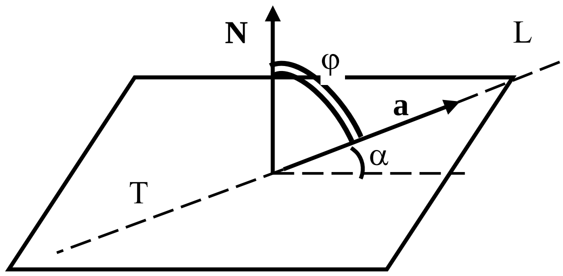
Fazoda ikki $L_1$ va $L_2$ to'g'ri chiziqlar kanonik $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ ($L_1$) va $\frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$ ($L_2$) ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo'lib, ular orasidagi burchak kattaligini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak, $L_1$ va $L_2$ larning yo'naltiruvchi vektorlari **a**($a_1$, $a_2$, $a_3$) va **b**($b_1$, $b_2$, $b_3$) orasidagi burchakka teng. Berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotishi yoki o'zaro ayqash bo'lishi mumkin. Barcha hollarda ular orasidagi burchakni topish masalasi to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi:

$$\cos\varphi=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Fazoda umumiy ko'rinishdagi tenglamasi bilan (T) tekislik va kanonik ko'rinishdagi tenglamalari bilan (L) to'g'ri chiziq berilgan bulsin:

$$Ax + Vu + Sz + D = 0 \ \ (T), \qquad \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3} \ \ (L)$$

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi α burchak sinusi (L) to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektori **a**($a_1$, $a_2$, $a_3$) bilan (T) tekislik normal vektori **N**(A, V, S) orasidagi φ burchak kosinusiga teng (15.2-rasm ).




(15.2–rasm)

Masala vektorlar orasidagi burchak kattaligini topish masalasiga keltirildi. Shunday qilib,

$$\cos\varphi = \sin\alpha = \frac{a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$L \perp T: \quad \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}, \qquad L \,||\, T: \quad a_1A + a_2V + a_3S = 0.$$

Masala. (-3, 4, -2) nuqtadan o'tib, $x + 2u - 5z + 8 = 0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

To'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lganidan, tekislik normal vektori to'g'ri chiziq yo'naltiruvchisidir. Demak, to'g'ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamalari

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{-5}$$

ko'rinishga ega.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Fazoda kiritilgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to'g'ri chiziq qanday aniqlanadi?
2. Fazoda to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini yozing?
3. To'g'ri chiziqning parametrli tenglamalari deb qanday tenglamalarga aytiladi?
4. Berilgan nuqtadan berilgan vektor yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamalarini yozing va uni izoh-lang?
5. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalarini yozing va uni izohlang?
6. 0z applikata o'qining kanonik tenglamalarini tuzing?
7. Fazoda kanonik ko'rinishdagi tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
8. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
9. To'g'ri chiziq bilan tekislik perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Fazoda nuqtadan o'tuvchi va vektorga parallel to'g'ri chiziq kanonik tenglamalari.
2. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari.
3. Fazoda to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.
4. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
5. To'g'ri chiziq va tekislik perpendikulyarligi.
6. To'g'ri chiziq va tekislik parallelligi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**15.1.** Quyida berilgan to'g'ri chiziqlarda yotuvchi bir nechta nuqta koordinatalarini aniqlang:

**a)** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{4}$ **b)** $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-4 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} 2x-y+z+6=0 \\ x+3y-4z-1=0 \end{cases}$

**15.2.** **a)** $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x-y+2z-4=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=2-t \\ y=-5+2t \\ z=3+4t \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini toping.

**15.3.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini tuzing:

**a)** (2; -3; 1) va (-1; 4; -2) nuqtalardan o'tuvchi;

**b)** (-4; 3; -2) nuqtadan o'tib, a(1; 0; -3) vektorga parallel va perpendikulyar bo'lgan;

**v)** 2x-u+3z+4=0 tekislikning 0xu koordinatalar tekisligi bilan kesishmasi;

**g)** x+u-z+2=0 tekislik bilan (1; 0; 3), (1; -1; -2), (2; -2; 1) nuqtalardan o'tuvchi tekislik kesishmasi.

**15.4.** Quyida to'g'ri chiziqlarning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing:

**a)** $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$

**15.5.** (1; -3; 4) nuqtadan o'tib, $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini quring.

**15.6.** Quyidagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashish xususiyatlarini ko'rsating:

**a)** $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-5z=0 \\ 2y+z+3=0 \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} x-3=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} y=0 \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

**15.7.** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq koeffitsientlari qanday shartlarni bajarganda quyidagilar o'rinli:

**a)** 0u o'qiga parallel;

**b)** 0x o'qini kesib o'tadi;

**v)** 0z o'qi bilan ustma-ust yotadi;

**g)** 0xu koordinatalar tekisligida yotadi;

**d)** koordinatalar boshidan o'tadi.

**15.8.** $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{\sqrt{5}}$ va $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{\sqrt{2}}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

**15.9.** $\lambda$ ning qanday qiymatida $\frac{x-3}{\lambda} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$ va $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ to'g'ri chiziqlar kesishadi.

**15.10. a)** $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{6}$ va 6x+15u-10z+7=0;

**b)** $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{2}$ va 2x+u+z-1=0.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

# §16. CHIZIQLI FAZO. EVKLID FAZO

## 1. Chiziqli fazo va uning o'lchovi. n o'lchovli fazoda bazis va koordinatalar

Elementlari vektorlar deb ataluvchi L to'plam berilgan bo'lsin. Agar L to'plamda:

1) ixtiyoriy **x**ϵL va **y**ϵL vektorlar juftiga **x** va **u** vektorlarning yig'indisi deb ataluvchi yagona **z** = **x** + **y** ϵ L vektorni mos qo'yuvchi;

2) **x**ϵL vektorga va λ haqiqiy songa **x** vektorning λ songa ko'paytmasi deb ataluvchi yagona **z** =λ**x** ϵ L vektorni mos qo'yuvchi qonuniyat o'rnatilgan bo'lsa, u holda L vektorlar to'plamiga *¦ao'io'iy chizio'li fazo* deyiladi.

Ta'rifda keltirilgan vektorlarni qo'shish va vektorni songa ko'paytirish amallari quyidagi aksiomalarga bo'ysinadi.

a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, d) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,

b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$, e) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$,

v) $\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}$, j) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$,

g) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}$, z) $1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$,

bu erda **x**, **y** va **z** L to'plamga tegishli ixtiyoriy vektorlar bo'lsa λ va μ esa ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Elementlari L chiziqli fazoda bo'lgani kabi qo'shish va songa ko'paytirish amallari vositasida chiziqli fazoni tashkil etuvchi L to'plamning har qanday qism osti to'plamiga L chiziqli fazoning *o'ism osti fazosi* deyiladi.

Chiziqli fazoning qism osti fazosiga misollar keltiramiz:

1) Ikki o'lchovli haqiqiy arifmetik $R^2$ fazo chiziqli fazo sifatida o'zining quyidagi qism osti fazolariga ega:
   a) $R^2$ fazoning o'zi;
   b) koordinatalar boshi, ya'ni yagona ikki o'lchovli nol vektordan iborat to'plam (nol fazo),
   v) koordinatalar boshidan o'tuvchi har qanday to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlar to'plami fazosi;
2) $R^3$ fazoning koordinatalar markazidan o'tuvchi tekislikda yotgan vektorlar to'plami $R^3$ fazoning qism osti fazosini tashkil etadi,
3) $R^n$ fazoda mumkin bo'lgan barcha $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{n-1};\ 0)$ haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to'plami fazosi $R^n$ fazoning qism osti fazosidir va hokazo.

L chiziqli fazoda mavjud har qanday chiziqli erkli vektorlar sistemalarining tarkibidagi vektorlar soni n ga teng va undan oshmasa, u holda chiziqli fazo *n o'lchovli* deyiladi va $L^n$ yozuv bilan belgilanadi. n – soniga esa *chizio'li fazoning o'lchovi* deyiladi.

*n ¤lchovli chizio'li fazoning bazisi* deb, har qanday chiziqli erkli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi.

$L^n$ chiziqli fazoning har bir **x** vektorini bazis vektorlarining yagona ko'rinishdagi chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlash mumkin.

Agar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – $L^n$ chiziqli fazoning ixtiyoriy tanlangan bazislaridan biri bo'lsa, u holda $L^n$ fazoning har bir **x** vektori uchun yagona $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ chiziqli yoyilma o'rinli bo'ladi. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlarga **x** vektorining $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ *bazisdagi koordinatalari* deyiladi va **x** vektor $\mathbf{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $L^n$ chiziqli fazoda boshqa bazis tanlansa, unda **x** vektorning koordinatalari ham mos ravishda o'zgaradi.

Masala: $\mathbf{a_1}(1; -1; 2; -3)$, $\mathbf{a_2}(-2; 1; -1; 4)$, $\mathbf{a_3}(-3; 1; 0; 5)$ va $\mathbf{a_4}(3; -2; 3; -7)$ vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan birini va uning o'lchovini aniqlang.

Masala chiziqli bog'liq vektorlar sistemasining bazisi va rangini topish usulida (§11 ga qaralsin) echiladi.

$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4 = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama umumiy echimi Gauss-Jordan usulida quriladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & | & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Qurilgan umumiy echimning bazis $x_1$ va $x_4$ noma'lumlari oldidagi vektor – koeffitsientlardan iborat $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_4}$ qism osti sistema berilgan vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan biri bo'lib, fazo o'lchovi 2 ga teng.

## 2. Evklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matritsa.

Agar haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, ya'ni fazoning ixtiyoriy **x** va **u** vektorlar juftiga yagona **(x, u)** haqiqiy son mos qo'yilsa, u holda haqiqiy chiziqli fazoga *Evklid fazo* deyiladi. Ta'rifda keltirilgan moslik har qanday **x, y, z** vektorlar va λ son uchun quyidagi aksiomalarga bo'ysinadi:

a) **(x, u) = (u,x)**

b) **(x+y, z) = (x, z) + (y, z)**

v) **(λx, y) = λ(x, y)**

g) **(x, x) ≥ 0**

Skalyar ko'paytma aniqlangan haqiqiy chiziqli fazo Evklid fazoda metrika haqida gapirish mumkin. Biz oldingi mavzularda ta'riflagan vektor uzunligi (moduli yoki normasi), vektorni birlik vektorga keltirish, vektorlar orasidagi burchak, ortogonallik va ortonormallik tushunchalari, Koshi-Bunyakovskiy va Minkovskiy (yoki uchburchak) tengsizliklari Evklid fazoga xosdir.

n o'lchovli Evklid fazoda n ta vektorlarning ortonormallangan bazisi mavjud.

Vektorlari ortonormallangan sistemani tashkil etgan bazisga *ortonormallangan bazis* deyiladi.

Ortonormallangan bazisda berilgan ikki $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $\mathbf{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

n o’lchovli chiziqli $L^n$ fazoda ikki: dastlabki $\mathbf{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ bazis va yangi $\mathbf{e_1', e_2', \ldots, e_n'}$ bazislar tanlangan bo’lsin. Agar yangi bazis vektorlari dastlabki bazis vektorlari orqali quyidagi formulalar bo’yicha ifodalanishi aniqlangan bo’lsa, ya’ni

$$\begin{cases} e'_1 = P_{11}e_1 + P_{12}e_2 + \ldots + P_{1n}e_n \\ e'_2 = P_{21}e_1 + P_{22}e_2 + \ldots + P_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \ldots + P_{nn}e_n \end{cases} \qquad (16.1)$$

u holda **x** vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali quyidagi formulalar bo’yicha ifodalanadi:

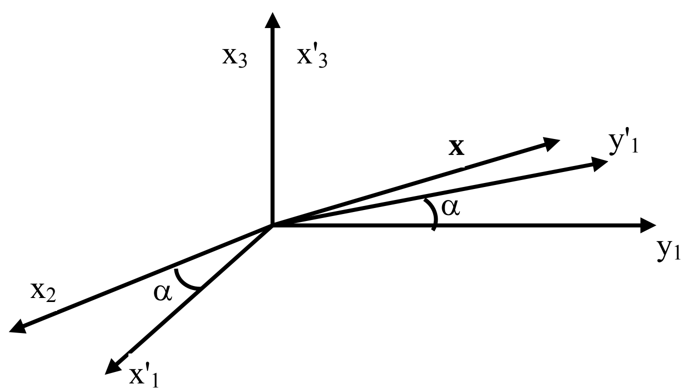
$$\begin{cases} x_1 = P_{11}x'_1 + P_{21}x'_2 + \ldots + P_{n1}x'_n \\ x_2 = P_{21}x'_1 + P_{22}x'_2 + \ldots + P_{n2}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = P_{1n}x'_1 + P_{12}x'_2 + \ldots + P_{1n}x'_n \end{cases} \qquad (16.2)$$

yoki matritsa shaklida $\mathbf{x = P^T x'}$, bu erda $\mathbf{R^T}$ (16.1) sistema koeffitsientlar matritsasining transponirlangan matritsasi:

$$P^T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsaga *bazisdan yangi bazisga o’tish matritsasi* deyiladi.

Masala. Uch o’lchovli fazoda **i, j, k** bazisdan ikkinchi to’g’ri burchakli koordinatalar sistemasini **0Z** applikata o’qi atrofida α burchakli burishdan hosil bo’lgan **i′, j′, k′** bazisga o’tish matritsasini tuzing.



Yangi bazis vektorlarining dastlabki bazis vektorlari orqali ifodalanishi quyidagi sistema ko'rinishidan iborat:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' = -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = 0\,\mathrm{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{cases}$$

Dastlabki bazisdan yangi bazisga o'tish matritsasi

$$P^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy vektorning dastlabki koordinatalarini uning yangi koordinatalari orqali ifodalovchi (2) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha x'_1 - \sin\alpha x'_2 \\ x_2 = \sin\alpha x'_1 + \cos\alpha x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

Agar haqiqiy elementli **R** matritsaning transponirlangan $\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$ matritsasi uning teskari $\mathbf{R}^{\mathbf{-1}}$ matritsasiga teng bo'lsa, ya'ni $\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{\mathbf{-1}}$, u holda **R** *ortogonal matritsa* deyiladi.

Ta'rifdan **R** ortogonal matritsa uchun $\mathbf{R}\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}\ \mathbf{R}^{\mathbf{-1}} = \mathbf{E}$ tengliklar o'rinli bo'lishi va **R** matritsa determinanti 1 yoki –1 ga teng bo'lishini payqash qiyin emas.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini (umuman, ortogonal koordinatalar sistemasini) har qanday almashtirganda o'tish matritsasi rolini ortogonal matritsa o'taydi.

Ko'rilgan masalada **R** matritsaning ortogonalligini $(\mathbf{R}^{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^{\mathbf{-1}})$ tekshirib ko'rish mumkin.

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. n o'lchovli chiziqli fazo deb, qanday chiziqli fazoga aytiladi?
4. Chiziqli fazo o'lchovi deb nimaga aytiladi?
5. n o'lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
6. Har qanday $\mathbf{x} \in \mathbf{L}^{\mathbf{n}}$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?
7. Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?
8. Qanday chiziqli fazoga evklid fazo deyiladi?
9. n o'lchovli evklid fazoning ortonormallangan bazisi deb nimaga aytiladi?
10. $\mathbf{L}^{\mathbf{n}}$ fazoda bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi qanday tuziladi?
11. Qanday haqiqiy elementli matritsaga ortogonal matritsa deyiladi? Ortogonal matritsa determinanti haqida nima deya olasiz?

## Ma’ruza tayanch iboralari

1. Chiziqli fazo.
2. Chiziqli fazo qism osti fazosi.
3. Chiziqli fazo bazisi.
4. Chiziqli fazo o’lchovi.
5. Vektorning bazisdagi koordinatalari.
6. Evklid fazo.
7. Ortonormallangan bazis.
8. O’tish matritsasi.
9. Ortogonal matritsa.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**16.1.** Quyidagi vektorlar sistemalariga tortilgan chiziqli qism osti fazosining bazislaridan birini, ortonormallangan bazisini va o’lchamini toping:

**a)** $\mathbf{a_1}(0; 1; -3)$, $\mathbf{a_2}(3; 5; 0)$, $\mathbf{a_3}(1; 2; -1)$;

**b)** $\mathbf{a_1}(1; 0; 1; 0)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a_3}(0; 1; 0; 1)$, $\mathbf{a_4}(1; 0; 0; 1)$.

**16.2. a)** $\mathbf{x}(2; -1)$ vektor $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ bazisda berilgan. Vektorning $\mathbf{e_1=e_1-3e_2}$, $\mathbf{e_2=2e_1+e_2}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

**b)** $\mathbf{x}(3; -2; 4)$ vektor $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ bazisda berilgan. Vektorning $\mathbf{e_1=e_1+2e_2-3e_3}$, $\mathbf{e_2=e_1+e_2+e_3}$, $\mathbf{e_3=2e_1-e_2+2e_3}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

**16.3.** Quyidagi matritsalardan ortogonallarini ajrating:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0{,}5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

**16.4.** Quyida berilgan ikki vektorlar sistemalaridan har biri bazis bo’la olishini isbotlang. Ushbu bazislarda berilgan aynan bir vektorning koordinatalari orasida munosabatlarni o’rnating:

**a)** $\mathbf{e_1}(1; 2)$, $\mathbf{e_2}(1; 1)$, $\mathbf{e_1}(1; -1)$, $\mathbf{e_2}(3; 4)$;

**b)** $\mathbf{e_1}(2; 1; -1)$, $\mathbf{e_2}(3; 1; 2)$, $\mathbf{e_3}(1; 0; 4)$, $\mathbf{e_1}(1; 1; -1)$, $\mathbf{e_2}(2; 3; -2)$, $\mathbf{e_3}(3; 4; -4)$.

**16.5.** $\mathbf{R_3}$ da **i, j, k** bazisdan fazoni 0u ordinata o’qi atrofida $\boldsymbol{\alpha}$ burchakka burgandagi bazisga o’tish matritsasini quring.

# §17. CHIZIQLI OPERATORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

## 1. Chiziqli operator va uning matritsasi.

**L** chiziqli fazoni va uning **A** almashtirishini yoki operatorini, ya'ni har bir **x є L** vektorga shu **L** fazoning biror–bir **u** vektorini mos qo'yuvchi qonunni qaraymiz. Ushbu qonun **u = Ax** ko'rinishida yoziladi.

**L** fazoning har qanday **z** va **z′** vektorlari va ixtiyoriy $\lambda$ haqiqiy son uchun **A(z+z′)=Az+Az′; A(λz)=λAz** tengliklar o'rinli **A** almashtirishi chiziqli *fazoning chizio'li almashtirishi* (yoki o*peratori*) deyiladi.

Agar **L** fazo n o'lchovli bo'lib, unda $\mathbf{e_1, e_2, \ldots, e_n}$ bazis tanlangan bo'lsa, u holda **x** vektor koordinatalari va uning aksi **u** vektor koordinatalari orasidagi bog'liqlik quyidagi sistema ko'rinishida aniqlanadi

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \quad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

yoki matritsa ko'rinishida **Y = AX,** bu erda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

**i –** ustuni tanlangan $\mathbf{Ae_i}$ vektorning koordinatalaridan tuzilgan **A** matritsaga *chizio'li almashtirish matritsasi* deyiladi.

Bazis almashtirilib, dastlabki bazisdan yangi bazisga $\mathbf{P^T}$ o'tish matritsa yordamida o'tilsa, chiziqli almashtirishning dastlabki bazisdagi **A** matritsasiga yangi bazisda $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsa mos keladi. **A** va $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsalar *o'zaro o'xshash matritsalar* deyiladi. **A** matritsadan $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsaga o'tish **A** *matritsani o'xshashlik almashtirishi* deyiladi.

Shunday qilib, ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos keladi.

## 2. Chiziqli operatorlar ustida amallar.

Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan amallarni ko'rib chiqamiz:

a) Almashtirishlarni qo'shish. Ikki chiziqli almashtirishlar matritsa ko'rinishida berilgan bo'lsin: **Y=AX, Z=BX.** Chizikli almashtirishlarning yig'indisi deb, quyidagicha aniqlanadigan **S** almashtirishga aytiladi.

$$\mathbf{Y + Z = (A+B)X = CX}\ .$$

b) Almashtirishni songa ko'paytirish. Matritsa ko'rinishida **Y=AX** chiziqli almashtirish va ixtiyoriy λ haqiqiy son berilgan bo’lsin. Berilgan almashtirishni λ songa ko’paytmasi deb, quyidagi **V** almashtirishga aytiladi: **Z = (λA)X = BX.**

v) Almashtirishlarni ko’paytirish. Ikki ketma-ket chiziqli almashtirishlar **Y = AX** va **Z = BY** berilgan bo’lsin. **Y** uchun ifodani birinchi formuladan ikkinchisiga ko’ysak, **Y = AX** almashtirishning **Z = BY** almashtirishga ko’paytmasi deb ataladigan quyidagi **F** almashtirishni olamiz:

$$Z = B(AX) = (BA)X = FX$$

g) Teskari almashtirish. Matritsa shaklida **Y=AX** chiziqli almashtirish berilgan bo’lib, **A** - kvadrat maxsusmas matritsa **(detA≠0)** bo’lsin. Tenglama ikkala qismini chapdan teskari $\mathbf{A^{-1}}$ matritsaga ko’paytirib, **Y=AX** chiziqli almashtirishning teskari almashtirishi deb ataluvchi $\mathbf{X=A^{-1}Y}$ chiziqli almashtirishni olamiz.

## 3. Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati.

Agar shunday bir λ son tanlash mumkin bo’lsaki, bunda **Ax=λx** tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas **x** vektorga **A** *chizio’li almashtirishning xos vektori* deyiladi. λ sonning o’ziga esa **A** chiziqli almashtirishning **x** xos vektoriga mos keluvchi *xos o’iymati* deyiladi.

Xos vektorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har bir xos vektorga yagona xos qiymat mos keladi;

2. Agar $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ **– A** chiziqli almashtirishning ayni bir λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlari bo’lsa, u holda ularning yig’indisi $\mathbf{x_1+x_2}$ vektor ham **A** chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori bo’ladi.

3. Agar **x** – **A** chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo’lsa, **x** ga kollinear har qanday **kx** vektor ham **A** chiziqli almashtirishning o’sha λ  xos qiymatiga mos xos vektori bo’ladi.

Agar $\mathbf{L^n}$ fazoda bazis tanlangan bo’lsa, **Ax = λx** tenglikni matritsa shaklida yozish mumkin: **AX = λX.**

Tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas ustun **A** matritsaning λ xos qiymatiga *mos xos vektori* deyiladi.

**AX = λX** <=> **AX = λEX** <=> **(A-λE)X = θ** bo’lib, oxirgi tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Xos vektorlarni qurish uchun sistemaning nolmas echimlarini topish zarur. n ta noma’lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas echimlarga fakatgina sistema determinanti nolga teng bo’lgandagina ega bo’ladi, ya’ni

$$\mathbf{det(A-\lambda E)}=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad \text{yoki}$$

$\mathbf{a_n}\lambda^n + \mathbf{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{a_1}\lambda + \mathbf{a_0} = \mathbf{0}$, bu erda $\mathbf{a_n = (-1)^n}$, $\mathbf{a_0 = detA}$.

Oxirgi yozilgan tenglamalar **A** matritsaning xarakteristik tenglamalari, uning ildizlari esa xarakteristik sonlari yoki **A** matritsaning xos qiymatlari deyiladi.

Masala. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uni echib, **A** matritsaning xos qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \in} \qquad \{1; 6\}$$

$\lambda_1 = 1$ xos qiymatga mos xos vektorlardan birini quramiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=3 \end{cases}, \text{ ya'ni } \mathbf{X_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ xos qiymatga mos xos vektorlardan biri esa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ 3x_1-3x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}, \ \mathbf{X_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'lik emas. Ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o'xshash matritsalar mos kelgani uchun, o'xshash matritsalarning xarakteristik ko'phadlari tengdir. Agar $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{X_k}$ xos vektorlar juft-jufti bilan turli xos qiymatlarga tegishli bo'lsa, ular chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

## 4. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko'rinishga keltirish.

**A** matritsa berilgan $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ bazis vektorlar matritsaning xos vektorlaridan iborat bo'lgandagina **A** matritsa diagonal ko'rinishda bo'ladi.

Agar o'xshash **A** va $\mathbf{K^{-1}AK}$ matritsalar berilgan bo'lib, $\mathbf{D=K^{-1}AK}$ matritsa diagonal matritsa bo'lsa, u holda **K** matritsa **A** matritsani diagonal ko'rinishga keltiradi deyiladi. **D** diagonal matritsaning bosh diagonali **A** matritsaning xos qiymatlaridan, **K** matritsaning **i -** ustuni $\lambda_i$ xos qiymatlarga tegishli xos vektor mos koordinatalaridan tuziladi.

Berilgan matritsani diagonal matritsaga keltiruvchi **K** matritsa quyidagicha quriladi:

1) **A** matritsaning barcha xos qiymatlari topiladi;

2) Har bir $\lambda_i$ xos qiymatga mos $\mathbf{(A-\lambda_i E)\, X = \theta}$ bir jinsli sistemaning fundamental echimlari –

xos vektorlari tuziladi;

3) **i –** ustuni $\lambda_i$ ga tegishli fundamental echimning mos koordinatalaridan iborat **K** matritsa quriladi.

Masala. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ matritsani diagonal ko'rinishiga keltiruvchi **K** matritsani quring.

Yuqorida matritsaning xos qiymatlari $\lambda\epsilon\{1;\ 6\}$ va ularga mos xos vektorlari $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ tuzilgan edi. Demak, **K** matritsa $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda yozilishi mumkin. $\mathbf{K^{-1}AK}$ $=\mathbf{D}$ ekanligini tekshirib ko'ramiz:

$$\mathbf{K}^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}=\mathrm{K}^{-1}\mathrm{AK}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

Har qanday **x** va **u** vektorlar uchun **(x, Ay) = (y, Ax)** tenglik o'rinli **A** chiziqli almashtirishga *simmetrik almashtirish* deyiladi.

**A** chiziqli almashtirish simmetrik bo'lishi uchun ortonormallangan bazisda uning matritsasining simmetrik bo'lishi $\mathbf{((a_{ik}) = (a_{ki}))}$ zarur va etarlidir.

Haqiqiy elementli simmetrik matritsa quyidagi xossalarga ega:

**1.** Simmetrik matritsaning barcha xos qiymatlari haqiqiy;

**2.** Simmetrik matritsaning turli xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal;

**3.** Agar **A** matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo'lib, **V** matritsa ortogonal bo'lsa, u holda o'xshash $\mathbf{V^{-1}\cdot A\cdot V}$ matritsa simmetrik va haqiqiydir.

Har qanday haqiqiy simmetrik **A** matritsani **Q** ortogonal matritsa yordamida diagonal ko'rinishga keltirish mumkin.

**A** simmetrik matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi **Q** ortogonal matritsa quyidagicha quriladi:

1) **A** matritsani diagonal ko'rinishga keltiruvchi **K** matritsa quriladi;

2) **K** matritsaning ustunlari ortogonallash jarayoniga tortiladi va har biri birlik vektorga keltiriladi;

3) Ustunlari ortonormallangan vektorlar sistemasini tashkil etgan **Q** matritsa quriladi.

## O’z–o’zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o’xshashlik almashtirishi deganda nimani tushunasiz?
3. Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan qanday amallarni bilasiz?
4. Chiziqli almashtirishning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?
5. Xos vektorlarning qanday xossalarini bilasiz?
6. **A** matritsa xarakteristik tenglamasini yozing.
7. Matritsaning xarakteristik ko’phadi bazis tanlanishiga bog’liqmi?
8. Qanday bazisda matritsa diagonal ko’rinishga ega bo’ladi?
9. Berilgan matritsani diagonal ko’rinishga keltiruvchi matritsa qanday quriladi?
10. Simmetrik chiziqli almashtirish deb, qanday almashtirishga aytiladi?
11. Har qanday simmetrik matritsani diagonal ko’rinishga keltirish mumkinmi? Agar mumkin bo’lsa, qanday qilib?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Chiziqli almashtirish yoki operator.
2. Chiziqli almashtirish matritsasi.
3. O’xshash matritsalar.
4. Almashtirishlarni qo’shish.
5. Almashtirishni songa ko’paytirish.
6. Almashtirishlarni ko’paytirish.
7. Teskari almashtirish.
8. Chiziqli almashtirish xos vektori.
9. Chiziqli almashtirish xos qiymati.
10. Xarakteristik tenglama.
11. Xarakteristik ko’phad.
12. Diagonal matritsa.
13. Simmetrik chiziqli almashtirish.
14. Simmetrik matritsa.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**17.1.** To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining abstsissa o'qiga nisbatan tekislik simmetriyasi koordinata o'qlarining birlik vektorlari bazisida chiziqli almashtirish bo'la olishini isbotlang va almashtirish matritsasini quring.

**17.2.** Tekislikdagi $\mathbf{a_1}(1;\,1)$, $\mathbf{a_2}(2;\,1)$ vektorlarni mos ravishda $\mathbf{b_1}(1;\,2)$, $\mathbf{b_2}(1;\,3)$ vektorlarga o'tkazadigan yagona chiziqli almashtirish mavjudligini isbotlang. Almashtirish matritsasini barcha vektorlar berilgan bazisda toping.

**17.3.** **A** chiziqli almashtirish $\mathbf{a_1}(1;\,2)$, $\mathbf{a_2}(-1;\,1)$ bazisda $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ matritsaga ega. Almashtirishning $\mathbf{b_1}(1;\,-2)$, $\mathbf{b_2}(3;\,-1)$ bazisdagi matritsani toping.

**17.4.** **A** chiziqli almashtirish $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ bazisda $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$ matritsaga ega. Almashtirishning $\mathbf{e'_1=2e_1+3e_2-e_3}$, $\mathbf{e'_2=e_1+2e_2+3e_3}$, $\mathbf{e'_3=4e_1+7e_2+6e_3}$ bazisdagi matritsani toping.

**17.5.** Ikki chiziqli almashtirishlar berilgan:

$$\begin{cases}\mathbf{x_1=y_1+2y_2}\\ \mathbf{x_2=2y_1-y_2}\end{cases}\quad \begin{cases}\mathbf{y_1=z_1-z_2}\\ \mathbf{y_2=2z_1+3z_2}\end{cases}$$

$\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ larni $\mathbf{z_1}$, $\mathbf{z_2}$ orqali ifoda lovchi chiziqli almashtirishni toping.

**17.6.** $\begin{cases}\mathbf{x_1=y_1+2y_2-3y_3}\\ \mathbf{x_2=2y_1-y_2+y_3}\\ \mathbf{x_3=y_1-3y_2-y_3}\end{cases}$ almashtirishning teskari chiziqli almashtirishni toping.

**17.7.** $R_2$ va $R_3$ fazoning biror-bir bazisida berilgan A chiziqli almashtirishning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

**a)** $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix}-5 & 8\\ 6 & 3\end{pmatrix}$

**g)** $\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ -5 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

**17.8.** Quyidagi matritsalarni diagonal ko'rinishga keltiruvchi o'tish matritsalarini quring:

**a)** $\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

# §18. KVADRATIK SHAKLLAR VA ULARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH

## 1. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish.

**n** ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumlarning ikkinchi darajali bir jinsli

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \\ & + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \qquad (18.1)$$

ko'phadiga noma'lumlarning kvadratik shakli deyiladi. Ifoda koeffitsientlari uchun $a_{i\kappa} = a_{\kappa i}$ **(i, κ = { 1, 2, … , n }, i ≠ κ),** munosabatlar o'rinli. (18.1) kvadratik shakl ixcham $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ ko'rinishda yoziladi. (18.1) kvadratik shakl koeffitsientlaridan quyidagi A simmetrik matritsani va noma'lumlar X satr matritsasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Matritsalarni ko'paytirish qoidasidan foydalanib, (18.1) kvadratik shaklni** $\varphi(X) = X\,A\,X^T$ **ko'rinishida yozish mumkin.**

Misol. $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ kvadratik shakl matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish degani, uning ko'rinishini

$$\varphi_1(u) = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \qquad (18.2)$$

shaklga keltirishni anglatadi. (18.2) kanonik ko'rinishdagi kvadratik shaklning $A_1$ matritsasi diagonal matritsadan iborat.

**A** matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo'lgani uchun, (18.1) kvadratik shaklni (18.2) kanonik ko'rinishga keltirish masalasi, simmetrik chiziqli almashtirish matritsasini diagonal ko'rinishga aylantirish masalasiga keltiriladi.

**A** matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlari (18.1) kvadratik shakl xarakteristik sonlari deyilsa, xarakteristik sonlarga mos xos vektorlar yo'nalishlari kvadratik shaklning bosh yo'nalishlari deyiladi.

Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish qoidasi ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirtlar tenglamalarini tekshirishda qo'llaniladi.

Masala. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltiring.

Kvadratik shakl matritsasining xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Determinantni hisoblab, hadlarini ixchamlasak, $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$ tenglamani olamiz. Tenglama $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ ildizlarga ega ekanligini aniqlash qiyin emas. Demak, berilgan kvadratik shakl $\boldsymbol{\varphi_1 = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2}$ kanonik ko'rinishga ega.

## 2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini tekshirish.

Aynan biror-bir chiziq tenglamasi koordinatalar sistemasining joylashishiga qarab, turli ko'rinishda bo'lishi mumkin. Koordinatalarni almashtirish yordamida uning tenglamasini sodda (kanonik) ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (18.3)$$

ko'rinishga ega. (18.3) tenglama bosh hadlari diskriminanti deb, ikkinchi tartibli

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

aniqlovchiga aytiladi.

Agar $\delta \neq 0$ bo'lsa, (18.3) tenglama ko'rinishida berilgan chiziq yagona simmetriya markaziga ega va markaziy chiziq deb ataladi. Markaziy chiziqning simmetriya markazi, oddiy qilib, markaz deyiladi. Markaziy chiziqlarga ellips (xususan, aylana), giperbola misol bo'ladi.

Agar $\delta = 0$ bo'lsa, (18.3) tenglama yordamida aniqlanadigan chiziq markaziy bo'lmagan (nomarkaziy) chiziq deb yuritiladi. Parabola markaziy bo'lmagan chiziqqa misol bo'la oladi.

(18.3) tenglama markaziy chiziqni ifodalasa, $\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0, \end{cases}$ formulalarni qo'llab, koordinata o'qlarini parallel ko'chirish mumkin, bu erda, $x_0$, $y_0$ – chiziq markazi bo'lib, yangi $0_1$ sanoq boshining koordinatalaridir. Ular quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

sistemadan aniqlanadi.

Yangi $x_1 0_1 y_1$ koordinatalar sistemasidan (18.3) tenglama

$$a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + a'_{33} = 0 \qquad (18.4)$$

ko'rinishga keladi.

Paralel ko'chirish natijasida, bosh hadlari koeffitsientlari o'zgarmaganini, (18.4) tenglamaning ozod $a'_{33}$ hadi (18.3) tenglamaning chap qismi joriy x, y koordinatalarini markazning mos $x_0$, $y_0$ koordinatalari bilan almashtirilgandagi

$$a_{33}' = a_{11}x_0^2 + 2\,a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}$$

natijaga tengligini aniqlash qiyin emas.

(18.4) tenglamani yanada soddalashtirish uchun kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish qoidasini qo'llaymiz. Buning uchun, koordinata o'qlarini $0_1$ markaz atrofida shunday buramizki, $0_1x'$ va $0_1y'$ o'q yo'nalishlari kvadratik shaklning mos bosh yo'nalishlari bilan ustma-ust tushsin. Tenglama quyidagi

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{33} = 0 \qquad (18.5)$$

ko'rinishni oladi. Bu erda, $\lambda_1$ va $\lambda_2$ – xarakteristik

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

tenglamaning ildizlari.

Agar $\delta$ diskriminant noldan farq qilsa, Viet teoremasiga binoan tenglamadan $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ ekanligi, ya'ni $\lambda_1$ va $\lambda_2$ xarakteristik sonlarning har biri noldan farqliligi kelib chiqadi.

Quyidagi ikki holning biri bo'lishi mumkin.

1. $\lambda_1$ va $\lambda_2$ sonlar bir xil ishorali, natijada, $\delta=\lambda_1\lambda_2 > 0$. $a'_{33} \neq 0$ va uning ishorasi $\lambda_1$, $\lambda_2$ larning ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (18.5) tenglama ellipsni aniqlaydi. Agarda $a_{33}'$ ozod hadning ishorasi $\lambda_1$, $\lambda_2$ sonlarning ishorasi bilan mos tushsa, (18.5) tenglama ma'noga ega emas (zid) va mavhum ellipsni aniqlaydi deyiladi. Agarda $a_{33}' = 0$ bo'lsa, (18.5) tenglama $x' = 0$ va $y' = 0$ haqiqiy nuqtani aniqlaydi.

2. $\lambda_1$ va $\lambda_2$ sonlar turli ishorali, natijada, $\delta=\lambda_1\lambda_2 < 0$. Ushbu holda, agarda $a'_{33} \neq 0$ bo'lsa, (18.5) tenglama giperbolani aniqlaydi, agarda $a'_{33} = 0$ bo'lsa, ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi.

(18.3) tenglama markaziy bo'lmagan chiziqni ifodalasin, ya'ni $\delta=0$ shart bajarilsin.

$\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ bo'lgani uchun, $\lambda_1$ va $\lambda_2$ sonlaridan biri nolga teng. Aniqlik uchun, $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2=0$ bo'lsin. x0y koordinatalar sistemasini shunday buramizki, yangi $0x_1$ va $0y_1$ o'qlarning yo'nalishi (18.3) tenglama bosh hadlari kvadratik shaklining bosh yo'nalishlari bilan mos tushsin. Aniqrog'i, yangi koordinatalar sistemasining $0x_1$ o'qi $\lambda_1$ xarakteristik songa mos bosh yo'nalish bilan ustma-ust joylashsin. Ushbu holda, (18.3) tenglama $x_10y_1$ sistemada

$$\lambda_1 x_1^2 + 2a'_{13}\,x_1 + 2a'_{23}\,y_1 + a_{33} = 0 \qquad (18.6)$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu erda,

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha; \quad a'_{23} = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha.$$

(18.6) tenglamaning geometrik ma'nosini tekshirganda, quyidagi xollardan biri uchraydi:

1) $a'_{23}$ koeffitsient noldan farqli bo'lsa, (18.6) tenglama simmetriya o'qi $0y_1$ o'qiga parallel parabolani aniqlaydi;

2) $a'_{23} = 0$ shart bajarilsa, (18.6) tenglama ikki parallel to'g'ri chiziqlar juftini aniqlaydi ($a'^2_{13}$ - $\lambda_1 a_{33}$ diskriminant musbat holda – haqiqiy, manfiy holda – mavhum, va agarda nolga teng bo'lsa – ustma-ust joylashuvchi).

Masala. $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$ chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring va egri chiziqni chizing.

Tenglamada $a_{11}=5$, $a_{12}=2$, $a_{22}=2$, $a_{13}=5$, $a_{23}=2$, $a_{33}=-7$.

Bosh hadlarining diskriminantini hisoblaymiz:

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 5\cdot 2 - 2^2 = 6.$$

$\delta > 0$ bo'lgani uchun, berilgan chiziq elliptik tiplagi egri chiziqdir. Egri chiziqning markazi

$$\begin{cases} 5x_0 + 2y_0 + 5 = 0; \\ 2x_0 + 2y_0 + 2 = 0, \end{cases}$$

sistema echimidan iborat. Sistema $x_0=-1$, $y_0=0$ echimga ega.

Parallel ko'chirish yordamida koordinata o'qlarini $0_1(-1; 0)$ markazga o'tkazamiz. Yangi $x_1 0_1 y_1$ koordinatalar sistemasida egri chiziq tenglamasi

$$5x_1^2 + 4x_1y_1 + 2y_1^2 - 12 = 0$$

ko'rinishga ega.

Oxirgi tenglamani yanada soddalashtirish uchun kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish qoidasini qo'llaymiz. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Tenglama $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$ ildizlarga ega.

$x_1 0_1 y_1$ koordinatalar sistemasini $0_1$ markaz atrofida shunday buramizki, yangi $0_1x'$ va $0_1y'$ o'qlar kvadratik shaklning bosh yo'nalishlari bilan ustma-ust tushsin. $x'0_1y'$ sistemada egri chiziq tenglamasi

$$x'^2 + 6y'^2 - 12 = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} = 1$$

kanonik ko'rinishni oladi.

Tenglama yarim o'qlari $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ larga teng ellipsni ifodalaydi. Ellipsni chizish uchun $\lambda_1$ xarakteristik songa mos bosh yo'nalishni aniqlaymiz. Tenglama koeffitsientlarini

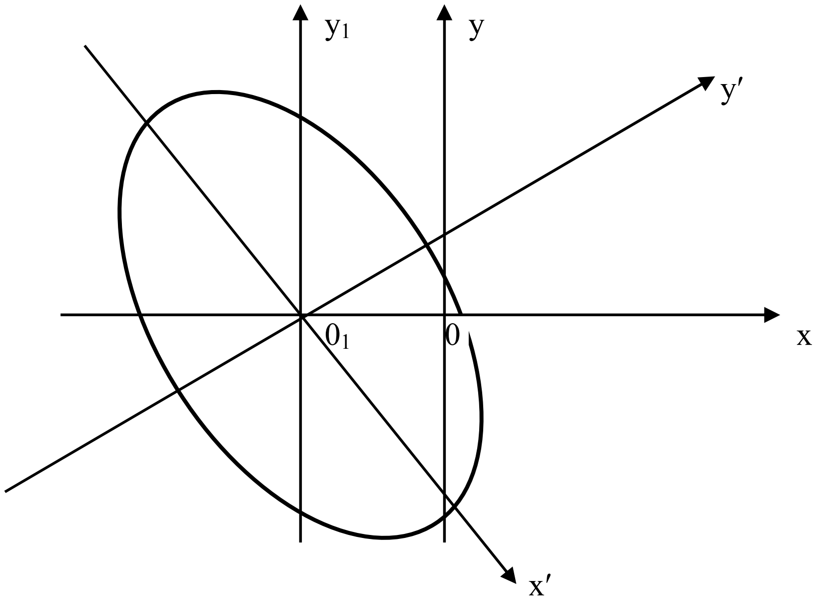
$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + \quad a_{12}y_1 = 0, \\ \quad a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)y_1 = 0, \end{cases}$$

sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2y_1 = 0, \\ 2x_1 + \ \ y_1 = 0, \end{cases}$$

sistemani olamiz. Sistema nolmas echimlaridan biri $x_1=1$, $x_2=-2$. $x_1 0_1 y_1$ sistemada $0_1x'$ o'qining **i'** birlik vektori $\frac{1}{\sqrt{5}}$ va $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ koordinatalarga ega. Demak, tg $\alpha$= -2 va $\alpha$=arctg(-2).

$x_1 0_1 y_1$ sistemani $0_1$ markaz atrofida soat strelkasi bo'ylab $\alpha$ burchakka burib, $x' 0_1 y'$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olamiz. Ushbu sistemada ellips tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lgani uchun uning chizmasi oson chiziladi (rasmga qaralsin).




## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. n ta noma'lumlarning kvadratik shakli deb qanday ko'phadga aytiladi?
2. Kvadratik shakl matritsasi qanday tuziladi?
3. Kvadratik shaklni matritsa ko'rinishida yozish mumkinmi va qanday?
4. Kvadratik shaklning kanonik ko'rinishi deb, uning qanday ko'rinishiga aytiladi?
5. Kvadratik shaklni kanonik ko'rinishga keltirish jarayoni nimadan iborat?
6. Kvadratik shaklning xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari deb nimalarga aytiladi?
7. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini yozing?
8. Umumiy tenglama bosh hadlari diskriminanti deb nimaga aytiladi?
9. Markaziy chiziq deb qanday ikkinchi tartibli chiziqlarga aytiladi?
10. Markaziy chiziqlarga misollar keltiring.
11. Markaziy bo'lmagan chiziq deb nimaga aytiladi va misol keltiring.
12. Markaziy chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish jarayonini so'zlab bering.
13. Qanday shartlar bajarilganda umumiy tenglama ellipsni aniqlaydi?
14. Qanday shartlar bajarilganda umumiy tenglama giperbolani aniqlaydi?
15. Markaziy bo'lmagan chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish jarayoni nimalardan iborat?
16. Qanday shartlar bajarilganda umumiy tenglama parabolani aniqlaydi?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. n ta noma'lumlarning kvadrat shakli.
2. Kvadratik shakl matritsasi.
3. Kvadratik shaklning kanonik ko'rinishi.
4. Kvadratik shakl xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari.
5. Ikkinchi tartibli egri chiziq umumiy tenglamasi.
6. Umumiy tenglama bosh hadlari diskriminanti.
7. Markaziy chiziq.
8. Markaziy bo'lmagan chiziq.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**18.1.** Kvadratik shakllarni kanonik ko'rinishga keltiring:

**a)** $\varphi = 2x_1x_2$;

**b)** $\varphi = 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$;

**v)** $\varphi = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

**g)** $\varphi = 5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

**d)** $\varphi = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$.

**18.2.** To'la kvadratlar ajratish va koordinatalar boshini ko'chirish usullarini qo'llab, quyidagi chiziqlar tenglamalarini soddalashtiring va chizing:

**a)** $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$; **b)** $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

**v)** $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$; **g)** $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

**18.3.** Ikkinchi tartibli egri chiziqlar tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltiring. Ularning tiplari va joylashishini aniqlang:

**a)** $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 3 = 0$;

**b)** $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$;

**v)** $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$;

**g)** $3x^2 - 6x + 3y^2 - 12y + 15 = 0$;

**d)** $x^2 - 2y^2 + 4y - 2 = 0$;

**e)** $4x - 3y^2 + 12y - 12 = 0$;

**j)** $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 22 = 0$.

## §19. $R_N$ FAZODA NUQTALAR TO'PLAMI

### 1. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda nuqta atrofi. $R_n$ fazoda chegaralangan to'plam

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda ikki $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $N(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. **$R_n$ da nuqtalar orasidagi masofa** real fazoda qo'llanilgan formulani umumlashtirish asosida aniqlanadi. Berilgan n o'lchovli M va N nuqtalar orasidagi d masofa

$$d(M;N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

formula asosida hisoblanadi. $R_n$ fazoda nuqtalar orasidagi d masofa, real fazoda bo'lgani kabi, quyidagi xossalarga bo'ysinadi:

1. Har qanday M va N nuqtalar uchun $d(M; N) = d(N; M)$.
2. $d(M; N) \geq 0$, ya'ni agar $M \neq N$ bo'lsa, $d(M; N) > 0$ va agar $M = N$ bo'lsa, $d(M; N) = 0$.
3. Har qanday M , N va K nuqtalar uchun uchburchak tengsizligi deb ataluvchi $d(M; N) \leq d(M; K) + d(K; N)$ munosabatlar o'rinli.

n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda $M_0(x_{10}; x_{20}; \ldots; x_{n0})$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. **$R_n$ fazoda $M_0$ nuqtaning r atrofi** deb, $M_0$ markazdan r sondan kichik masofada yotuvchi mumkin bo'lgan barcha $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi va $S_r(M_0)$ yozuv bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, $S_r(M_0) = \{M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n \mid d(M; M_0) < 0\}$.

Masalan, $M_0(1; -2; 3; -1)$ nuqtaning $r = 3$ atrofi va $M_1(-1; 0; 2; -1)$, $M_2(0; -1; 3; 1)$, $M_3(3; 0; 2; -2)$ nuqtalar qaralayotgan bo'lsin.

$d(M_1; M_0) = 3 = 3 = r$, $d(M_2; M_0) = \sqrt{6} < 3 = r$, $d(M_3; M_0) = \sqrt{10} > 3 = r$ munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun, $M_1 \notin S_r(M_0)$, $M_2 \in S_r(M_0)$, $M_3 \notin S_r(M_0)$.

$R_1$ (haqiqiy sonlar o'qi) fazoda $M_0(x_0)$ nuqtaning r atrofi $(x_0 - r; x_0 + r)$ intervaldan iborat. $R_2$ (haqiqiy koordinatalar tekisligi) fazoda $M_0(x_{10}; x_{20})$ nuqtaning r atrofi markazi $M_0$ nuqtada radiusi r ga teng ichki doiradan iborat. $R_3$ fazoda esa $M_0(x_{10}; x_{20}; x_{30})$ nuqtaning r atrofi, markazi $M_0$ nuqtada radiusi r ga teng ichki shardan iborat va hokazo.

$R_n$ fazoda n o'lchovli nuqtalarning biror–bir V to'plami berilgan bo'lsin. V to'plamga tegishli har qanday $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ nuqtaning har bir koordinatasi uchun $|x_1| \leq A$, $|x_2| \leq A$, …, $|x_n| \leq A$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi $A > 0$ son mavjud bo'lsa, V nuqtalar to'plamiga **$R_n$ fazoda chegaralangan to'plam** deyiladi.

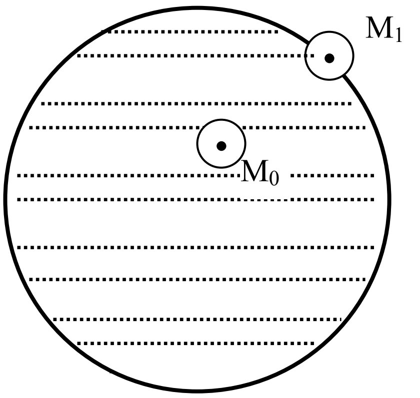
Masalan, $R_n$ fazoda $M_0$ nuqtaning r atrofi $S_r(M_0)$ – chegaralangan to'plam.

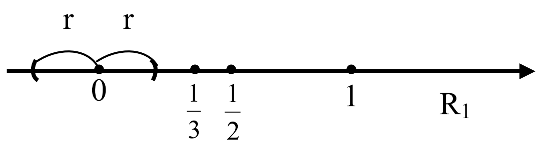
### 2. To'plamning ichki va chegaraviy nuqtalari, uning quyuqlanish nuqtasi. Yopiq va ochiq to'plamlar. Ixcham to'plam

n o'lchovli V **nuqtalar to'plamining ichki nuqtasi** deb, o'zining biror–bir atrofi bilan V to'plamga tegishli nuqtaga aytiladi.

V **nuqtalar to'plamining chegaraviy nuqtasi** deb, har qanday atrofi to'plamga tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalardan iborat nuqtaga aytiladi.

19.1-rasmda $M_0$ nuqta V to'plamning ichki, $M_1$ nuqta esa uning chegaraviy nuqtasidir.




19.2 – rasm.

V nuqtalar to'plamining barcha chegaraviy nuqtalari to'plamiga uning **chegarasi** deyiladi.

Masalan, ikki o'lchovli $V=\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2} \le 1\}$ nuqtalar to'plami uchun $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2} < 1$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi har bir $M(x_1; x_2)$ nuqta uning ichki nuqtasi, markazi O(0; 0) nuqtada, koordinata o'qlari simmetriya o'qlari va yarim o'qlari a va b ga teng ellips uning chegarasidir.

n o'lchovli V **nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasi** deb, har bir atrofi V to'plamning cheksiz ko'p nuqtalarini o'z ichiga oluvchi $M_0 \in R_n$ nuqtaga aytiladi.

Masalan, $R_1$ fazoda O(0) nuqta bir o'lchovli $V=\{\frac{1}{k} \mid k \in N\}$ nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasidir (19.2–rasm), chunki O(0) markazning har qanday r atrofi to'plamning cheksiz ko'p nuqtalarini o'z ichiga oladi. To'plamning quyuqlanish nuqtasi to'plamga tegishli bo'lishi shart emas. Misolimizda $O(0) \notin V$.

Har bir n o'lchovli quyuqlanish nuqtasi o'ziga tegishli nuqtalar to'plamiga **$R_n$ fazoda yopiq to'plam** deyilsa, har bir n o'lchovli nuqtasi ichki nuqta bo'ladigan nuqtalar to'plamiga esa **$R_n$ da ochiq to'plam** deyiladi.

Masalan, $\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ to'plam $R_2$ da yopiq to'plam bo'lsa, $\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ to'plam esa $R_2$ da ochiq to'plamdir. $R_n$ fazoda $M_0$ nuqtaning r atrofi $S_r(M_0)$ – ochiq to'plam.

Ochiq va yopiq to'plamlarning quyidagi xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Agar V to'plamning chegarasi shu to'plamga tegishli bo'lsa, V yopiq to'plamdir.
2. Har qancha yopiq to'plamlarning kesishmasi – yopiq to'plam.
3. Chekli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi – yopiq to'plam.
4. Chekli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi – ochiq to'plam.
5. Har qancha ochiq to'plamlarning birlashmasi – ochiq to'plam.
6. Agar V to'plamning to'ldiruvchisi yopiq bo'lgandagina V to'plamning o'zi ochiqdir.

$R_n$ fazoda chegaralangan va yopiq n o'lchovli nuqtalar to'plamiga **ixcham (kompakt) nuqtalar to'plami** deyiladi.

Masalan, [0; 1] kesma $R_1$ fazoda ixcham to'plamdir.

## 3. $R_n$ fazoda nuqtalarning qavariq to'plami va qavariq chiziqli kombinatsiyasi. Qavariq to'plamning chetki nuqtalari.

n o'lchovli haqiqiy $R_n$ fazoda ikki $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ va $N(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. $R_n$ fazoda [M N] **kesma** deb, koordinatalari

$$\begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) y_1; \\ z_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha) y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ z_n = \alpha x_n + (1-\alpha) y_n, \quad \text{бу ерда } \alpha \in [0;1], \end{cases}$$

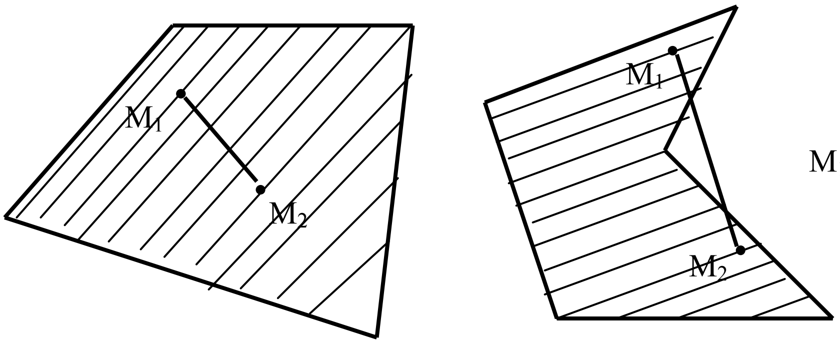
munosabatlarni qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan barcha $P(z_1; z_2; \ldots; z_n)$ nuqtalar to'plamiga aytiladi. Ta'rifga binoan,

$$[M\,N] = \{P \in R_n \mid P = \alpha M + (1-\alpha)N,\ \alpha \in [0; 1]\}.$$

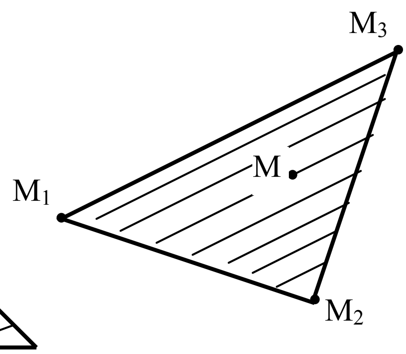
n o'lchovli R nuqtalar to'plamiga M va N **nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi** ham deyiladi.

$M_1$ va $M_2$ nuqtalar n o'lchovli V nuqtalar to'plamiga tegishli ixtiyoriy ravishda tanlangan nuqtalar bo'lsin. Har qanday ikki $M_1$ va $M_2$ nuqtalari qaralmasin, ularni tutashtiruvchi $[M_1 M_2]$ kesma ham V to'plamga tegishli bo'lsa, V nuqtalar to'plamiga **$R_n$ fazoda qavariq nuqtalar to'plami** deyiladi.

Geometrik figuralardan quyidagilar qavariq nuqtalar to'plamiga misol bo'la oladi: kesma, to'g'ri chiziq, nur, tekislik, yarim tekislik, doira, uchburchak, shar, tetraedr va hokazo. 19.3. a) rasmda tasvirlangan figura qavariq nuqtalar to'plami bo'lsa, 19.3. b) rasmda keltirilgan figura qavariq nuqtalar to'plami bo'la olmaydi.




a) 19.3 – rasm. b)




19.4 – rasm.

Umuman, n o’lchovli haqiqiy $R_n$ fazoda quyidagilar qavariq nuqtalar to’plamiga misol bo’ladi:

1) $R_n$ fazoning o’zi;
2) $\{M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in R_n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b\}$;
3) $\{M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in R_n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b\}$;
4) n o’lchovli nuqtaning har qanday r atrofi va hokazo.

$R_n$ fazoda n o’lchovli $M_1, M_2, \dots, M_k$ **nuqtalarning qavariq chiziqli kombinatsiyasi** deb, ixtiyoriy n o’lchovli $M = \lambda_1M_1+\lambda_2M_2+\dots+\lambda_к M_к$ nuqtaga aytiladi, bu erda $\lambda_1\geq 0$ , $\lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_к \geq 0$ , $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_к = 1$.

Agar $[M_1\, M_2]$ kesmaning ixtiyoriy M nuqtasini uning $M_1$ va $M_2$ uchlari chiziqli qavariq kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin bo’lsa, uchlari $M_1$, $M_2$ va $M_3$ nuqtalarda uchburchakning har qanday M nuqtasini $M_1$, $M_2$ va $M_3$ nuqtalarning chiziqli kombinatsiyasi ko’rinishida tasvirlash mumkin (19.4–rasm) va hokazo. Umuman, n o’lchovli $M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalar qavariq V nuqtalar to’plamiga tegishli bo’lsa, ularning har qanday chiziqli qavariq

$$M= \lambda_1M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_kM_k$$

kombinatsiyasi ham V to’plamga tegishli bo’ladi.

n o’lchovli $M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalarning mumkin bo’lgan barcha chiziqli qavariq kombinatsiyalari to’plamiga ularning qavariq qobig’i deb ham ataladi. Nuqtalarning qavariq qobig’i qavariq nuqtalar to’plamidir. Agar $M_1, M_2, \dots, M_k$ nuqtalar biror–bir qavariq nuqtalar to’plamiga tegishli bo’lsa, ularning qavariq qobig’i ham ushbu qavariq to’plamga tegishli bo’ladi.

V to’plam n o’lchovli nuqtalarning biror–bir qavariq to’plami bo’lsin.

V **qavariq to’plamning chetki nuqtasi** deb, o’zidan tashkari to’plam nuqtalarining chiziqli qavariq kombinatsiyasi shaklida yoyilmaydigan, yoki shuning o’zi, uchlari to’plamga tegishli biror – bir kesmaning o’rta nuqtasi bo’la olmaydigan nuqtaga aytiladi. Masalan, 19.4–rasmda tasvirlangan qavariq nuqtalar to’plami – uchburchakning $M_1$, $M_2$ va $M_3$ uchlari uning chetki nuqtalaridir. Optimallashga doir iqtisodiyot masalalarida masalaning rejalar to’plami bo’sh bo’lmasa, bunday to’plam qavariq to’plam bo’lib, uning chetki nuqtalari tayanch rejalar deyiladi. Masalaning tayanch rejalari muhim axamiyatga ega, chunki ularning soni chekli bo’lib, optimal echimi mavjud masalalarda tayanch rejalardan biri optimal reja bo’ladi.

## O’z – o’zini tekshirish uchun savollar

1. $R_n$ fazoda nuqta atrofi deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. n o’lchovli nuqtalarning chegaralangan to’plami deb, qanday to’plamga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Nuqtalar to’plamining ichki va chegaraviy nuqtalari deb, uning qanday nuqtalariga aytiladi? To’plamning chegarasi deb-chi?
4. To’plamning quyuqlanish nuqtasi deganda nimani tushunasiz? Quyuqlanish nuqtasi to’plamga tegishli bo’lmasligi mumkinmi?
5. Yopiq va ochiq nuqtalar to’plamlarini ta’riflang. Ularga misollar keltiring.
6. Ixcham nuqtalar to’plami deb, qanday nuqtalar to’plamiga aytiladi? Misollar keltiring.
7. $R_n$ fazoda nuqtalarning qavariq to’plami qanday to’plam?
8. Nuqtalarning qavariq to’plamiga misollar keltiring.

9. Nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
10. Qavariq nuqtalar to'plamining chetki nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. n o'lchovli nuqtalar orasidagi masofa.
2. n o'lchovli nuqta atrofi.
3. Chegaralangan nuqtalar to'plami.
4. Nuqtalar to'plamining ichki nuqtasi.
5. Nuqtalar to'plamining chegaraviy nuqtasi.
6. Nuqtalar to'plami chegarasi.
7. Nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasi.
8. Yopiq nuqtalar to'plami.
9. Ochiq nuqtalar to'plami.
10. Ixcham (kompakt) nuqtalar to'plami.
11. Qavariq nuqtalar to'plami.
12. n o'lchovli nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi.
13. Qavariq nuqtalar to'plamining chetki nuqtasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**19.1.** $R_4$ fazoda M(0; 1; 2; 3), N(-1; 2; 1; 2), P(-2; 3; 1; 3) nuqtalar orasidagi masofalarni hisoblang.

**19.2.** $R_5$ fazoda A(-1; 0; 1; -1; 2), V(2; 1; -1; 0; -2), S(0; -2; 1; 2; 0), D(1; -1; 1; -1; 1) nuqtalar belgilangan. O(0; 0; 0; 0; 0) markazning r=3 atrofiga tegishli nuqtalarni ajratib ko'rsating.

**19.3. a)** $R_1$ fazoda $M_0(1)$ nuqtaning r=2 atrofini shtrixlab ko'rsating va intervalni yozing.

**b)** $R_2$ fazoda $M_0(1; 2)$ nuqtaning r=4 atrofini shtrixlab ko'rsating va analitik ifodalang.

**v)** $R_3$ fazoda $M_0(1; 2; 3)$ nuqtaning r = 5 atrofiga tegishli nuqtalar koordinatalarini qanoatlantiruvchi analitik munosabatni yozing.

**19.4.** Koordinatalari quyida keltirilgan cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamlarining chegaralangan, ochiq yoki yopiq va ixchamligini aniqlang:

**a)** $R_1$ fazoda $1<x_1<3$; **b)** $R_2$ fazoda $1 \le x_1 \le 3$;

**v)** $R_2$ fazoda $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 0 \le x_1 \le 4. \end{cases}$ **g)** $R_2$ fazoda $\begin{cases} x_1 + 2x_2 > 6, \\ x_1 + 2x_2 < 8, \\ x_1 > 0. \end{cases}$

**d)** $R_2$ fazoda $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ **e)** $R_2$ fazoda $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

**yo)** $R_2$ fazoda $x_1^2 + 4x_2^2 < 4$; **j)** $R_2$ fazoda $4x_1 - x_2^2 \ge 0$, $x_1 \le 2$.

**19.5.** $R_4$ fazoda $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 \le 0$ yarim fazo va A(4; -1; 0; 3), V(3; -4; 5; 4), S(0; 1; 2; 0), O(0; 0; 0; 0) nuqtalar berilgan. Yarim fazoga tegishli nuqtalarni aniqlang, ulardan ichki va chegaraviy nuqtalarni ajratib ko'rsating.

**19.6.** Quyidagi nuqtalar to'plamlaridan qavariq to'plamlarni ajratib ko'rsating:

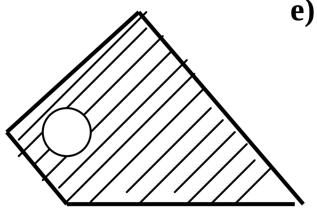
**a)** $R_2$ fazoda to'g'ri chiziq va undan tashqarida yotuvchi nuqta;

**b)** $R_2$ fazoda umumiy uchga ega ikki uchburchak;

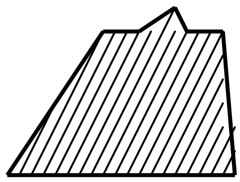
**v)** $R_2$ fazoda umumiy tomonga ega ikki to'g'ri to'rtburchak;

**g)** $R_2$ fazoda umumiy tomonga ega kvadrat va uchburchak;

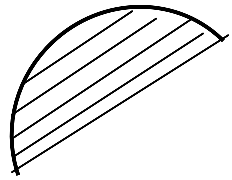
**d)**



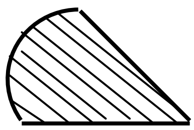
**e)**



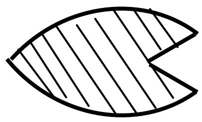
**yo)**



**j)**



**z)**



**i)** $R_3$ fazoda markazi tegishli bo'lmagan shar;

**k)** $R_3$ fazoda uchi tegishli bo'lmagan konus;

**l)** $R_3$ fazoda umumiy qirraga ega ikki kub.

**19.7.** Koordinatalar tekisligida koordinatalari quyida berilgan chiziqli shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini chizib tasvirlang. Qavariq nuqtalar to'plamlarini ajrating va ularning chetki nuqtalarini aniqlang:

**a)** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$ **v)** $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

**g)** $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 5x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ 0 \le x_2 \le 2. \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 0 \le x_1 \le 8, \\ 0 \le x_2 \le 6. \end{cases}$

**19.8. a)** A(1; -3; 4) va V(-1; 5; 2) nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasidan iborat ixtiyoriy ikki nuqtani aniqlang;

**b)** $M_1(0; 2)$, $M_2(4; 5)$ va $M_3(6; 1)$ nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasidan iborat ixtiyoriy uchta nuqtani quring.

# §20. $R_N$ FAZODA YAQINLASHISH

## 1. n o'lchovli haqiqiy fazoda nuqtalar ketma-ketligi haqida tushuncha. Sonli ketma – ketlik.

n o'lchovli haqiqiy fazoda har bir k natural songa aniq bir n o'lchovli $M_k$ nuqtani mos qo'yuvchi qonuniyat o'rnatilgan bo'lsa, $R_n$ fazoda cheksiz **n o'lchovli nuqtalarning ketma–ketligi** berilgan deyiladi. Nuqtalar ketma – ketligi $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots,$ yoki $\{M_k\}$ ko'rinishda yoziladi. $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ nuqtalar ketma– ketlik hadlari: $M_1$ – birinchi, $M_2$ – ikkinchi, $M_k$ – k - hadi deyiladi va hokazo.

Masalan, har bir k natural songa ikki o'lchovli $M_k(k; \frac{1}{k})$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsin. Bu esa, $R_2$ haqiqiy koordinatalar tekisligida $M_1(1; 1)$, $M_2(2; \frac{1}{2})$, $M_3(3; \frac{1}{3})$, …, $M_k(k; \frac{1}{k})$, … nuqtalar ketma–ketligi berilganligini anglatadi.

Bir o'lchovli nuqtalar ketma–ketligi **sonli ketma–ketlik** deb yuritiladi.Ta'rifga binoan, har bir k natural songa aniq bir $x_k$ haqiqiy sonni mos qo'yuvchi qonun berilgan bo'lsa, $R_1$ haqiqiy sonlar o'qida $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots,$ yoki $\{x_k\}$ nuqtalar (sonlar) ketma–ketligi berilgan deyiladi.

Masalan, har bir k natural songa $x_k = \frac{4k}{k+1}$ son mos qo'yilgan bo'lsa, 2, $\frac{8}{3}$, 3, …, $\frac{4k}{k+1}$, . . . sonlar ketma–ketligi berilganligini anglatadi.

Har bir hadi n o'lchovli $\{M_k\}$ nuqtalar ketma–ketligi berilgan va $N_1=M_{k1}$, $N_2=M_{k2}$, …, $N_m=M_{km}$, …, bu erda $1\le k_1 <k_2<\ldots<k_m<\ldots$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\{N_m\}$ nuqtalar to'plamiga $\{M_k\}$ **nuqtalar to'plamining qism osti to'plami** deyiladi. Shunday qilib, qism osti nuqtalar ketma–ketligi berilgan nuqtalar ketma–ketligi hadlaridan tuziladi va hadlarining oldinma–ketin kelish tartibi saqlanadi.

Masalan, 10, 20, 30, …, 10m , … sonli ketma–ketlik 5, 10, 15, …, 5k, … sonli ketma–ketlikning qism osti ketma–ketligidir.

## 2. $R_n$ fazoda nuqtalar ketma–ketligining limiti. Sonli ketma–ketlik limiti

$R_n$ fazoda biror–bir $\{M_k\}$ nuqtalar ketma–ketligi berilgan bo'lsin.

n o'lchovli $M_0$ nuqtaning har qanday ε atrofiga berilgan nuqtalar ketma–ketligining biror–bir mos tartib raqamidan boshlab, barcha hadlari tegishli bo'lsa, ya'ni har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon>0$ uchun K tartib raqamni (ε ga bog'liq ravishda) ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $k>K$ tartib raqamli hadlar $M_k \in S_\varepsilon(M_0)$ bo'lsa, $M_o$ nuqtaga $\{M_k\}$ **nuqtalar ketma–ketligining limiti** deyiladi.

$M_0$ nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma – ketligining limiti ekanligi $\lim\limits_{k\to\infty}\{M_k\} = M_0$ yoki $M_k \to M_0$ ko'rinishda yoziladi.

Xususan, a sonning har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon$ atrofi uchun $\{x_k\}$ sonli ketma–ketlikning shunday bir N tartib raqamini ($\varepsilon$ ga bog'liq ravishda) tanlash mumkin bo'lsaki, barcha $k > N$ tartib raqamli hadlari $|x_k - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa, a soni $\{x_k\}$ sonli **ketma–ketlikning limiti** deyiladi.

Masalan, $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma–ketlikning limiti 4 ga teng, ya'ni $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k+1}\right\} = 4$ ekanligini ta'rif asosida isbotlaylik**.**

Ta'rifga ko'ra, 4 soni berilgan $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma–ketlikning limiti bo'ladi, agar uning har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon$ atrofi uchun, sonli ketma–ketlikning mos N tartib raqamini ko'rsatish mumkinki, barcha $k > N$ hadlari uchun $\left|\frac{4k}{k+1} - 4\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Oxirgi tengsizlikni ayniy almashtiramiz:

$$\left|-\frac{4}{k+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{4}{k+1} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < k+1 \iff k > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Natijada, N ning butunligini e'tiborga olsak, $N = \left[\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ formula asosida har bir $\varepsilon$ uchun mos N tartib raqamini tanlash mumkin:

| $\varepsilon$ | 2 | 1 | 0,1 | 0,01 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $N(\varepsilon)$ | 1 | 3 | 39 | 399 | … |

Bu esa, aynan 4 soni $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma–ketlikning limiti ekanligini anglatadi.

n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligining limitini aniqlashda sonli ketma–ketlik limiti muhim axamiyatga ega. Quyidagi mulohazalar o'rinli:

1. $M_k$ va $M_0$ nuqtalar orasidagi $\{d(M_k; M_0)\}$ masofalar conli ketma–ketligi limiti nolga teng bo'lgandagina, $M_0$ nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma–ketligining limiti bo'ladi;

2. $\{M_k(x_{1k}; x_{2k}; \ldots; x_{nk})\}$ ketma–ketlik nuqtalari koordinatalari sonli ketma–ketliklari uchun $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{1k}\} = x_{10}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{2k}\} = x_{20}$, …, $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{nk}\} = x_{n0}$ munosabatlar o'rinli bo'lgandagina, $M_o(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ nuqta uning limiti bo'ladi.

Masalan, ikki o'lchovli $M_0(0; 4)$ nuqta $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}; \frac{4k}{k+1}\right)\right\}$ nuqtalar ketma–ketligining limitidir, chunki $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}\right\} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k+1}\right\} = 4$ munosabatlar o'rinli.

Chekli limitga ega n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligi **yaqinlashuvchi ketma–ketlik** deyiladi. Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma–ketligi uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Yaqinlashuvchi ketma – ketlik yagona limitga ega ;

2) Har qanday yaqinlashuvchi ketma–ketlik chegaralangandir. Har bir chegaralangan ketma–ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma–ketlik ajratish mumkin;

3) n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligi $M_0$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning har bir qism ketma–ketligi ham $M_0$ nuqtaga yaqinlashadi;

4) $M_0$ nuqta biror–bir V nuqtalar to'plamining quyuqlanish nuqtasi bo'lsa, V to'plam nuqtalaridan $M_0$ nuqtaga yaqinlashuvchi ketma–ketlik ajratish mumkin;

5) Yopiq V to'plamga tegishli nuqtalar ketma–ketligi $M_0$ nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $M_0 \in V$.

### 3. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma–ketliklar. Yaqinlashuvchi sonli ketma – ketliklar limitlarining arifmetik xossalari.

Oldindan tayinlanadigan har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $\{\alpha_k\}$ sonli ketma–ketlikning shunday bir N ($\varepsilon$ ga bog'liq) tartib raqamini ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $k > N$ tartib raqamli hadlari uchun $|\alpha_k| < 0$ tengsizlik qanoatlantirilsa, $\{\alpha_k\}$ sonli ketma–ketlikka cheksiz kichik sonli ketma–ketlik deyiladi. Ta'rifga ko'ra, $\lim\limits_{k\to\infty}\{a_k\} = 0.$

Limiti nolga teng har qanday sonli ketma–ketlikka **cheksiz kichik sonli ketma–ketlik** deyiladi. Masalan, $\left\{\frac{1}{k}\right\}$, $\left\{\frac{4k}{k^2+1}\right\}$ sonli ketma–ketliklar cheksiz kichik sonli ketma–ketliklardir, chunki

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}\right\} = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k^2+1}\right\} = 0$$

Ketma–ketlik limitini aniqlashda cheksiz kichik sonli ketma–ketlikdan foydalaniladi. $\{x_k\}$ sonli ketma–ketlik uchun $\{x_k\} = a + \{\alpha_k\}$ tenglik o'rinli bo'lgandagina, a soni uning limiti bo'ladi.

Masalan, $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{3k^2+10^6}{5k^2}\right\} = \lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{3}{5} + \frac{10^6}{5k^2}\right\} = \frac{3}{5}.$

Cheksiz kichik sonli ketma–ketliklar xossalarini sanab o'tish maqsadga muvofiq:

1) $\{\alpha_k\}$ va $\{\beta_k\}$ cheksiz kichik sonli ketma–ketliklar bo'lsa, ularning yig'indisi yoki ayirmasidan tuzilgan $\{\alpha_k \pm \beta_k\}$ ketma ketliklar ham cheksiz kichikdir;

2) $\{\alpha_k\}$ cheksiz kichik va $\{x_k\}$ chegaralangan sonli ketma–ketliklar bo'lsa, ularning ko'paytmasidan tuzilgan $\{x_k\,\alpha_k\}$ ketma–ketlik cheksiz kichik sonli ketma–ketlikdir;

3) Chekli sondagi cheksiz kichik sonli ketma–ketliklar ko'paytmalari ham cheksiz kichik sonli ketma–ketlikdir.

Oldindan tayinlanadigan har qanday $A > 0$ son uchun $\{\gamma_k\}$ sonli ketma–ketlikning shunday bir N (A ga bog'liq) tartib raqamini tanlash mumkin bo'lsaki, barcha $k > N$ tartib raqamli hadlari uchun $|\gamma_k| > A$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{\gamma_k\}$ sonli ketma–ketlikka **cheksiz katta sonli ketma–ketlik** deyiladi.

$\{\gamma_k\}$ ketma–ketlikning cheksiz katta sonli ketma–ketlik ekanligi $\lim\limits_{k\to\infty}\{\gamma_k\} = \infty$ (yoki $-\infty$)

ko'rinishda yoziladi. Masalan, $\left\{\frac{k^2}{10k+1}\right\}$, $\left\{\frac{-k^3+2}{10^8k^2+10^4k+1}\right\}$ - cheksiz katta sonli ketma–ketliklarga misol bo'la oladi, chunki ularning limiti, mos ravishda, $\infty$ va $-\infty$ ga teng.

Cheksiz katta sonli ketma–ketliklar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1) Har qanday cheksiz katta sonli ketma–ketlik chegaralanmagandir. Har bir **chegaralanmagan ketma–ketlik** cheksiz katta bo'lavermaydi;

2) $\left\{\frac{1}{\gamma_k}\right\}$ – ketma–ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik bo'lgandagina, $\{\gamma_k\}$ ($\gamma_k \neq 0$) ketma–ketlik cheksiz katta sonli ketma–ketlik bo'ladi.

Yaqinlashuvchi sonli ketma–ketliklar limitlari quyidagi xossalarga ega:

1) $\{x_k\}$ ketma–ketlik o'zgarmas, ya'ni $\{x_k\} = c$ bo'lsa, unda $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\} = c$;

2) $\{x_k\}$ va $\{y_k\}$ ketma–ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, m - o'zgarmas son bo'lsin. U holda:

a) $\{x_k+y_k\}$ , b) $\{x_k\, y_k\}$, v) $\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}$, g) $\{m\, x_k\}$, d) $\{x_k^m\}$

ketma–ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k+y_k\} = \lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\} + \lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k y_k\} = \lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

v) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}}$;

g) $\lim\limits_{k\to\infty}\{mx_k\} = m\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}$ ;

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k^m\} = \left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\right)^m$ tengliklar o'rinli.

Sonli ketma–ketliklar limitlarini aniqlashda yuqorida keltirilgan xossalardan foydalaniladi.

## 4. Monoton sonli ketma–ketliklar. e soni.

Agar $\{x_k\}$ sonli ketma–ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi, o'zidan oldingi hadidan qat'iy katta (kichik emas), ya'ni $x_{k+1} > x_k$ ($x_{k+1} \geq x_k$) bo'lsa, $\{x_k\}$ **o'suvchi (kamayuvchimas) ketma–ketlik** deyiladi. Agarda $\{x_k\}$ ketma–ketlikning ixtiyoriy oldinma–ketin keluvchi hadlari uchun $x_{k+1} < x_k$ ($x_{k+1} \leq x_k$) munosabatlar o'rinli, ya'ni uning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi, o'zidan oldingi hadidan qat'iy kichik (katta emas) bo'lsa, $\{x_k\}$ **kamayuvchi (o'suvchimas) ketma–ketlik** deb ataladi.

O'suvchi yoki kamayuvchi sonli ketma–ketliklar **monoton ketma–ketliklar** deb yuritiladi. Masalan, $\left\{\frac{k+1}{k}\right\}$ sonli ketma–ketlik uchun $2 < \frac{3}{2} < \frac{4}{3} < \ldots < \frac{k+1}{k} < \frac{k+2}{k+1} < \ldots$

munosabatlar o'rinli bo'lganidan, monoton kamayuvchi ketma – ketlikdir.

Har bir monoton va chegaralangan sonli ketma – ketlik - yaqinlashuvchi. Ushbu mulohaza **sonli ketma–ketlik yaqinlashishining etarli sharti** bo'lib hisoblanadi.

Masalan, $\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ sonli ketma–ketlik monoton (o'suvchi) va chegaralanganligi uchun yaqinlashuvchidir. Ketma–ketlik limiti irratsional son e ga teng: $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}=e \quad (e=2{,}718...).$ e soni uzluksiz to'lovli murakkab foiz masalalarida, kapital jamg'armalarining samaradorligini baholash masalalarida, va hokazo, qo'llaniladi.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. n o'lchovli haqiqiy fazoda nuqtalar ketma–ketligi deganda nimani tushunasiz?
2. Sonli ketma–ketlik deb, qanday nuqtalar ketma–ketligiga aytiladi? Sonli ketma–ketlikning qo'shimcha qanday ta'riflarini bilasiz?
3. Nuqtalar ketma–ketligining qism osti ketma–ketligi deb, nimaga aytiladi?
4. n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligining limiti deb, qanday nuqtaga aytiladi?
5. Sonli ketma–ketlik limitini ta'riflang?
6. Nima uchun n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligining limitini aniqlashda sonli ketma – ketlik limiti muhim axamiyatga ega?
7. Yaqinlashuvchi ketma–ketliklarning qanday xossalarini bilasiz?
8. Cheksiz kichik sonli ketma–ketlik deb, qanday sonli ketma–ketlikka aytiladi? Misollar keltiring.
9. Cheksiz katta sonli ketma–ketlik deb-chi? Misollar keltiring.
10. Yaqinlashuvchi sonli ketma–ketliklar arifmetik xossalarini sanab o'ting?
11. Monoton sonli ketma–ketlik deb, qanday sonli ketma–ketlikka aytiladi?
12. Sonli ketma–ketlik yaqinlashuvchanlik etarli sharti nimadan iborat?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. n o'lchovli nuqtalar ketma–ketligi.
2. Sonli ketma–ketlik.
3. Nuqtalar ketma–ketligining qism osti ketma–ketligi.
4. Nuqtalar ketma–ketligining limiti.
5. Sonli ketma–ketlik limiti.
6. Yaqinlashuvchi ketma–ketlik.
7. Cheksiz kichik sonli ketma–ketlik.
8. Cheksiz katta sonli ketma–ketlik.
9. Monoton sonli ketma–ketlik.
10. Monoton va chegaralangan sonli ketma–ketlik.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**20.1.** Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan sonli ketma–ketliklarning dastlabki to'rtta hadlarini yozing:

**a)** $x_n = 16^{-\frac{1}{n}}$; **b)** $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} + \cos\frac{\pi n}{2}$.

**20.2.** Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan nuqtalar ketma–ketliklarining dastlabki to'rtta hadlarini yozing:

**a)** $\left\{M_k\left(\frac{k+1}{k}; \frac{1}{2^k}\right)\right\}$; **b)** $\left\{M_k\left(\sqrt{k^2-2k+1};\ \sin\frac{\pi k}{4};\ (-1)^k k^2\right)\right\}$.

**20.3.** Sonli ketma – ketlik limiti ta'rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$ ekanligini isbotlang. Har qanday ε>0 son uchun a nuqtaning ε atrofiga tegishli ketma–ketlikning dastlabki hadi tartib raqami N ni toping va quyidagi jadvalni to'ldiring:

| ε | 1 | 0.1 | 0,01 | 0,001 | . . . |
|---|---|---|---|---|---|
| N | | | | | |

**a)** $x_n = \frac{6n+1}{3-2n}$, a=-3; **b)** $x_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$, a = 2.

**20.4.** Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan quyidagi sonli ketma–ketliklardan cheksiz kichik $\{\alpha_n\}$ va cheksiz katta $\{\gamma_n\}$ ketma–ketliklarni ajratib ko'rsating:

**a)** $x_n = \frac{10^9 n}{n^2+1}$; **b)** $x_n = \log_2(n+1)$;

**v)** $x_n = \sin\frac{n!}{n}$; **g)** $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

**d)** $x_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$; **e)** $x_n = \sqrt{2n+7} - \sqrt{2n-1}$.

**20.5.** 0,9; 0,99; 0,999; … sonli ketma – ketlik limiti $\lim\limits_{n\to\infty} 0,\underbrace{999...9}_{n}$ ni hisoblash yo'li bilan, 0,(9)=1 tenglik to'g'riligini isbotlang.

**20.6.** Limitlarni hisoblang:

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(5n)^2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n-8}{4n+3}}$;

**v)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n\sqrt{n^2+n+1}}{3n-2}$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3-(n+1)^3}{(n-1)^2+(n+1)^2}$;

**d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3-3n^2+7n-3}}{4n+3}$;

**e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2-1}+n)^2}{\sqrt[3]{27n^6+n^3+1}}$;

**yo)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!+n!}$;

**j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$;

**z)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$;

**i)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^4-7}}{2+4+6+\ldots+2n}$;

**y)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{2n-1}$;

**k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$;

**l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right]$;

**m)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^n-1}$;

**n)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{3^{\frac{1}{n}}+1}$;

**o)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$;

**p)** $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{M_k\left(\dfrac{k}{k+1};\sqrt{\dfrac{9k-3}{16k+9}}\right)\right\}$.

# §21. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA

## 1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiya haqida tushuncha. Funktsiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami.

n o'lchovli haqiqiy fazoda V={M($x_1$; $x_2$; …; $x_n$)} є $R_n$ nuqtalar to'plami berilgan bo'lsin.

V to'plamga tegishli har bir M($x_1$; $x_2$; …; $x_n$) nuqtaga aniq biror–bir u haqiqiy sonni mos qo'yuvchi $f$ qonunga $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ o'zgaruvchilarning V nuqtalar to'plamida berilgan funktsiyasi deyiladi. **n ta o'zgaruvchilarning funktsiyasi** u= $f$(M) yoki u=$f$($x_1$; $x_2$; …; $x_n$) ko'rinishda yoziladi. $f$(M) haqiqiy son u funktsiyaning M nuqtada erishadigan qiymatini anglatadi.

Xususan, agar V є $R_1$ bo'lib, V to'plam $R_1$={x} haqiqiy sonlar to'plamining qism osti to'plamidan iborat bo'lsa, V to'plamda **bir o'zgaruvchili u= *f* (x) funktsiya** berilgan deyiladi.

Misollar: 1) $f$(x)=$ln$x – V= {x є $R_1$ | x>0} to'plamda berilgan bir x o'zgaruvchili funktsiya. Xususan, $f$(e) = $ln$e = 1.

2) $f(M)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}-V=R_2 \setminus O(0;0)$ to'plamda berilgan ikki $x_1$ va $x_2$ o'zgaruvchili funktsiya. M(- 1; 2) nuqtada $f$ (-1; 2)=0,2.

3) $f(M)=\sqrt{7-x_1^2-x_2^2-x_3^2}-V=\{M(x_1;x_2;x_3)\in R_3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 7\}$

to'plamda berilgan uch $x_1$, $x_2$ va $x_3$ o'zgaruvchili funktsiya. M(1; -1; 1) nuqtada $f$(1; -1; 1)=2.

u=$f$(M)= $f$($x_1$; $x_2$; …; $x_n$) funktsiya berilgan $R_n$ fazoga tegishli to'plamga uning **aniqlanish sohasi** deyiladi va D($f$) yoki D(u) yozuv bilan ifodalanadi.

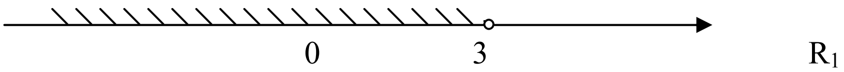
u=$f$(M) funktsiya o'z aniqlanish sohasi D($f$) ning har bir nuqtasida qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plamiga esa uning **qiymatlari to'plami** yoki o'zgarish sohasi deyiladi. Funktsiya qiymatlar to'plami $R_1$ haqiqiy sonlar to'plamining qism osti to'plami bo'lib, E($f$) yoki E(u) belgilar bilan yoziladi.

Misollar: Quyida berilgan funktsiyalarning aniqlanish sohalarini toping va tegishli fazoda tasvirlang. Funktsiyalarning qiymatlar to'plamini aniqlang:

1) u = $log_2$(3–x), 2) $y=\sqrt{4x_1-x_2^2}$ ,

3) u = arccos $x_1$ + arccos $x_2$ + arccos $x_3$ .

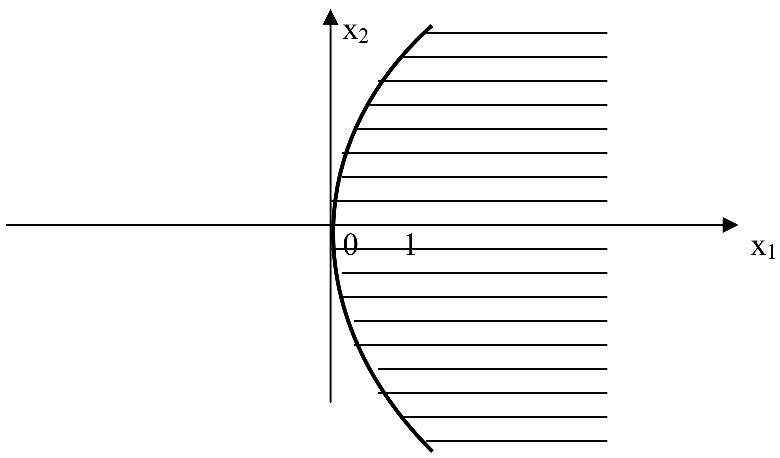
1) Bir o'zgaruvchili u=$log_2$(3-x) funktsiya aniqlanish sohasi D(u): 3–x > 0 tengsizlik echimidan iborat. Shunday qilib, D(u)=(- ∞; 3) є $R_1$. Funktsiya aniqlanish sohasi sonlar o'qida (-∞; 3) ochiq nur ko'rinishida tasvirlanadi:




Funktsiya qiymatlari to'plami esa sonlar o'qidan iborat, ya'ni E(u)=$R_1$.

2) Funktsiya ikki o'zgaruvchili bo'lib, uning aniqlanish sohasi

D(u)={M($x_1$; $x_2$) є $R_2$ | $x_1 \ge \dfrac{x_2^2}{4}$ }. Funktsiya aniqlanish sohasi haqiqiy koordinatalar tekisligi $R_2$ da quyidagicha tasvirlanadi:

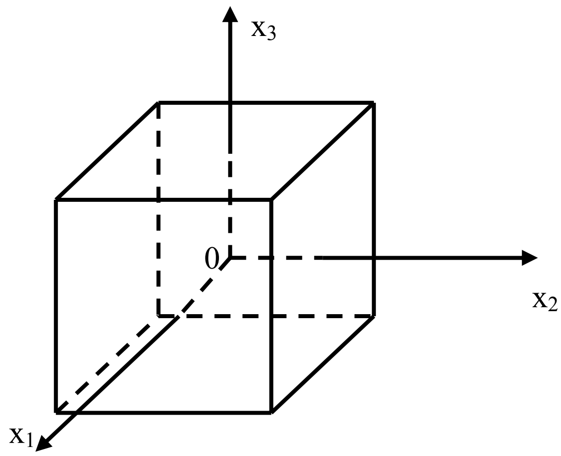



Funktsiya qiymatlari to'plami E(u) = [0; ∞).

3) Berilgan uch o'zgaruvchili funktsiya aniqlanish sohasi

D(u)={M($x_1$; $x_2$; $x_3$) ϵ $R_3$ | $-1\le x_1\le 1$, $-1\le x_2 \le 1$, $-1 \le x_3 \le 1$}.

Funktsiya aniqlanish sohasi $R_3$ fazoda qirrasi 2 ga teng, simmetriya markazi koordinatalar boshida, yoqlari esa koordinatalar tekisliklariga parallel bo'lgan kubdan iborat:




Funktsiya qiymatlari to'plami E(u) =[0; 3π].

## 2. Bir o'zgaruvchili funktsiya umumiy xossalari va grafigi. Teskari funktsiya

$V \subseteq R_1$ nuqtalar to'plamida aniqlangan bir o'zgaruvchili u=$f$(x) **funktsiyaning grafigi** deb, mumkin bo'lgan barcha (x; $f$(x)), x ϵ V juftliklarning x0u to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligidagi aksiga aytiladi.

$R_1$ fazoda, x=0 nuqtaga nisbatan simmetrik, nuqtalarning V qism to'plami va unda aniqlangan u=$f$(x) funktsiya berilgan bo'lsin.

Agar har qanday ± x ϵ V lar uchun $f$(-x) = $f$(x) tenglik o'rinli bo'lsa, bir o'zgaruvchili u=$f$(x) funktsiya V to'plamda **juft funktsiya** deyiladi. Juft funktsiya grafigi 0u ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir.

Agar har qanday ± x ϵ V lar uchun $f$(-x)=-$f$(x) munosabat o'rinli bo'lsa, u=$f$(x) V to'plamda **toq funktsiya** deyiladi. Toq funktsiya grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Masalan, juft natural darajali $u=x^{2n}$ ($n \in N$) funktsiya juft funktsiyaga misol bo'lsa, toq natural darajali $u=x^{2n-1}$ ($n \in N$) toq funktsiyaga misoldir.

$u=f(x)$ funktsiya uchun shunday bir musbat $t$ son mavjud bo'lsaki, funktsiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday $x$ va $x+t$ nuqtalari uchun $f(x+t)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $u=f(x)$ funktsiya **davriy funktsiya** deyiladi. t soni esa **funktsiya davri** deb yuritiladi. Amalda funktsiya davrlari ichidan eng kichigi T ni topish masalasi qo'yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralisidan iborat bo'ladi.

Masalan, $u=5\sin(0{,}25\pi x)$ funktsiyaning eng kichik musbat davri $T=\dfrac{2\pi}{0{,}25\pi}=8$.

$u=f(x)$ funktsiya $V \subseteq R_1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning biror–bir $V_1$ qism osti to'plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki $x_1$ va $x_2$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ munosabatdan $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $u=f(x)$ funktsiya $V_1$ **to'plamda o'suvchi (kamayuvchi emas)** deyiladi.

Agarda funktsiya aniqlanish sohasiga tegishli $V_1$ to'plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki $x_1$ va $x_2$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, $u=f(x)$ funktsiya $V_1$ **to'plamda kamayuvchi (o'suvchi emas)** deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funktsiyalarga qat'iy **monoton funktsiyalar** deyiladi.

Masalan, $u=e^x$ aniqlanish sohasi $R_1$ da qat'iy monoton o'suvchi funktsiyaga misol bo'lsa, x haqiqiy sonning butun qismi $u=[x]$ esa kamayuvchimas funktsiyaga misol bo'la oladi.

$u=f(x)$ funktsiya $D(u) \subseteq R_1$ sohada aniqlangan bo'lib, $E(u)$ uning qiymatlar to'plami bo'lsin. Ushbu funktsiya uchun har qanday $x_1, x_2 \in D(u)$ lar qaralmasin, $x_1 \neq x_2$ shart qanoatlantirilganda, $f(x_1) \neq f(x_2)$ munosabat bajarilsin. U holda, har bir $u \in E(u)$ songa $f(x)=u$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x \in D(u)$ sonni mos qo'yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(u)$ to'plamda berilgan **$u=f(x)$ funktsiyaga teskari $x=g(u)$ funktsiya**ni aniqlash mumkin.

Berilgan $u=f(x)$ funktsiyaning qiymatlari to'plami $E(u)$ teskari funktsiya uchun aniqlanish sohasi bo'lsa, $u=f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(u)$ teskari funktsiya uchun qiymatlar sohasi rolini o'taydi.

Biror–bir $[a; b]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $u=f(x)$ funktsiya, o'zining $[f(a); f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton va uzluksiz $x=g(u)$ teskari funktsiyasiga ega.

Masalan, $u=\sin x$ funktsiya $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o'suvchi va uzluksiz bo'lganidan, $[-1; 1]$ kesmada aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz $x=\arcsin u$ teskari funktsiyasiga ega.

O'zaro teskari $f(x)$ va $g(x)$ funktsiya grafiklari birinchi chorak simmetriya o'qi $u=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrikdir.

## 3. Chegaralangan funktsiya. Qavariq va botiq funktsiyalar haqida tushuncha

$V_1 \subseteq D(u)$ nuqtalar to'plamida berilgan $u=f(x)$ funktsiyaning $V_1$ da erishadigan qiymatlari to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, **funktsiya $V_1$ da yuqoridan (quyidan) chegaralangan** deyiladi.

$u=f(x)$ funktsiyaning yuqoridan (quyidan) chegaralanganligi, shunday bir K son mavjudligini anglatadiki, barcha $M \in V_1$ nuqtalar uchun $f(M) \leq K$ ($f(M) \geq K$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$V_1 \subseteq D(u)$ nuqtalar to'plamida ham quyidan, va ham yuqoridan chegaralangan funktsiyaga, $V_1$ **to'plamda chegaralangan funktsiya** deb ataladi. Ushbu holda, agar $V_1=D(u)$ bo'lsa, $u=f(M)$ funktsiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to'plami chegaralangan sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Agar $u=f(M)$ funktsiya $V_1$ to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, $V_1$ to'plamga tegishli $\{M_k\}$ nuqtalar ketma–ketligi mavjudki, $\lim\limits_{k\to\infty}\{f(M_k)\}=+\infty$ ($\lim\limits_{k\to\infty}\{f(M_k)\}=-\infty$) munosabat o'rinlidir.

Misollar:

1) Bir o'zgaruvchili $u=x^2$ funktsiya aniqlanish sohasi $R_1$ da quyidan chegaralangan funktsiyadir, chunki $E(u)=[0; \infty)$;

2) Ikki o'zgaruvchili $y=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ funktsiya o'z aniqlanish sohasi $D(u) = \{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ to'plamda chegaralangandir, chunki $E(u)=[0; 1]$.

$u=f(M)$ funktsiya qavariq $V \subseteq R_n$ nuqtalar to'plamida aniqlangan bo'lsin.

V qavariq to'plamga tegishli har qanday ikki $M_1(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ va $M_2(u_1; u_2; \ldots; u_n)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0 \leq \alpha \leq 1$ son uchun $f(P) \leq \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2)$ ($f(P) \geq \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2)$) tengsizliklar o'rinli bo'lsa, bu erda $R(\alpha x_1 +(1-\alpha)u_1; \alpha x_2 +(1-\alpha)u_2; \ldots; \alpha x_n +(1-\alpha)u_n)$, u holda, $u=f(M)$ funktsiya **V to'plamda qavariq (botiq) funktsiya** deyiladi.

Masalan, $u=x^2$ funktsiya $R_1$ da qavariq funktsiyaga misol bo'lsa, $u= -x^2$ funktsiya esa $R_1$ da botiq funktsiyaga misol bo'ladi. n o'zgaruvchili chiziqli $u=a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots +a_nx_n$ funktsiya $R_n$ fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funktsiyadir.

Qavariq funktsiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. $-f(M)$ funktsiya V to'plamda botiq bo'lgandagina, $f(M)$ funktsiya V da qavariq funktsiya bo'ladi.

2. $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funktsiyalar V to'plamda qavariq bo'lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy $k_1$ va $k_2$ koeffitsientli chiziqli $k_1f_1(M) + k_2f_2(M)$ kombinatsiyasi V to'plamda qavariq bo'ladi.

3. $f(M)$ funktsiya V to'plamda qavariq bo'lib, $\{M \in V \mid f(M) \leq b\}$ to'plam bo'sh bo'lmasa, bu erda b ixtiyoriy son, u holda to'plamning o'zi ham qavariq to'plamdir.

Botiq funktsiyalar ham yuqoridagi xossalarga o'xshash xossalarga ega.

## O’z – o’zini tekshirish uchun savollar

1. $n$ o’zgaruvchili funktsiyani ta’riflang?
2. Bir o’zgaruvchili funktsiya deb nimaga aytiladi?
3. Bir, ikki va uch o’zgaruvchili funktsiyalarga misollar keltiring.
4. Funktsiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funktsiyaning qiymatlari to’plami deb-chi?
6. Bir o’zgaruvchili funktsiya grafigi deganda nimani tushunasiz?
7. Bir o’zgaruvchili juft-toq funktsiyalarni ta’riflang va ularga misollar keltiring.
8. Juft va toq funktsiya grafiklari qanday tabiatga ega?
9. Davriy funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi? Misollar keltiring.
10. Davriy funktsiya asosiy davri deganda nimani tushunasiz?
11. To’plamda o’suvchi va kamayuvchi funktsiyalarni ta’riflang? O’suvchi va kamayuvchi funktsiyalarga misollar keltiring.
12. Monoton funktsiya deganda qanday funktsiyani tushunasiz?
13. Berilgan funktsiya teskari funktsiyasi deb nimaga aytiladi?
14. Yagona teskari funktsiya mavjudligi shartlari nimalardan iborat?
15. O’zaro teskari funktsiyalar grafiklari qanday tabiatga ega?
16. To’plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan funktsiya deb, qanday funktsiyaga aytiladi? Misollar keltiring.
17. Chegaralangan funktsiya deb-chi? Misollar keltiring.
18. Qavariq to’plamda berilgan qavariq (botiq) funktsiyani ta’riflang? Misollar keltiring.
19. Qavariq funktsiyaning qanday xossalarini bilasiz?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. $n$ o’zgaruvchili funktsiya.
2. Bir o’zgaruvchili funktsiya.
3. Funktsiya aniqlanish sohasi.
4. Funktsiya qiymatlar to’plami.
5. Bir o’zgaruvchili funktsiya grafigi.
6. Juft funktsiya.
7. Toq funktsiya.
8. Davriy funktsiya.
9. O’suvchi funktsiya.
10. Kamayuvchi funktsiya.
11. Monoton funktsiya.
12. Teskari funktsiya.
13. Chegaralangan funktsiya.
14. Qavariq funktsiya.
15. Botiq funktsiya.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**21.1.** Agar $f(x)=(3x+1)\left(\frac{2}{x-1}-5\right)$ bo'lsa, **a)** $f(0)$; **b)** $f(2)$; **v)** $f(x+1)$;

**g)** $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$; **d)** $f(x)+1$, **e)** $\frac{1}{f(x)}$ larni toping?

**21.2.** Quyidagi bir o'zgaruvchili funktsiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

**a)** $y=\frac{2x-3}{x(x+1)}$; **b)** $y=\sqrt[4]{\frac{2x+3}{4-x}}$;

**v)** $y=\lg(3x-x^2)-5\sqrt{x-2}$; **g)** $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{5x+x^3}}$;

**d)** $y=\frac{1}{x-2}+\sqrt{4x-x^3}$; **e)** $y=\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x^2-x)(x-2)}$;

**j)** $y=\log_2(1-\sqrt{4-x^2})$; **z)** $y=\sqrt{\log_{0,2}(x^2-5x+7)}$;

**i)** $y=\arcsin\frac{1-2x}{3}$; **y)** y=arcos $e^x$;

**k)** $y=\sqrt{2\sin x+1}$; **l)** $y=\sqrt{\cos^2 x-\cos x}$.

**21.3.** Quyidagi ikki o'zgaruvchili funktsiyalar aniqlanish sohalarini yozing va koordinatalar tekisligida tasvirlang:

**a)** $f(x_1;x_2)=\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}$; **b)** $f(x_1;x_2)=ln(x_1^2+x_2^2-9)$;

**v)** $f(x_1;x_2)=\lg\left(1-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{9}\right)$; **g)** $f(x_1;x_2)=\sqrt{x_2^2-8x_1}$;

**d)** $f(x_1;x_2)=\ln(x_1-x_2)$.

**21.4.** Bir o'zgaruvchili funktsiyalarning qiymatlar to'plamini toping:

**a)** $y=\sqrt{3-x^2}$; **b)** $y=\frac{5}{x-2}$; **v)** $y=-2x^2+3x-1$;

**g)** $y=\sqrt{2x-x^2}$; **d)** $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; **e)** $u=log_3(x^2-2x+2)$;

**yo)** $y=\frac{|x|}{x}+1$; **j)** $u=|x+2|+|x-1|$; **z)** $y=lg\sin x$;

**i)** $y=\frac{x^2-2x+5}{x^2-2x+2}$; **k)** $u=3\sin2x-4\cos2x$;

**l)** $y=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;  **m)** $y=\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$;

**n)** $y=\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$;  **o)** $y=\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

**21.5.** Koordinatalar o'qlarini parallel ko'chirish usuli va almashtirishlar bajarib, funktsiya grafiklarini chizing. Grafiklardan foydalanib, o'sish va kamayish intervallarini yozing, chegaralangan funktsiyalarni ajratib ko'rsating:

**a)** $y=\frac{1}{3}x-2$;  **b)** y = -2x –3;  **v)** $y = -(x-2)^2+1$;

**g)** $y=\frac{2x-3}{x+1}$;  **d)** $y=\sqrt{x+4}$;  **e)** $y=1+\sqrt{x^2}$;

**yo)** u = |x| + |x – 2|;  **j)** u = -| |x| - 1|;  **z)** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

**i)** y =|$log_{0,5}$ (-x) |;  **k)** y = 1 - cos x;  **l)** u = sin 2x;

**m)** $y=2\cos\frac{x}{2}$;  **n)** $y=-2\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)$;  **o)** y = cos x – sin x.

**21.6.** Quyida berilgan funktsiyalardan juft–toqlarini ajrating:

**a)** $u=x^4+2x^2$;  **b)** $y=\sqrt[3]{x-x^3}$;  **v)** $y=\frac{3|x|}{\mathbf{x}^2+1}$;

**g)** $y = |x+2| - 3x^2$;  **d)** u = | x + 1 | + | x – 1|;  **e)** $u = e^x$;

**yo)** $u = x\,|x| + \arcsin(x^3)$;  **j)** $y=\frac{2^x+2^{-x}}{\mathbf{5}}$;

**z)** $y=\frac{2^x-2^{-x}}{\mathbf{5}}$;  **i)** $y=\frac{x}{\mathbf{3^x}-1}$;

**y)** $y=\frac{5^x-1}{5^x+1}$;  **k)** $y=\sqrt{9-x+x^2}+\sqrt{9+x+x^2}$;

**l)** $y=x\cdot\frac{4^x-1}{4^x+1}$;  **m)** $y=\frac{\lg(1-x)}{1+x}$;

**n)** $u = 2\sin(x+\frac{\pi}{4})$;  **o)** $u = (\sin x+1)^2$;

**n)** $y=\frac{x^2|\mathbf{x}|}{\cos 2x}$;  **r)** $y=\frac{\cos x}{x}$.

**21.7.** Grafiklarni ko'shish usulini qo'llab, funktsiya grafiklarini chizing:

**a)** u=x + sin x;  **b)** u = x- sos x;  **v)** $u = \cos x - 2^x$.

**21.8.** Quyidagi funktsiyalarning asosiy davrlarini toping:

**a)** $y = -2\sin(3x)$; **b)** $y = 5\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right)$;

**v)** $y = \frac{tg(2x-1)}{3}$; **g)** $y = 0{,}6\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right)$;

**d)** $u = |\sin x|$; **e)** $y = 3\sin(2x) - 2\cos(3x)$;

**yo)** $y = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{3}$; **j)** $y = \sin\frac{3x}{4}\cos\frac{3x}{4}$;

**z)** $u = \sin^2(4x) + 1$; **i)** $y = \cos^2\frac{x}{3} + \sin^2\frac{x}{4}$.

**21.9.** Quyidagi funktsiyalarning teskari funktsiyalarini quring:

**a)** $y = 2 - 5x$; **b)** $y = \frac{2}{x+1} - 3$;

**v)** $y = \frac{x+2}{3-2x}$; **g)** $y = \frac{1}{2-x} + 4$; **d)** $u = 2^{x-1}$;

**e)** $u = 2 + log(x + 2)$; **yo)** $y = \frac{1}{2}\sin(5x)$.

**21.10.** Quyidagi funktsiyalardan qavariq va botiqlarini ajrating:

**a)** $u = 2x^2$ $(x \in R)$; **b)** $y = -\frac{x^2}{2}$ $(x \in R)$;

**v)** $u = sos\ x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$; **g)** $u = \sin x$ $(x \in [-\pi; 0]$.

# §22. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA LIMITI.

## 1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiya limiti haqida tushuncha. Ajoyib limitlar. Yaqinlashuvchi funktsiya xossalari.

$u=f(M)=f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ funktsiya $V \subseteq R_n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ nuqta V to'plamning quyuqlanish nuqtasi bo'lsin. Funktsiya limitining bir–biriga o'zaro teng kuchli Geyne va Koshi tillaridagi ta'riflari mavjud.

Ko'p o'zgaruvchili funktsiya limiti Geyne yoki nuqtalar ketma–ketligi tilida quyidagicha ta'riflanadi: Har bir hadi V to'plamga tegishli va $M_0$ quyuqlanish nuqtasidan farqli har qanday $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ nuqtalar ketma–ketligi $M_0$ nuqtaga intilganda, mos funktsiya qiymatlari $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_k), \dots$ sonli ketma–ketligi b songa intilsa, u holda b soni ***f*** **(M) funktsiyaning $M \to M_0$ dagi limiti** deyiladi va

$$b = \lim_{M \to M_0} f(M) \quad \text{yoki} \quad b = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(M)$$

ko'rinishda yoziladi.

Xususan, bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funktsiya uchun: Har qanday $x_0$ songa intiluvchi argument qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sonli ketma – ketligi uchun, bu erda $x_k \in V$, $x_k \neq x_0$ (k=1, 2, 3, …), funktsiya qiymatlari $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_k)$, … sonli ketma – ketligi b songa intilsa, b soni ***f*** **(x) funktsiyaning $x \to x_0$ dagi limiti** deyiladi va $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(M)$ ko'rinishda yoziladi.

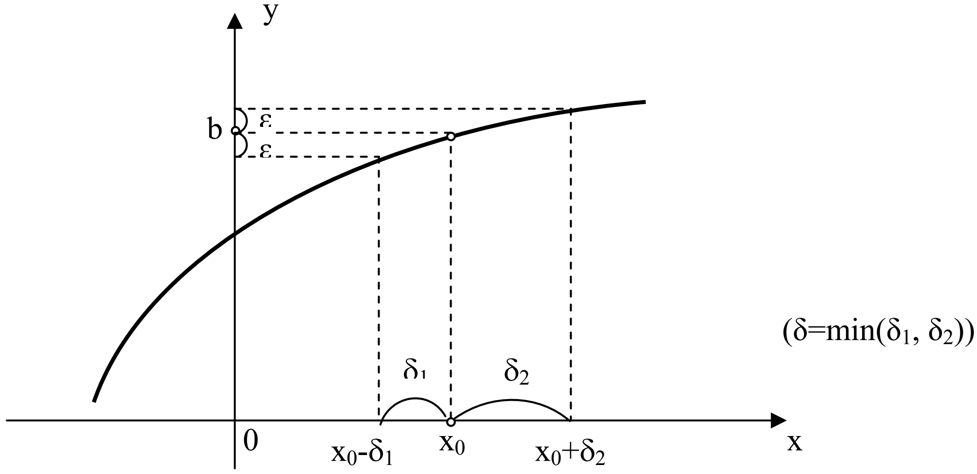
**Funktsiya limiti Koshi yoki ε – δ tilida quyidagicha ta'riflanadi:**

Har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ son uchun $M_0$ nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ ni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$, $M \neq M_0$ nuqtalar uchun $|f(M) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b soni $f(M)$ funktsiyaning $M \to M_0$ dagi limiti deyiladi.

Xususiy holda, bir o'zgaruvchili $u=f(x)$ funktsiya uchun: Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday bir $\delta > 0$ son tanlash mumkin bo'lsaki, V to'plamga tegishli va $0 < |x - x_0| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi har bir x uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funktsiyaning $x \to x_0$ dagi limiti deyiladi (22.1–rasm).

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan birini qo'llab, masalan,

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, 2) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -1 \\ x_2 \to 2}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = 0{,}2$ yoki 3) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ mavjud emasligini isbotlash mumkin.




22.1–rasm.

Quyida sanab o'tiladigan va **ajoyib limitlar** nomini olgan limitlar ham ta'riflar asosida isbotlanadi.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (1 – ajoyib limit asosiy shakli).

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. (2 – ajoyib limit asosiy shakli).

6. $\lim\limits_{x\to 0}\log_a\dfrac{1+x}{x}=\log_a e$. 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=1$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

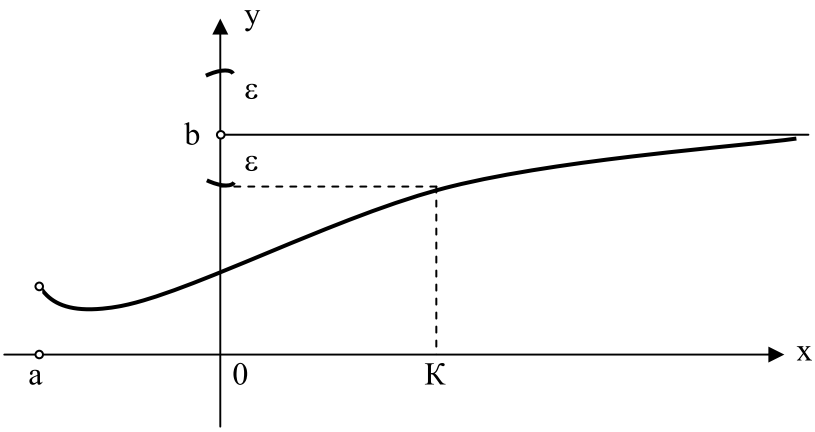
Limitga ega funktsiyalar o'zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1) u=*f* (M) funktsiya $M\to M_0$ da limitga ega bo'lsa, ushbu limit yagonadir;

2) u=*f* (M) funktsiya $M\to M_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, $M_0$ nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ mavjudki, $S_\delta(M_0)\cap V$ to'plamda *f* (M) funktsiya chegaralangan bo'ladi.

## 2. Bir o'zgaruvchili funktsiya uchun bir tomonlama va x → ∞ dagi limitlar.

Bir o'zgaruvchili u=*f* (x) funktsiya biror V=(a; ∞) nurda aniqlangan bo'lsin (22.2–rasm). Har qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday $K>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $|x|>K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b soni ***f* (x) funktsiyaning x → ∞ dagi limiti** deyiladi.




22.2 – rasm.

u=$f$(x) funktsiyaning $x \to -\infty$ dagi limiti ham yuqoridagidek ta'riflanadi.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^x}=3$, chunki $x \to +\infty$ da $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \to 0$;

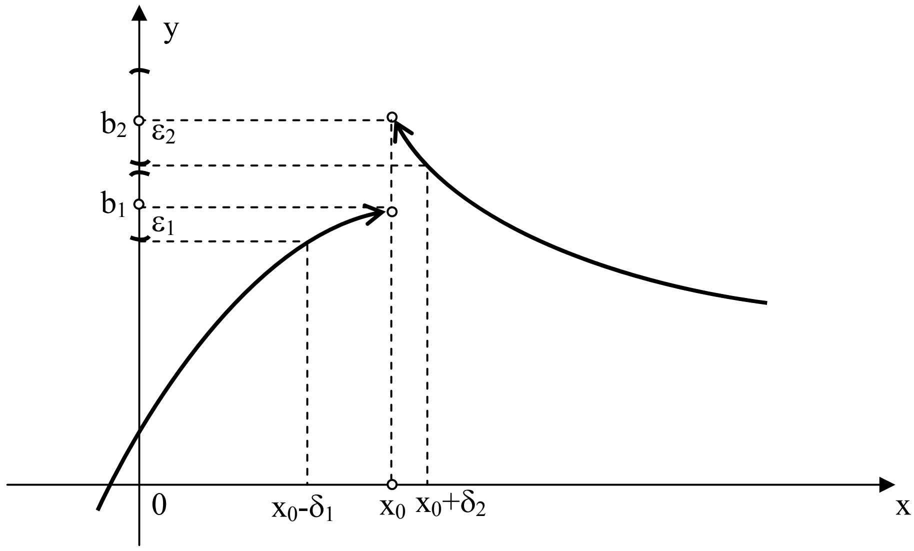
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^x}=0$, chunki $x \to -\infty$ da $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \to +\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Bir o'zgaruvchili u=$f$(x) funktsiya $x < x_0$ da aniqlangan bo'lib, $x_0$ nuqta aniqlanish sohasining quyuqlanish nuqtasi bo'lsin (22.3–rasm).

Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $\delta_1 > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $x_0-\delta_1 < x < x_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b_1 = f(x_0-0)$ son $f$(x) **funktsiyaning x→x$_0$ da chapdan limiti** deyiladi va $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

u=$f$(x) **funktsiyaning $x \to x_0$ da o'ngdan limiti** ham shunga o'xshash aniqlanadi va $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ ko'rinishda yoziladi (22.3 – rasm ).




22.3–rasm.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=0$.

$u=f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtada limiti, funktsiya shu nuqtada chapdan va o'ngdan limitlarga ega bo'lib, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilganda, mavjud bo'ladi.

### 3. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Cheksiz kichik va cheksiz katta funktsiyalar.

**Limitlar haqidagi asosiy teoremalar** quyidagilardan iborat:

1. Agar $u=f(M)=S$ (S – o'zgarmas) bo'lsa, u holda $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=C$.

2. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy k son uchun

$$\lim_{M\to M_0}[kf(M)]=k\lim_{M\to M_0} f(M)$$

3. Agar $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ va $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$ mavjud bo'lsa,

a) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)]$ ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M\to M_0}[f(M)\pm g(M)]=\lim_{M\to M_0} f(M)\pm\lim_{M\to M_0} g(M).$$

b) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M)\cdot g(M)]$ mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M\to M_0}[f(M)\cdot g(M)]=\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot\lim_{M\to M_0} g(M)$$

v) $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) \neq 0$ o'rinli bo'lganda, $\lim\limits_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)}$ ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}.$$

g) $M_0$ nuqtaning biror atrofida $f(M) \leq g(M)$ munosabat bajarilsa, u holda $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \leq \lim\limits_{M\to M_0} g(M)$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Limitlar haqidagi teoremalar bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiya limitlarini hisoblashda qo'llaniladi.

Masalan, $\lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} x_1^2 + \lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} x_2^2} = \frac{1}{(-1)^2 + 2^2} = 0{,}2$.

Agar $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = 0$ bo'lsa, $\alpha(M)$ funktsiya **$M \to M_0$ da cheksiz kichik funktsiya** deyiladi.

Xususan, agar $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, bir o'zgaruvchili $\alpha(x)$ funktsiya **$x \to x_0$ da cheksiz kichik** deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \frac{x+1}{x^2}$ funktsiya $x \to -1$ va $x \to \infty$ larda cheksiz kichik funktsiyadir.

Cheksiz kichik funktsiya o'zining quyidagi xossalariga ega:

1) $M \to M_0$ da $\alpha(M)$ cheksiz kichik funktsiya bo'lib, $f(M) = b + \alpha(M)$ bo'lganda, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ mavjud va aynan b ga tengdir;

2) Chekli sondagi va har biri $M \to M_0$ da cheksiz kichik funktsiyalarning yig'indisi yoki ko'paytmasi cheksiz kichik funktsiyalardir.

3) $M \to M_0$ da cheksiz kichik funktsiyaning, $M_0$ nuqtaning biror atrofida chegaralangan funktsiyaga ko'paytmasi, cheksiz kichik funktsiyadir.

Agar $\lim\limits_{M\to M_0} \gamma(M) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, $\gamma(M)$ funktsiya **$M \to M_0$ da cheksiz katta funktsiya** deyiladi.

Xususan, agar $\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, $\gamma(x)$ funktsiya $x \to x_0$ da cheksiz katta bir o'zgaruvchili funktsiya deb ataladi.

**Masalan, $\gamma(x) = \frac{x+1}{x^2}$ funktsiya $x \to 0$ da cheksiz kattadir.**

## 4. Ekvivalent cheksiz kichik funktsiyalar. Funktsiyalarni taqqoslash.

Bir o’zgaruvchili $f(x)$ va g(x) funktsiyalar berilgan bo’lib, $x \neq x_0$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ mavjud bo’lsin. U holda, quyidagi xollarning biri o’rinli bo’ladi:

a) Agar $l \neq 0$ va $l \neq \infty$ bo’lsa, $f(x)$ va g(x) funktsiyalar $x \to x_0$ da teng tartibli funktsiyalar deyilib, $f(x) = 0^*(g(x))$ ko’rinishda yoziladi;

b) Agar $l = 1$ bo’lsa, $f(x)$ va g(x) funktsiyalar $x \to x_0$ da ekvivalent yoki teng kuchli deyilib, $f(x) \sim g(x)$ yozuvda ifodalanadi;

v) Agar $l = 0$ bo’lsa, $f(x)$ funktsiya $x \to x_0$ da g(x) funktsiyaga nisbatan yuqori tartibli kichik deyiladi va $f(x) = o(g(x))$ yozuvda yoziladi;

g) Agarda $l = \infty$ bo’lsa, unda $g(x)=o(f(x))$.

Masalan: 1. $x \to 0$ da $tg(2x) = 0^*(5x)$, chunki $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

2. $x \to 0$ da $x^3 = o(x^2)$, chunki $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.

3. $x \to \infty$ da $x^2=o(x^3)$, chunki $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$.

4. $x \to 0$ da $tg\,2x \sim 2x$, chunki $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg2x}{\sin 2x} = 1$.

Agar $x \to x_0$ da $\alpha(x)$ funktsiya cheksiz kichik bo’lsa, quyidagi teng kuchliliklar (ekvivalentliklar) o’rinli:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2. $tg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;
4. $arctg\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5. $\log_a [1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x) \log_a e$;
6. $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$; 7. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$;
8. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$; 9. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;
10. $[1 + \alpha(x)]^n - 1 \sim n\alpha(x)$; 11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$.

Yuqorida keltirilgan ekvivalentliklardan funktsiyalar limitini hisoblashda foydalanish maksadga muvofiq.

Masalan, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)}{(1-\cos x)arctgx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2} x} = 2$.

## O’z – o’zini tekshirish uchun savollar

1. Ko’p o’zgaruvchili funktsiya limitini nuqtalar ketma–ketligi tilida ta’riflang?
2. Ko’p o’zgaruvchili funktsiya limitini $\varepsilon - \delta$ tilida ta’riflang?
3. Ko’p o’zgaruvchili funktsiya ta’riflaridan foydalanib, bir o’zgaruvchili funktsiya limitini ta’riflashda qanday almashtirishlar bajarish etarli deb hisoblaysiz?
4. Funktsiya limiti ta’riflarida limit (quyuqlanish) nuqtasining funktsiya aniqlanish sohasiga tegishli bo’lishi shartmi?
5. Ajoyib limitlar deb ataluvchi limitlarni yozing.
6. Yaqinlashuvchi funktsiyalar bo’ysinadigan qanday xossalarni bilasiz?
7. Bir o’zgaruvchili funktsiyaning $x \to \infty$ dagi limitini ta’riflang?
8. Bir o’zgaruvchili funktsiya uchun bir tomonlama limitlarni ta’riflang?
9. Funktsiya nuqtada limitga ega bo’lishi uchun qanday shartlarning bajarilishini etarli hisoblaysiz?
10. Limitlar haqidagi asosiy teoremalarni sanab o’ting?
11. Cheksiz kichik funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi va uning qanday xossalarini bilasiz?
12. Cheksiz katta funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
13. Qanday funktsiyalarga teng tartibli funktsiyalar deyiladi?
14. Teng kuchli (yoki ekvivalent) funktsiyalar deganda nimani tushunasiz?
15. Kichiklik tartibi yuqori deganda – chi?
16. Ekvivalent funktsiyalarga misollar keltiring.

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsiya limiti.
2. Yaqinlashuvchi funktsiya.
3. Ajoyib limit.
4. Bir tomonlama (chapdan yoki o’ngdan) limit.
5. Funktsiyaning cheksizdagi limiti.
6. Cheksiz kichik funktsiya.
7. Cheksiz katta funktsiya.
8. Teng tartibli funktsiyalar.
9. Teng kuchli yoki ekvivalent funktsiyalar.
10. Yuqori tartibli kichik funktsiya.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**22.1.** $u=x^2$ funktsiya berilgan. Agar argument $x \to -2$, u holda $u \to 4$. Funktsiya limiti 4 sonining $\varepsilon = 0{,}01$ atrofiga mos, -2 nuqtaning $\delta$ atrofi qanday bo’lganda, $|x + 2| < \delta$ tengsizlikdan $|u - 4| < \varepsilon = 0{,}01$ munosabat kelib chiqadi?

**22.2.** Limitlarni toping:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{1+5x+6x^2}{8x^3+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^4-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{x^3-x+2}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-7x^2+4x}{9x^4+2x^3-10}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+6x^3-7x}{3x^2-2x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+x}+3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha x}{\sin\beta x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)^3}{\sin x^2}$; 23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 2x}{7x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\mathrm{arctg}x}{3x+\arcsin x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$; 27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{1-\sin nx}$;

28) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$; 29) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x\right]$; 30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-0,5}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$; 33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

34) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{5}}$; 35) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

36) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}\,x}$; 37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5x}$; 38) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$; 40) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$; 41) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

**22.3.** $y = 1 - \sqrt{x}$ va $y = \frac{x-1}{x+1}$ funktsiyalar $x \to 1$ holda cheksiz kichik funktsiyalardir. Ulardan qaysi biri yuqori tartibli?

**22.4.** Quyidagi $x \to 0$ holda cheksiz kichik funktsiyalarning $x$ ga nisbatan tartibini aniqlang:

**a)** $\sqrt[3]{1+x} - 1$; **b)** $e^{\sqrt{x}} - 1$; **v)** $e^{\sin x} - 1$; **g)** $\sin(\sqrt{1+x} - 1)$.

**22.5.** Radiusi $R$ ga teng bo'lgan doiraga kvadrat ichki chizilgan, kvadratga doira ichki chizilgan, doiraga esa kvadrat ichki chizilgan va hokazo doira – kvadratlardan $n$ tadan. Barcha doiralar yuzalari yig'indisi va kvadratlar yuzalari yig'indilarining $n \to \infty$ dagi limitlarini toping.

## §23. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA UZLUKSIZLIGI.

### 1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi.

$u = f(M) = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ funktsiya $V \subseteq R_n$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $M_0(x_1^0;\ x_2^0; \ldots; x_n^0)$ nuqta V to'plamning quyuqlanish nuqtasi va $M_0 \in V$ bo'lsin.

Funktsiyaning nuqtada uzluksizligini, funktsiya limitini ta'riflagan kabi, ikki teng kuchli ta'riflardan biri orqali aniqlash mumkin.

Har bir hadi V to'plamga tegishli va uning $M_0$ quyuqlanish nuqtasiga yaqinlashuvchi har qanday $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ nuqtalar ketma–ketligi uchun, mos funktsiya qiymatlari $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_k), \ldots$ sonli ketma-ketligi $f(M_0)$ songa intilsa, u holda **$f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ son uchun $M_0$ nuqtaning shunday bir $\delta$ atrofi $S_\delta(M_0)$ ni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$ nuqtalar uchun $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

$u = f(M)$ funktsiyaning $M_0$ nuqtada uzluksizligi $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ ning mavjudligini va uning funktsiyaning $M_0$ nuqtada erishadigan qiymati $f(M_0)$ ga tengligini anglatadi, ya'ni $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ shart $\lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0$ shartga teng kuchli ekanligini e'tiborga olsak, argumentlar orttirmalari deb ataladigan $x_1 - x_1^0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_2^0 = \Delta x_2$, …, $x_n - x_n^0 = \Delta x_n$ almashtirishlar va ularga mos funktsiyaning $M_0$ nuqtadagi orttirmasi deyiladigan $f(M) - f(M_0) = \Delta f(M_0)$ almashtirish kiritsak, shartlar

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(M_0) = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Bu esa, funktsiyaning nuqtada uzluksizligi, shu nuqtada barcha argumentlarning cheksiz kichik orttirmalariga funktsiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishini anglatadi.

Xususiy holda, yuqorida keltirilgan ta'riflarni bir o'zgaruvchili funktsiya uchun bayon qilishda M ni x bilan almashtirish kifoya qiladi.

Masalan:

1) $u = \cos x$ funktsiya har bir $x_0 \in R_1$ nuqtada uzluksiz, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0) =$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0}(\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x_0 + \frac{\Delta x}{2})) = 0$$

2) $u = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n$ chiziqli funktsiya har bir $M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n$ nuqtada uzluksiz va hokazo.

## 2. Uzluksiz funktsiyalar xossalari. To'plamda uzluksizlik.

Nuqtada uzluksiz funktsiyalar quyidagi xossalar bilan xarakterlanadi:

1. $f(M)$ va $g(M)$ funktsiyalar $M_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $M_0$ nuqtada quyidagi funktsiyalar ham uzluksiz bo'ladi:

a) $f(M) + g(M)$; b) $k f(M)$ (k – o'zgarmas); v) $f(M) \cdot g(M)$;

g) $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M_0) \neq 0)$.

2. Agar $f(M)$ funktsiya V to'plamda aniqlangan bo'lib, $M_0 \in V$ nuqtada uzluksiz va $f(M_0) > 0$ ($f(M_0) < 0$) bo'lsa, u holda $M_0$ nuqtaning shunday bir $\delta$ atrofi $S_\delta(M_0)$ mavjudki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$ nuqtalar uchun $f(M) > 0$ ($f(M) < 0$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

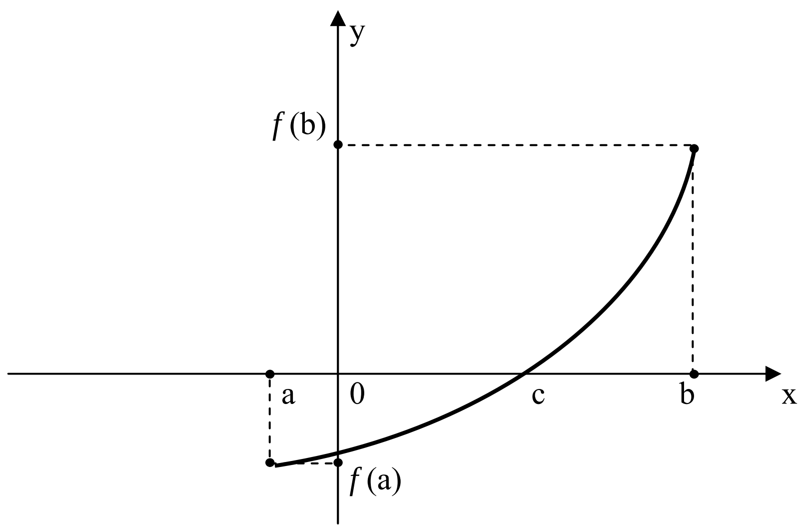
To'plamning har bir nuqtasida uzluksiz funktsiyaga **to'plamda uzluksiz funktsiya** deyiladi.

To'plamda uzluksiz funktsiyalar esa quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $f(M)$ funktsiya ixcham (chegaralangan va yopiq) V to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda $f(M)$ funktsiya V to'plamda chegaralangandir.

2. Agar $f(M)$ funktsiya ixcham V to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda $f(M)$ funktsiya V to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bir o'zgaruvchili funktsiya uchun yuqorida qayd qilingan xossalardan tashqari, qo'shimcha quyidagi xossa o'rinli:

3. Agar $f(x)$ funktsiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga erishsa ($f(a) \cdot f(b) < 0$), u holda $(a; b)$ intervalga tegishli kamida bitta s nuqta topiladiki, $f(s) = 0$ tenglik bajariladi (23.1-rasm).




23.1–rasm.

## 3. Bir tomonlama uzluksizlik. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning uzilish nuqtalari.

Bir o'zgaruvchili u=$f(x)$ funktsiya argumentning $x \le x_0$ ($x \ge x_0$) qiymatlarida aniqlangan bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ( $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$)

munosabat bajarilsa, ***f* (x) funktsiya $x_0$ nuqtada chapdan (o'ngdan) uzluksiz** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ funktsiya 0 nuqtada chapdan uzluksiz, chunki,

$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$.

$u = f(x)$ funktsiya $[a; b]$ kesmaning har bir ichki nuqtasida uzluksiz bo'lib, a nuqtada o'ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lgandagina [**a; b**] **kesmada uzluksiz** bo'ladi.

Bir o'zgaruvchili $u = f(x)$ funktsiya $x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Funktsiyaning $x_0$ nuqtaning o'zida aniqlangan bo'lishi shart emas. Agar $f(x)$ funktsiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lmasa, funktsiya $x_0$ nuqtada uzilgan yoki $x_0$ nuqta uning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

$u = f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtada chapdan va o'ngdan limitlari mavjud bo'lib, o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

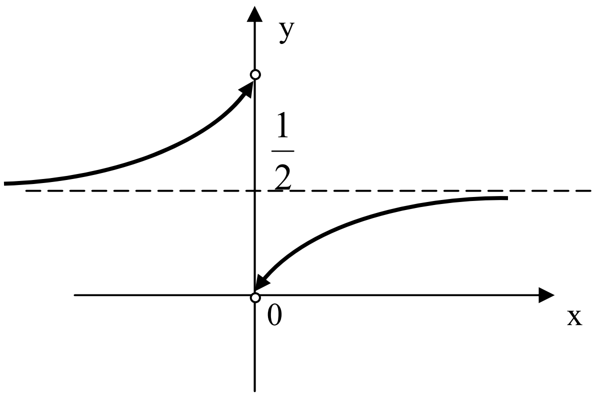
u holda $x_0$ nuqta **funktsiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ funktsiya $x_0 = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki

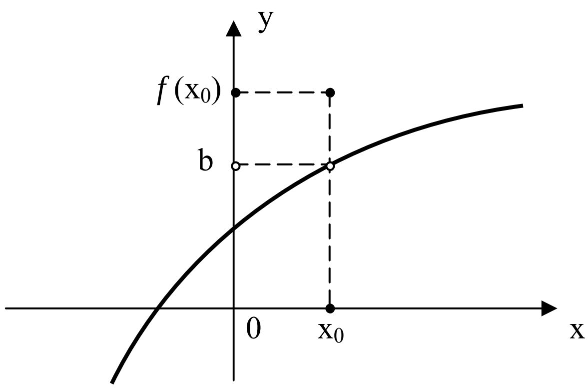
$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1 \ne 0 = \lim\limits_{x\to +0} f(x)$ (23.2 – rasm).

Agar $x_0$ nuqtada funktsiyaning chapdan va o'ngdan limitlari $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ lar o'zaro teng bo'lib, funktsiyaning $x_0$ nuqtada erishadigan qiymati $f(x_0)$ dan farq qilsa, unda $x_0$ nuqta **uzluksizlikni tiklash mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi** deb ataladi (23.3 – rasm).

$u = f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtada chapdan yoki o'ngdan limitlarining biri mavjud bo'lmasa (xususan, cheksiz bo'lsa), u holda $x_0$ nuqta **funktsiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.




23.2 – rasm.




23.3 – rasm.

Masalan, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ funktsiya $x_0 = 0$ da ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $f(+0) = \infty$.

Bir necha o'zgaruvchili funktsiyalar uzilish nuqtalaridan tashqari, uzilish chiziqlari, sirtlari va hokazolarga ega bo'lishlari mumkin.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsiyaning nuqtada uzluksizligining qanday ta'riflarini bilasiz?
2. Funktsiya uzluksizligining ta'riflari funktsiya limiti mos ta'riflaridan farqli jihatlari nimalardan iborat?
3. Nuqtada uzluksiz bir o'zgaruvchili funktsiyalarga misollar keltiring?
4. Nuqtada uzluksiz funktsiyalarning qanday xossalarini bilasiz?
5. To'plamda uzluksiz funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
6. To'plamda uzluksiz funktsiyalarning xossalarini sanab o'ting?
7. Kesmada uzluksiz bir o'zgaruvchili funktsiyaning o'ziga xos xossasi nimadan iborat?
8. Nuqtada bir tomonlama (chapdan yoki o'ngdan) uzluksiz funktsiyani ta'riflang va misollar keltiring?
9. Bir o'zgaruvchili funktsiya uchun birinchi tur uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi? Misollar keltiring?
10. Uzliksizlikni tiklash mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi?
11. Bir o'zgaruvchili funktsiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi? Misollar keltiring?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Nuqtada uzluksiz funktsiya.
2. To'plamda uzluksizlik.
3. Bir tomonlama uzluksizlik.
4. Birinchi tur uzilish nuqtasi.
5. Uzluksizlikni tiklash mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi.

6. Ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**23.1.** u funktsiya quyidagicha aniqlangan:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x<-1;\\ x, & \text{агар } -1\le x<1;\\ x^2-6x+6, & \text{агар } x\ge 1.\end{cases}$$

Funktsiyani sonlar o'qida uzluksiz deyish mumkinmi? (Grafigini chizing.)

**23.2.** $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{агар } x\le 2;\\ ax^2+9, & \text{агар } x>2\end{cases}$ parametrli funktsiya berilgan. a parametrning qanday qiymatida *f* (x) funktsiya uzluksiz bo'ladi? Masala echimini funktsiya grafigini chizib izohlang?

**23.3.** $y_1=\dfrac{1}{x+3}$ va $y_2=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ funktsiyalar qanday nuqtalarda uzilishga ega. Funktsiyalar grafiklarini chizing. Uzilish nuqtalari yaqinida funktsiyalarning o'zini tutishidagi farqni aniqlang?

**23.4.** $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ funktsiya x = 1 nuqtada aniqlanmagan. u(1) qanday bo'lganda, u(1) bilan qayta aniqlangan funktsiya x = 1 nuqtada uzlyksiz bo'ladi?

**23.5.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$ va $y=\dfrac{\cos x}{x}$ funktsiyalar $x=0$ nuqtada uzilishning qanday turiga ega. x = 0 nuqta atrofida funktsiya grafiklari xarakterini aniqlang?

**23.6.** $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{агар } x\ne 0;\\ 0, & \text{агар } x=0\end{cases}$ funktsiyani uzluksizlikka tekshiring? Funktsiya grafigini chizing.

**23.7**. Quyidagi funktsiyalarni uzluksizlikka tekshiring, uzluksizlik oraliqlarini va uzilish nuqtalari turini aniqlang:

**a)** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; **b)** $y=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$; **v)** $y=x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$;

**g)** $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$; **d)** $y=\dfrac{1}{1+4^{\operatorname{tg}x}}$.

## §24. BIR O'ZGARUVChILI FUNKTSIYA HOSILASI VA DIFFERENTSIALI

### 1. Hosila haqida tushuncha. Funktsiya differentsiali.

Bir o'zgaruvchili u=$f$(x) funktsiya x nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

$f$(x) funktsiyaning x nuqtadagi **birinchi tartibli hosilasi** deb, shu nuqtada funktsiya orttirmasi $\Delta$u=$\Delta f$(x) ning argument orttirmasi $\Delta$x ga nisbatining, $\Delta$x nolga intilgandagi chekli limitiga aytiladi va $f\,'$(x), u$'$, $u_x$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ ifodalarning biri orqali yoziladi.

Ta'rifga ko'ra, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Agar $f$(x) funktsiya x nuqtada uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ (yoki $-\infty$) bo'lsa, u holda $f$(x) funktsiya x **nuqtada cheksiz hosila**ga ega deyiladi va $f\,'(x)=\infty$ (yoki $-\infty$) shaklda yoziladi.

Chekli yoki cheksizligidan qat'iy nazar,

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{va} \quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

limitlarga, mos ravishda, $f$(x) **funktsiyaning x nuqtada chapdan va o'ngdan hosilalari** deyiladi.

$f$(x) funktsiyaning x nuqtada bir tomonlama, chapdan $f'_-(x)$ va o'ngdan $f'_+(x)$ hosilalari mavjud bo'lib, o'zaro teng bo'lgandagina, funktsiya x nuqtada hosilaga ega bo'ladi va $f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x)$.

Berilgan $f$(x) funktsiyaning hosilasi $f'(x)$ ni topish amaliga **funktsiyani differentsiallash** deb ataladi.

Masalan: 1) $u=x^3$ funktsiya har qanday haqiqiy x da chekli hosilaga ega, chunki

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2.$$

Shunday qilib, $(x^3)'=3x^2$ ($x\in R$).

2) $y=\sqrt[3]{x}$ funktsiya x = 0 nuqtada cheksiz hosilaga ega:

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty.$$

3) u = | x | funktsiya esa x = 0 nuqtada har ikki bir tomonlama hosilalari $y'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$; $y'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{e^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1$ mavjud bo'lishiga qaramasdan, hosilaga ega emas, chunki $y'_+(0)\neq y'_-(0)$.

Erkli o'zgaruvchi yoki **argument x ning differentsiali** deb, uning orttirmasi $\Delta x$ ga aytiladi va dx orqali belgilanadi, ya'ni $dx = \Delta x$.

Agar $u = f(x)$ funktsiyaning x nuqtadagi $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmasi, $\Delta u = A(x)dx + \alpha(dx)$ ko'rinishda tasvirlansa, bu erda A(x) – o'zgaruvchi, $dx \to 0$ da $\alpha(dx) = 0(dx)$, u holda $f(x)$ funktsiya x **nuqtada differentsiallanuvchi** deyiladi.

Masalan, $u = x^3$ funktsiya ixtiyoriy x nuqtada differentsiallanuvchi, chunki $\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3x^2 \Delta x + \alpha(dx)$.

$u = f(x)$ funktsiyaning x nuqtadagi birinchi tartibli differentsiali deb, shu nuqtada funktsiya orttirmasi $\Delta u$ ning dx ga nisbatan bosh chiziqli qismi A(x)dx ga aytiladi va du yoki $df(x)$ yozuv bilan belgilanadi. Ta'rifga binoan, $du = A(x)dx$ va $\Delta u = du + \alpha(dx)$.

Agar $f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda funktsiya shu nuqtada uzluksizdir. Funktsiyaning nuqtada uzluksizligi uning differentsiallanuvchanligining zaruriy sharti hisoblanadi, ammo etarli emas. Masalan, yuqoridagi misolimizda, $u = |x|$ funktsiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz bo'lgani bilan differentsiallanuvchi emas.

$u = f(x)$ funktsiyaning x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilasining mavjudligi, $f(x)$ funktsiya shu nuqtada differentsiallanuvchanligining etarli shartidir. Ushbu holda, $A(x)= f'(x)$ va $du= f'(x)dx$ tengliklar o'rinli.

Masalan, $u=x^3$ funktsiyaning ixtiyoriy $x \in R$ nuqtadagi **differentsiali** $du =(x^3)' dx = 3x^2 dx$.

Agar $\Delta u = du + 0(\Delta x)$ tenglikda $\Delta x$ etarlicha kichik bo'lsa, taqribiy hisoblarda qo'llaniladigan $\Delta u \approx du$ yoki $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$ formulalarni olamiz.

Masalan, taqribiy hisoblash formulasini qo'llab, $\sqrt[3]{124}$ ni hisoblash talab etilsin. $y = \sqrt[3]{x}$ funktsiya uchun taqribiy hisoblash formulasi $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\Delta x$ ko'rinishda yoziladi.

Natijada, $\sqrt[3]{124} = \sqrt[3]{125 - 1} \approx \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{125^2}(-1) = 5 - \frac{1}{75} = 4\frac{74}{75}$.

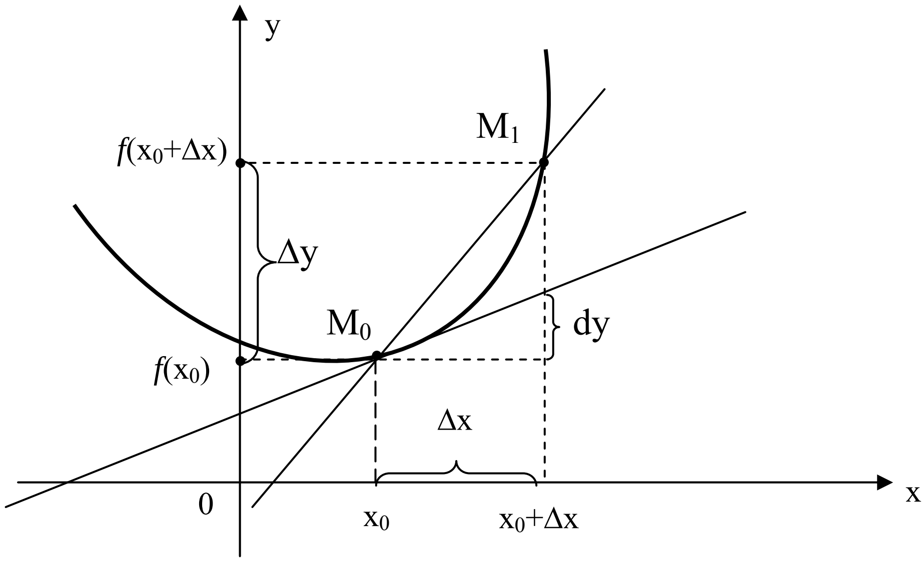
Agar $f(x)$ funktsiya biror-bir (a; b) oraliqning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, shu **oraliqda differentsiallanuvchi funktsiya** deyiladi. Bundan tashqari, agarda $f'(x)$ ushbu oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda funktsiya **oraliqda uzluksiz differentsiallanuvchi** deb yuritiladi.

## 2. Hosila va differentsialning geometrik va fizik ma'nolari.

$u = f(x)$ funktsiya $x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda grafigi chizilgan bo'lsin.

$u = f(x)$ funktsiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan **urinma** deb, $M_0M_1$ kesuvchining $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ nuqta grafik bo'ylab $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtaga ixtiyoriy ravishda intilgandagi limit holatiga aytiladi (rasmga qarang). $M_0M_1$ kesuvchining burchak koeffitsienti $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ga teng bo'lib, uning $\Delta x$ nolga intilgandagi limiti, bir tomondan urinma burchak koeffitsienti $k=tg\,\alpha$ ga teng bo'lsa, ikkinchi tomondan hosila ta'rifiga ko'ra, $u = f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtadagi birinchi tartibli hosilasi $f'(x_0)$ ga teng:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$




Bundan esa, birinchi tartibli hosilaning geometrik ma'nosi kelib chiqadi. $u = f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi, funktsiya grafigining $x_0$ abstsissali nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng: $f'(x_0) = k$.

Hosilaning geometrik ma'nosidan foydalanib, $u = f(x)$ funktsiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan **urinma va normal tenglamalari**, mos ravishda, quyidagicha yozilishi mumkin:

$$u - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{va} \quad u - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Masalan, $y = \sqrt[3]{x}$ funktsiya grafigining $x_0 = 1$ abstsissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi:

$$y - \sqrt[3]{1} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1^2}\,(x - 1) \quad \text{yoki} \quad y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$u = f(x)$ funktsiyaning $x_0$ nuqtadagi birinchi tartibli differentsiali $du$ esa, kattalik jihatdan, funktsiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmasining $x_0$ nuqta $x_0 + \Delta x$ nuqtaga o'tganda mos ordinata orttirmasiga teng. Rasmdan, agarda $\Delta x$ etarlicha kichik bo'lganda, taqribiy tenglik $\Delta u \approx du$ ning o'rinli ekanligini uqish qiyin emas.

$u = f(x)$ funktsiya $x$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, uni shu nuqtada erksiz o'zgaruvchi $u$ ning erkli o'zgaruvchi $x$ ga nisbatan o'zgarish tezligi sifatida talqin qilish mumkin. Funktsiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirilishi esa, erksiz o'zgaruvchining o'zgarishini argumentning kichik o'zgarishiga nisbatan chiziqli jarayon sifatida hisoblash imkonini beradi. Masalan, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qonuni $S = S(t)$ funktsiya bilan berilgan bo'lsin. U holda, ixtiyoriy $t$ vaqt onidagi $v$ oniy tezlik kattaligi harakat qonunidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila qiymatiga teng: $v(t) = S'(t)$. $dS = v(t) \cdot dt$ differentsial esa, moddiy nuqta $t$ va $t + dt$ vaqt onlari oralig'ida $t$ momentdagi oniy $v$ tezligi bilan tekis harakat qilganda bosib o'tishi mumkin bo'lgan masofani aniqlaydi.

## 3. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari.

Amaliy iqtisodiyotda tayyorlangan mahsulot hajmi bilan xom ashyo sarfi orasida bog'liqlikni o'rnatuvchi ishlab chiqarish funktsiyalari, tarmoqlar rivojini ta'minlashda, optimallash masalalarida keng qo'llaniladi. Masalan, ikki o'zgaruvchili (faktorli) Kobb – Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi tayyorlangan mahsulot hajmi y bilan ishlab chiqarish fondlari kattaligi K va jonli mehnat sarfi hajmi L orasidagi munosabatni quyidagicha aniqlaydi:

$$y = q \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Bu erda, q va $\alpha$ tanlanadigan o'zgarmas sonlar.

Ishlab chiqarish funktsiyalari differentsiallanuvchi deb taxmin qilinsa, hosila tushunchasi bilan bog'liq ularning differentsial xarakteristikalari muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, agar $u = f(x)$ ishlab chiqarish funktsiyasi tayyorlangan mahsulot hajmi u bilan xom ashyo sarfi hajmi x orasidagi bog'liqlikni ifodalasa, $f'(x)$ **limit mahsulot** deyiladi. Agarda, $u = f(x)$ ishlab chiqarish xarajatlari u bilan mahsulot hajmi o'rtasida munosabatni aks ettirsa, $f'(x)$ **limit xarajatlar** deb yuritiladi.

$u = f(x)$ funktsiya elastikligi x argumentning kichik nisbiy o'zgarish jadalligiga nisbatan u funktsiyaning nisbiy o'zgarish unumini aniqlaydi. **Elastiklik koeffitsienti** $\varepsilon$ quyidagicha hisoblanadi:

$$\varepsilon = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon = y' \cdot \frac{x}{y}.$$

Elastiklik koeffitsienti tovarlarga bo'lgan ehtiyoj talabi masalalarini, tovarlarning bahosi va iste'molchilarning daromadiga bog'liq holda, tekshirishda keng qo'llaniladi. Elastiklik koeffitsientining yuqoriligi ehtiyoj qondirilish darajasining bo'shligini anglatsa, uning past darajaligi ushbu ehtiyojning qondirilmay ko'p turib qolganini anglatadi.

Ikki faktorli Kobb – Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi uchun hosila bilan bog'liq asosiy iktisodiy – matematik tushunchalar (differentsial xarakteristikalar) quyidagilar:

$u'_K$ - limit fond unumdorligi; $u'_L$ - limit mehnat unumdorligi;

$u'_K \cdot \dfrac{K}{y}$ - fondlar bo'yicha elastiklik koeffitsienti;

$u'_L \cdot \dfrac{L}{y}$ - mehnat resurslari bo'yicha elastiklik koeffitsienti.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning birinchi tartibli hosilasini ta'riflang?
2. Funktsiya nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lishi mumkinmi?
3. Funktsiyaning nuqtada bir tomonlama hosilalari deb nimaga aytiladi?
4. Funktsiyaning nuqtada hosilaga ega bo'lish shartlari nimalardan iborat?
5. Funktsiyani differentsiallash deganda nimani tushunasiz?
6. Nuqtada differentsiallanuvchi funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?

7. Funktsiyaning nuqtada differentsiallanuvchi bo'lish zaruriy va etarli shartlari nimalardan iborat?
8. Funktsiyaning birinchi tartibli differentsiali deganda nimani tushunasiz?
9. Taqribiy hisoblash formulasini yozing?
10. Qanday funktsiyaga to'plamda differentsiallanuvchi va uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya deyiladi?
11. Birinchi tartibli hosilaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
12. Birinchi tartibli differentsialning geometrik ma'nosi – chi?
13. Birinchi tartibli hosila va differentsialning fizik ma'nosini bayon qiling?
14. Ishlab chiqarish funktsiyasi deganda nimani tushunasiz?
15. Ishlab chiqarish funktsiyalarining differentsial xarakteristikalariga misollar keltiring?
16. Elastiklik koeffitsienti formulasini yozing?
17. Ikki faktorli Kobb- Duglas ishlab chiqarish funktsiyasining qanday asosiy differentsial xarakteristikalarini bilasiz?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsiyaning birinchi tartibli hosilasi.
2. Bir tomonlama hosilalar.
3. Differentsiallanuvchi funktsiya.
4. Funktsiyaning birinchi tartibli differentsiali.
5. To'plamda differentsiallanuvchi funktsiya.
6. To'plamda uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya.
7. Ishlab chiqarish funktsiyalari.
8. Limit mahsulot.
9. Limit xarajatlar.
10. Elastiklik koeffitsienti.

## Mustaqil ishlash uchun misollar:

**24.1.** $y = x^2$ funktsiyaning $x = -2$ nuqtada argument $\Delta x$ ning:

**a)** 1; **b)** 0,2;
**v)** 0,1; **g)** 0,01

qiymatlariga mos orttirmalarini toping?

**24.2.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzing, agar:

**a)** $y = x^3 - 2x + 3$, $x = 0$, $\Delta x = 0.1$;

**b)** $y = \frac{1}{x}$, $x = 0,5$, $\Delta x = 0.02$ ;

**v)** $y = \sqrt{x}$ , $x = 4$, $\Delta x = 0,01$.

Nisbatlarning $\Delta x \to 0$ dagi limitlari, birinchi holda –2 ga, ikkinchi holda $-4$ ga, uchinchi holda esa $\frac{1}{4}$ ga tengligini ko'rsating.

**24.3.** Hosila ta'rifidan foydalanib, quyidagi funktsiyalarning berilgan nuqtalardagi birinchi tartibli hosilalarini toping:

**1)** $u = x^4$, $x = 1$; **2)** $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 16$;

**3)** $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 0{,}8$; **4)** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4$;

**5)** $y = 5^x$, $x = 0$; **6)** $y = log_5\, x$, $x = 1$;

**7)** $y = \sin x$, $x = 0$; **8)** $y = tg\, x$, $x = 0$.

**24.4.** Quyidagi funktsiyalarning berilgan $x$ va $\Delta x$ larda orttirma va differentsiallarini toping:

**a)** $y = x^2 - x$, $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$;

**b)** $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $\Delta x = 0{,}41$;

**v)** $y = 2^x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}4$.

Funktsiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirilgandagi absolyut va nisbiy xatolarni hisoblang?

**24.5.** Funktsiyalarning birinchi tartibli differentsiallarini toping:

**1)** $y = 2\sqrt{x}$; **2)** $y = \frac{1}{3x^3}$;

**3)** $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; **4)** $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

**24.6.** Quyidagi funktsiyalarning berilgan nuqtalarda uzluksizligi va differentsiallanuvchanligini tekshiring:

**a)** $y = |x^3|$, $x = 0$; **b)** $y = |\sin x|$, $x = 0$ va $x = \frac{\pi}{2}$.

**24.7.** Taqribiy hisoblash formulasini qo'llab, radikalli sonli ifodalarning qiymatlarini hisoblang:

**a)** $\sqrt{16{,}08}$; **b)** $\sqrt{35{,}68}$; **v)** $\sqrt[3]{65{,}024}$;

**g)** $\sqrt[4]{79{,}628}$; **d)** $\sqrt[5]{32{,}81}$.

**24.8.** $u = x^2$ parabolaga, uning:

**a)** $x = -2$ abstsissali nuqtasiga; **b)** (1; 1) nuqtasiga;

**v)** $y = 3x$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalariga o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsientlarini toping?

**24.9.** $u = x^3$ kubik parabolaning qanday nuqtalariga o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsienti 12 ga teng bo'ladi?

**24.10.** Quyidagi chiziqlar qanday burchak ostida kesishadi:

**a)** $u = x^2$ parabola va $u = 3x - 2$ to'g'ri chiziq;

**b)** $u = \sqrt{x}$ parabola va $u = \frac{1}{x}$ giperbola;

**v)** $x^2 + u^2 = 8$ aylana va $u^2 = 2x$ parabola;

**g)** $u = \sin x$ sinusoida va $y = \cos x$ kosinusoida ($x \in [0; \pi]$).

**24.11.** $u = x^2$ parabolaning qanday nuqtasiga o'tkazilgan urinma:

**a)** $4x - u - 5 = 0$ to'g'ri chiziqka parallel bo'ladi;

**b)** $2x - 6u + 5 = 0$ to'g'ri chiziqka perpendikulyar bo'ladi;

**v)** $u = 3x + 1$ to'g'ri chiziq bilan $45^o$ li burchak tashkil etadi?

**24.12.** Quyidagi funktsiya grafiklari abstsissalari bilan berilgan nuqtalariga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing:

a) $y = \frac{1}{x}$, $\mathbf{x_0 = -1}$; b) $\mathbf{u = \ln x}$, $\mathbf{x_0 = e}$;

v) $\mathbf{y = \cos x}$, $\mathbf{x_0 = \frac{\pi}{6}}$; g) $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$, $\mathbf{x_0 = 3}$;

d) $y = \frac{x+9}{x+5}$, $\mathbf{x_0 = 0}$.

**24.13.** $u = x^2 - 4x + 5$ parabola va $u = x + 1$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtalariga normallar o'tkazilgan. Normallar va kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar hosil qilgan uchburchak yuzasini toping?

**24.14.** Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli traektoriya bo'ylab harakat qonuni $s = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$ (m.) berilgan. Qanday vaqt onlarida (sek.) uning harakat tezligi nolga teng bo'ladi?

**24.15.** Bolalar o'yinchoqlari ishlab chiqaradigan firmaning xarajat $f(x)$ va daromad $g(x)$ funktsiyalari berilgan (x – kunlik mahsulot hajmi):

$$f(x) = \frac{50x^2 - 300x}{x+2}, \quad g(x) = \frac{100x^2 + 300x}{x+1}.$$

**a)** foyda funktsiyasini tuzing;

**b)** limit xarajatlar funktsiyasini quring;

**v)** limit daromad funktsiyasini quring;

**g)** limit foyda funktsiyasini quring?

**24.16.** Avtomobil ehtiyot qismlari ishlab chiqaruvchi firmaning xarajat va daromad funktsiyalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x) = 6000 + 300x + \frac{6000x}{x+50}, \quad g(x) = -\frac{x^3}{50} + x^2 + 600x.$$

Bu erda, x – kunlik mahsulot hajmi ( $0 < x < 200$ ).

Firmaning:

**a)** foyda funktsiyasini tuzing;

**b)** limit daromad funktsiyasini quring;

**v)** limit xarajatlar funktsiyasini quring;

**g)** limit foyda funktsiyasini quring.

# §25. HOSILA VA DIFFERENTSIALNI HISOBLASH QOIDALARI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTSIALLAR

## 1. Differentsiallanuvchi funktsiyalar haqida teoremalar. Elementar funktsiyalar hosilalari jadvali.

Limitlar haqida teoremalar kabi, differentsiallanuvchi funktsiyalar haqida ham teoremalar mavjud.

u(x) va v(x) funktsiyalar x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, k biror–bir o'zgarmas son bo'lsa, u holda x nuqtada

a) $u(x) + v(x)$; b) $k\,u(x)$; v) $u(x)\cdot v(x)$; g) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$

funktsiyalar ham differentsiallanuvchi bo'ladi va quyidagilar o'rinli :

1) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$; $d[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x)$.

2) $[k\,u(x)]' = k\,u'(x)$; $d[k\,u(x)] = k\,du(x)$.

3) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$;

$d[u(x)\cdot v(x)] = u(x)\cdot dv(x) + v(x)\cdot du(x)$.

4) $$\left[\frac{u(x)}{v(x}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)};$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x}\right] = \frac{du(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot dv(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Funktsiya hosilasini hisoblashda **differentsiallash qoidalari**dan tashqari, elementar funktsiyalar hosilalari jadvalidan ham foydalaniladi.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| C (o'zgarmas) | 0 | sin x | cos x |
| $x^p$ | $x^{p-1}$ | cos x | -sin x |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ | tg x | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $a^x$ | $a^x \, ln a$ | ctg x | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
| $e^x$ | $e^x$ | arcsin x | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $log_a \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x \, ln a}$ | arccos x | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | | arctg x | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $ln \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x}$ | arcctg x | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

Misollar. Differentsiallash qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funktsiyalar hosilalarini hisoblang:

1. $y = \sqrt[3]{x^2} + 5^x e^x - x^2 \mathrm{arctg} x$. 2. $y = \frac{2^x + 3x^2}{\ln x}$.

1. $y' = [\sqrt[3]{x^2} + 5^x e^x - x^2 \mathrm{arctg}x]' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + (5e)^x ln(5e) - (x^2)' \cdot \mathrm{arctg}x -$

$- x^2 \cdot (\mathrm{arctg}x)' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 5^x e^x ln(5e) - 2x \, \mathrm{arctg}x - \frac{x^2}{1+x^2}$.

2. $y' = \frac{(2^x + 3x^2)' \cdot lnx - (2^x + 3x^2) \cdot (lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{(2^x ln2 + 6x) \cdot lnx - (2^x + 3x^2) \cdot \frac{1}{x}}{(lnx)^2}$

## 2. Murakkab funktsiya hosilasi va differentsiali.

$u = f(u)$ va $u = g(x)$ **funktsiyalarning superpozitsiyasi**dan iborat $u = f[g(x)]$ **murakkab funktsiya** berilgan bo'lsin.

Agar $u = g(x)$ funktsiya $x_0$ nuqtada differentsiallanuvchi, o'z navbatida $u = f(u)$ funktsiya $u_0 = g(x_0)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda $u = f[g(x)]$ murakkab funktsiya ham $x_0$

nuqtada differentsiallanuvchi bo’ladi va $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$ yoki $u'(x_0) = f'(u_0)\cdot g'(x_0)$.

Murakkab funktsiyaning erkli o’zgaruvchi bo’yicha hosilasi, shu funktsiyani tashkil etgan (superpozitsiyalanuvchi) funktsiya hosilalarining ko’paytmasiga teng.

Murakkab funktsiya differentsiali uchun $du = u'(x_0)\cdot dx = f'(u_0)\cdot du$ tengliklar o’rinli, bu erda $du = g'(x_0)\cdot dx$. Murakkab funktsiya birinchi tartibli differentsialini hisoblash uchun uning biror o’zgaruvchi bo’yicha hosilasini shu o’zgaruvchining differentsialiga ko’paytirish etarli. Bunda differentsialni hisoblash shakli o’zgarishsiz qolib, o’zgaruvchilarning tanlanilishiga yoki ularning erkli yoki erksizligiga bog’liq emas.Ushbu xossa birinchi tartibli differentsial shaklining invariantlik xossasi deyiladi.

Misol.

1. $y = \ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ funktsiyaning birinchi tartibli hosilasi va differentsialini hisoblaymiz:

$$y'=\left[\ln\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right]'=\frac{\left[\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right]'}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$$

$$dy = y'dx = \frac{1}{\sin x}$$

2. $u = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ funktsiya hosilasini hisoblash uchun, dastlab tenglikning ikkala tomonini logarifmlaymiz va so’ngra hosila olamiz:

$(\ln y)' = (\sin x\cdot \ln x)'$ <=> $\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$.

Natijada, $y' = x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})$.

## 3. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar.

$u = f(x)$ funktsiya uchun birinchi tartibli hosila $u'$ aniqlangan bo’lsin. Funktsiyaning ikkinchi tartibli $u''$ hosilasi $u'$ dan olinadigan hosila (agar uning mavjudlik sharti bajarilsa) sifatida aniqlanadi: $y'' = (y')'$.

Yuqoridagi mulohazani davom ettirib, funktsiyaning uchinchi, to’rtinchi va hokazo, ixtiyoriy **n – tartibli hosila**larini aniqlash mumkin. Yuqori tartibli hosilalarni yozishda quyidagi belgilar qo’llaniladi:

$$f^{(n)}(x),\ u'''_{xxx},\ u^{V},\ u,\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Shunday qilib, $u''' = (u'')'$, $u^{(4)} = (u''')'$, . . . , $u^{(n)} = (u^{(n-1)})'$.

Yuqori tartibli hosilalarni hisoblashda, birinchi tartibli hosilani hisoblash qoidalari kabi qoidalar qo’llaniladi. Masalan, $u = \sin^2 x$ funktsiya uchun

$u' = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, $y''' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$ va hokazo.

Quyida keltirilgan ba'zi funktsiyalarning yuqori n – tartibli hosilalari uchun tegishli formulalarni olish va ularni jadval holida yig'ish mumkin:

| $f(x)$ | $f^{(n)}(x)$ |
|---|---|
| $x^p$ | $p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{kx}$ | $k^n e^{kx}$ |
| $Ln x$ | $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ |
| $\sin kx$ | $k^n \sin(kx+\frac{\pi n}{2})$ |
| $\cos kx$ | $k^n \sin(kx+\frac{\pi n}{2})$ |

$u = f(x)$ funktsiyaning **yuqori tartibli differentsiallari** ham ketma – ket ravishda, mos hosilalari kabi aniqlanadi:

$d^2u = d(du)$ - ikkinchi tartibli differentsial;

$d^3u = d(d^2u)$ – uchinchi tartibli differentsial;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$d^n y = d(d^{n-1}y)$ - n-tartibli differentsial.

Agar $u = f(u)$ funktsiya berilgan bo'lib, u erkli o'zgaruvchi yoki x ning chiziqli $u = kx + b$ funktsiyasidan iborat bo'lsa, u holda:

$$d^2y = y''(du)^2,\ d^3y = y^{(3)}(du)^3, \ldots, d^ny = y^{(n)}(du)^n.$$

Agarda $u = f(x)$ funktsiyada $u = g(x) \neq kx + b$ bo'lsa, u holda yuqori tartibli differentsiallar uchun **invariantlik xossasi** o'rinli bo'lmaydi, chunki $d^2y = f''(u)\cdot(du)^2 + f'(u)\cdot d^2u$ va hokazo.

## 4. Teskari funktsiya hosilalari.

$u = f(x)$ funktsiya (a; b) intervalda differentsiallanuvchi bo'lib, shu intervalda uzluksiz $x = g(u)$ teskari funktsiyaga ega va $u'(x) \neq 0$ bo'lsin. U holda, $x = g(u)$ teskari funktsiya ham differentsiallanuvchi bo'lib, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Oxirgi tenglikni u bo'yicha differentsiallaymiz va $u''_{xx}$ mavjud bo'lsa,

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2}x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

Differentsiallashni davom etib, teskari funktsiyaning istalgan tartibli hosilasini aniqlash mumkin.

Masalan, $u = e^x$ $(u > 0)$ funktsiya uchun $x = ln y$ teskari funktsiyadir.

Uninghosilasi $x'_y = (ln y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x ln a} = \frac{1}{y ln a}$.

## O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsiyalar yig'indisi, songa ko'paytmasi, o'zaro ko'paytmasi va nisbatlarining hosila va differentsiallarini hisoblash qoidalari nimalardan iborat?
2. Elementar funktsiyalarning birinchi tartibli hosilalarini yozing?
3. Murakkab funktsiyaning hosilasi qanday topiladi.
4. Murakkab funktsiya birinchi tartibli differentsialining invariantlik xossasi deganda nimani tushunasiz?
5. Logarifmlab differentsiallash jarayoni nimalardan iborat?
6. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar qanday aniqlanadi?
7. Qanday hollarda murakkab funktsiya yuqori tartibli differentsiali uchun invariantlik xossasi o'rinli va qanday hollarda o'rinli emas?
8. Teskari funktsiya hosilasini topish formulasini yozing?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Differentsiallash qoidalari.
2. Yig'indining hosila va differentsiali.
3. Ko'paytmaning hosila va differentsiali.
4. Bo'linmaning hosila va differentsiali.
5. Murakkab funktsiya hosilasi va differentsiali.
6. Murakkab funktsiya birinchi tartibli differentsialining invariantligi.
7. Logarifmlab differentsiallash.
8. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar.
9. Teskari funktsiya hosilasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**25.1.** Differentsiallash qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funktsiyalarning birinchi tartibli hosilalarini toping:

1) $\mathbf{y = 3x - 2\sqrt{x}}$ **;** $y'(1)$, $y'(\frac{1}{4})$ larni hisoblang?

2) $y = \dfrac{x^2 - 5x - 1}{x^3}$; $y'(-1)$, $y'(2)$ larni hisoblang?

3) $y = \dfrac{3}{5 - x} + \dfrac{x^2}{5}$; $y'(0)$, $y'(2)$ larni hisoblang?

4) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$; $y'(1)$ ni hisoblang?

5) $y = (\sqrt{x^3} + 1) \cdot x$; $y'(0)$ ni hisoblang?

6) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; $y'(0)$, $y'(1)$ larni hisoblang?

7) $y = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$;  8) $y = \dfrac{x}{1 - \cos x}$;

9) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$;  10) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$;

11) $y = x\arcsin x + \sqrt{x}$;  12) $y = \dfrac{x}{1 + x^2} - \text{arctg}x$;

13) $y = x^2\, log_4\, x$;  14) $y = (x^2 - 2x + 3)\, e^x$.

**25.2.** Quyidagi funktsiyalarni differentsiallang:

1) $y = (x^2 + x + 2)^{\frac{3}{2}}$; $y'(1)$ ni toping?

2) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $y'(2)$ ni toping?

3) $y = (3x^2 - \dfrac{4}{x} + 6)^5$;  4) $y = (1 - 2x^{\frac{1}{2}})^6$;

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$;  6) $y = \sqrt{1 + 2\text{ctg}x}$;

7) $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$;  8) $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$;

9) $y = \dfrac{\cos^2(1 - \sqrt{x})}{1 + \sqrt{x}}$;  10) $y = \arccos\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

11) $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$;  12) $y = \text{arctg}(x\text{-}\sqrt{1 + x^2})$ ;

13) $y = \sqrt{1 + ln^2 x}$;  14) $y = ln(x^2 - 4x)$;

15) $y = \text{arctg}[ln(3x + 2)]$;  16) $y = e^{\arcsin 2x}$;

17) $y = \sin(e^{3x-2})$;  18) $y = 4^x \cdot x^4$;

19) $y = x - \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$;  20) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$;

21) $y = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$;  22) $y = ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x)$;

23) $y = x^{\frac{1}{x}}$;  24) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

25) $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;  26) $y = (1 + x^2)^{\sin x}$.

**25.3.** Berilgan funktsiyalarning yuqori tartibli hosilalarini toping:

a) $y = x^3 + 3x - 4$; $y'' = ?$  b) $y = (x + 4)^5$; $y''' = ?$

v) $y = x^6 - 4x^3 + 4$;  $y^{(4)} = ?$  g) $y = e^{2x+1}$;  $y''(0) = ?$

d) $y = \text{arctg } x$;  $y''(1) = ?$  e) $y = \dfrac{1}{1-x}$;  $y^{(5)}$ **= ?**

25.4. Funktsiyalarning n - tartibli hosilalarining umumiy ifodasini toping:

1) $y = e^{2x}$;  2) $y = e^{-x}$;  3) $y = \sin ax + \cos bx$;

4) $y = \sin^2 x$;  5) $y = \dfrac{1}{2}x + 1$;  6) $y = ln(ax + b)$.

25.5. Yuqori tartibli differentsiallarni toping:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$;  $d^2y = ?$  b) $y = x^p$; $d^3y = ?$

v) $y = e^{-3x}$;  $d^2y = ?$  g) $y = \sin^2 x$;  $d^3y = ?$

**25.6.** Berilgan funktsiyalarning teskari funktsiyalari hosilalarini toping:

**1)** $y = e^{\arcsin x}$;  **2)** $y = \dfrac{1-x^4}{1+x^4}$;  **3)** $y = xe^{-x}$.

# §26. DIFFERENTsIALLANUVCHI FUNKTSIYA UCHUN O'RTA QIYMAT HAQIDA TEOREMALAR. TEYLOR FORMULASI. LOPITAL QOIDASI.

## 1. Differentsiallanuvchi funktsiya uchun o'rta qiymat haqida Roll va Lagranj teoremalari

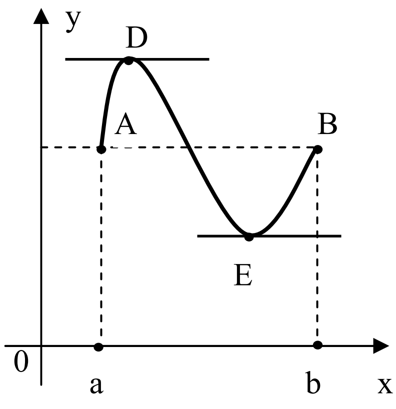
Differentsiallanuvchi funktsiyalar uchun **o'rta qiymat** haqidagi teoremalar nomini olgan tasdiqlardan asosiylari bilan tanishamiz.

**Roll teoremasi**: $y = f(x)$ funktsiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar funktsiya $(a; b)$ intervalda differentsiallanuvchi bo'lib, $f(a) = f(b)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli hech bo'lmaganda bitta shunday bir s nuqta topiladiki, $f'(s) = 0$ bo'ladi.

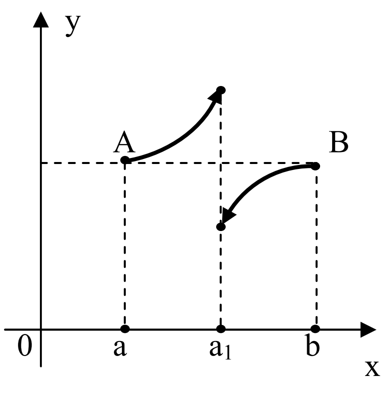
Teoremani geometrik izohlaydigan bo'lsak, teorema shartlari bajarilganda, $u = f(x)$ funktsiya grafigi AV yoyga tegishli hech bo'lmaganda bitta (26.1 –rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma 0x abstsissalar o'qiga parallel bo'ladi. Teoremaning har bir sharti ahamiyatlidir, chunki ulardan biri bajarilmasa, $(a; b)$ intervalda $f'(s) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi s nuqta topilmasligi mumkin. Masalan, 26.2 –rasmda grafigi keltirilgan funktsiya uchun uzluksizlik sharti bajarilmagan, $a_1$ nuqta uning uzilish nuqtasi.

26.3 – rasmda tasvirlangan funktsiya uchun esa uning differentsiallanuvchanlik sharti bajarilmagan, $a_2$ nuqtada funktsiya hosilaga ega emas. Egri chiziqlarga tegishli va $(a; b)$ interval doirasida urinmalari 0x o'qiga parallel bo'ladigan biror – bir nuqta mavjud emas.

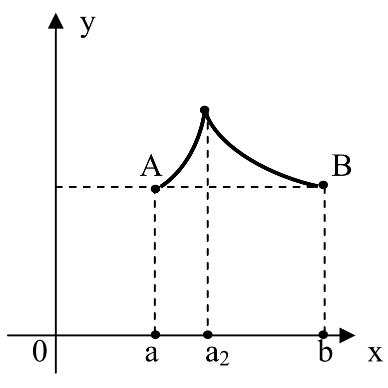
Lagranj teoremasi: $u = f(x)$ funktsiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $(a; b)$ intervalda differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli kamida bitta s nuqta topiladiki, $f(b) - f(a) = f'(s) \cdot (b-a)$ munosabat o'rinli bo'ladi.



26.1 - rasm.



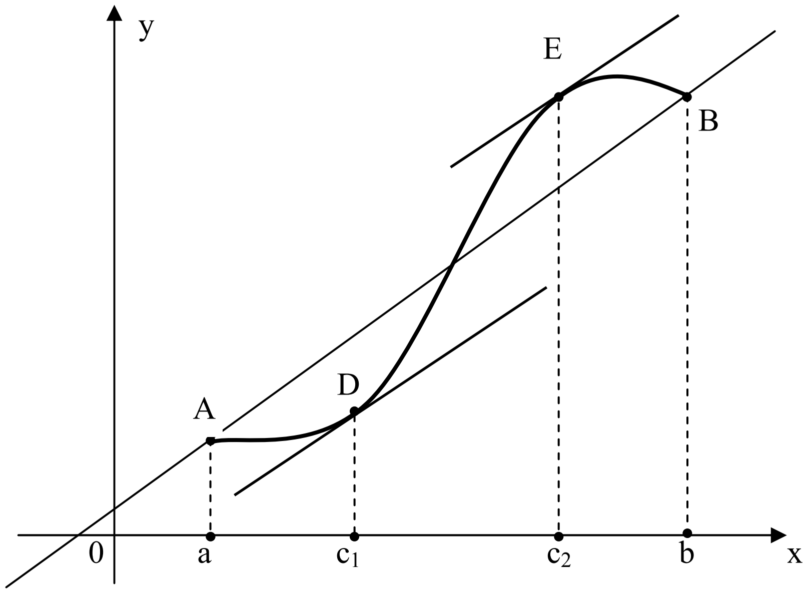
26.2 – rasm.



26.3 - rasm.

Lagranj teoremasida Roll teoremasidagidek, funktsiyaning $[a; b]$ kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlarga erishishi talab qilinmaydi. Teoremadan xususiy $f(a) = f(b)$ holda, $f'(s) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, shu ma'noda Lagranj teoremasi Roll teoremasining umumlashmasi hisoblanadi.

Teoremani geometrik izohlaydigan bo'lsak, uning har bir sharti o'rinli bo'lganda, $u = f(x)$ funktsiya grafigi AV yoyga tegishli hech bo'lmaganda bitta (26.4–rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma AV vatarga parallel bo'ladi.




26.4-rasm.

Agar $b = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, c nuqtani $s = a + \theta(b - a) = = a + \theta\Delta x$ ($\theta \in (0; 1)$) ko'rinishda ifodalash mumkin. Almashtirishlar e'tiborga olinsa, **Lagranj formulasi** $f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta\Delta x)\Delta x$ shaklda yoziladi va **Lagranjning chekli orttirmalar formulasi** deyiladi.

## 2. Teylor – Makloren formulalari va ularning qo'llanilishi.

$u = f(x)$ funktsiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda atrofga tegishli har bir x uchun **Teylor formulasi**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

tengligi o'rinli bo'ladi, bu erda $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ - Teylor formulasining Lagranj shaklidagi **qoldiq hadi** deb yuritiladi.

Agar $x = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, Teylor formulasi

$$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

($\theta \in (0; 1)$) **Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasi** deb ataladigan ko'rinishini oladi.

**Agar Teylor formulasida $a = 0$ bo'lsa, ushbu**

$$f(a) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\theta \in (0; 1))$$

**Makloren formulasi** deb ataladigan formulani olamiz.

Teylor – Makloren formulalari funktsiyalarni ko'phad shaklida ifodalashda, funktsiyalarning taqribiy qiymatlarini hisoblashda, funktsiyalarni tekshirish va limitlarni aniqlashda qo'llaniladi.

Masalan, $x = 0$ nuqta atrofidagi har bir $x$ uchun quyidagilar o'rinli:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$

2) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x);$

3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x);$

4) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$

### 3. Aniqmasliklarni ochish Lopital qoidasi.

**Lopital qoidasi:** $a$ nuqtaning biror atrofida differentsiallanuvchi, nuqtaning o'zida differentsiallanuvchi bo'lishi shart bo'lmagan $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar uchun, shu atrofda $g'(x) \neq 0$ va yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ shartlar o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli.

Yuqoridagi qoida $a$ ni $\infty$ bilan almashtirilgan hol uchun ham o'rinli.

Lopital qoidasi $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni ochishda qo'llaniladi. Agar $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbat $x = a$ nuqtada $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklardan iborat bo'lsa, u holda qoida $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatga qo'llaniladi va jarayon aniqmaslik ochilmaguncha davom ettiriladi.

Algebraik almashtirishlar yordamida $(0 \cdot \infty)$ yoki $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklarning biriga keltiriladi, so'ngra Lopital qoidasi qo'llanilib, aniqmasliklar ochiladi.

Dastlab logarifmlash yo'li bilan esa $(1^{\infty})$, $(\infty^0)$, $(0^0)$ ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklarga keltiriladi.

Misollar. Lopital qoidasini qo'llab, limitlarni toping:

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{ln(x+4)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2-x-12)'}{[ln(x+4)]'}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x-1}{\dfrac{1}{x+4}}=-7$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot tg\dfrac{\pi x}{2}\right]=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)'}{(ctg\dfrac{\pi x}{2})'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{-\pi}=-\dfrac{2}{\pi}$.

## O'z - o'zini tekshirish uchun savollar

1. Differentsiallanuvchi funktsiya uchun o'rta qiymat haqidagi Roll teoremasini bayon qiling va uning geometrik ma'nosini izohlang?
2. O'rta qiymat haqidagi Lagranj teoremasi nimani tasdiqlaydi va teoremaning geometrik ma'nosini chaqing?
3. Lagranjning chekli orttirmalar formulasini yozing?
4. Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi deyish mumkinmi va nima uchun?
5. Teylor formulasi nimani aniqlab beradi va uni yozing?
6. Teylor formulasining Lagranj shaklidagi qoldiq hadini yozing?
7. Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasini yozing va uni Lagranjning chekli orttirmalar formulasi bilan solishtiring?
8. Makloren formulasi deb, qanday formulaga aytiladi?
9. Teylor – Makloren formulalarining qo'llanilishini gapirib bering?
10. Lopital qoidasi nimalardan iborat?
11. Lopital qoidasi yordamida $(0\cdot\infty)$, $(\infty - \infty)$, $(0^0)$, $(1^{\infty})$ va $(\infty^0)$ aniqmasliklarni ham ochish mumkinmi va qanday qilib?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Differentsiallanuvchi funktsiya uchun o'rta qiymat.
2. Lagranj formulasi.
3. Lagranjning chekli orttirmalar formulasi.
4. Teylor formulasi.
5. Teylor formulasining qoldiq hadi.
6. Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasi.
7. Makloren formulasi.
8. Lopital qoidasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**26.1.** Roll teoremasi tasdig'ini quyidagi kesmalarda berilgan funktsiyalar uchun tekshirib ko'ring:

**a)** $[1; 2]$ : $u = x^2 - 3x + 8$; **b)** $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ : $y = \log_2 \cos x$;

**v)** $[0; \pi]$ : $y = e^{\sin x}$; **g)** $[-1; 2]$ : $y = \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7x - 6}$.

**26.2.** Lagranj teoremasi tasdig'ini quyidagi kesmalarda berilgan funktsiyalar uchun tekshirib ko'ring:

**a)** $[0; 3]$ : $y = x^2$; **b)** $[e; e^2]$ : $y = \ln x$.

**26.3.** Quyidagi funktsiyalar uchun berilgan kesmalarda Lagranj formulasini yozing:

**a)** $y = \sin 2x$, $[\alpha; \beta]$; **b)** $y = x - x \cdot \ln x$, $[1; 1 + \Delta x]$.

**26.4.** **a)** $y = \frac{1}{x}$ funktsiya uchun a = 1 nuqtada Teylorning n - tartibli formulasini yozing?

**b)** $y = \sqrt{x}$ funktsiya uchun a = 4 nuqtada Teylorning 3 – tartibli formulasini yozing?

**v)** $y = \cos^2 x$ funktsiya uchun $a = 0$ nuqtada Teylorning 2 – tartibli formulasini yozing?

**26.5.** **a)** $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ko'phadni $x + 1$ ikkihad darajalari bo'yicha yoying?

**b)** $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ ko'phadni $x - 4$ ikkihad darajalari bo'yicha yoying?

**v)** $f(x) = x^8 - 2x + 5x^6 - x + 3$ funktsiyaning $a = 2$ nuqtada Teylor formulasiga yoyilmasining dastlabki uchta hadini toping va $f(2{,}01)$, $f(1{,}98)$ larni taqriban hisoblang?

**26.6.** $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ taqribiy hisoblash formulalarini qo'llab,

**a)** $e^{0{,}02}$; **b)** $\sqrt{e}$;

**v)** $e^{-0{,}1}$ sonli ifodalarni hisoblang?

**26.7.** $\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ formulani qo'llab,

**a)** $\ln 1.01$; **b)** $\ln 0{,}95$ sonli ifodalarni hisoblang?

**26.8.** Lopital qoidasini qo'llab, funktsiya limitlarini toping:

**1)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$; **2)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\ln \cos x}$;

**3)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}$; **4)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$;

**5)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^6-1}$;

**6)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$;

**7)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$;

**8)** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2\cdot e^{-x})$;

**9)** $\lim\limits_{x\to \infty}[(\pi-2\operatorname{arctg}x)\cdot \mathit{ln}x]$;

**10)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\mathit{ln}x}-\dfrac{1}{\mathit{ln}x}\right)$;

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

**12)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)x\right]$;

**13)** $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot e^{\frac{1}{x}})$;

**14)** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$;

**15)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

**16)** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

**17)** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

# §27. FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TO'LA TEKSHIRISH VA UNING GRAFIGINI CHIZISH.

## 1. Funktsiyaning o'sish va kamayish shartlari.

$y = f(x)$ funktsiya (a,b) intervalda aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lsin.

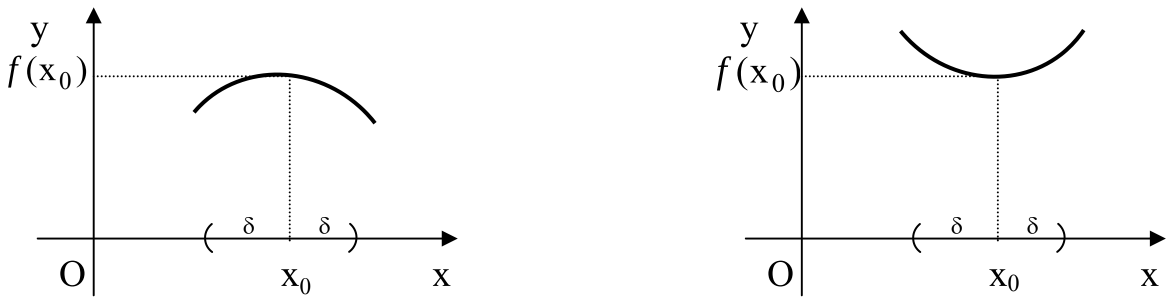
Teorema. $y = f(x)$ funktsiya (a,b) intervalda kamaymaydigan (o'smaydigan) funktsiya bo'lishi uchun (a,b) intervalning barcha nuqtalarida $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) bo'lishi zarur va etarli.

Misol. $f(x) = x^2e^{-x}$ funktsiya uchun $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Agar $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ bo'lsa, $f'(x) < 0$ bo'ladi va bu oraliqlarda funktsiya qat'iy kamayadi; $x \in (0,2)$ bo'lsa, $f'(x) > 0$ bo'ladi va bu oraliqda funktsiya qat'iy o'sadi.

## 2. Funktsiyaning ekstremum nuqtalari.

Agar $x_0$ nuqtaning $\delta$ atrofi mavjud bo'lib, barcha $x \in (x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ nuqtalar uchun $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0$ nuqta $f(x)$ funktsiyaning qat'iy bo'lmagan minimum (qat'iy bo'lmagan maksimum) nuqtasi deyiladi.

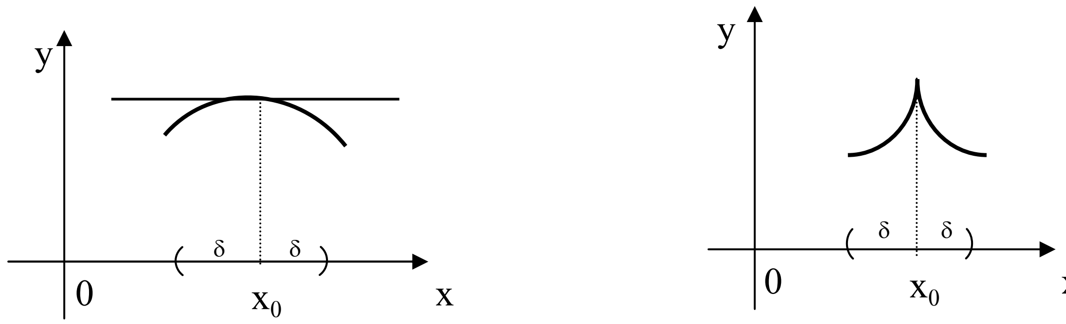
Agar ko'rsatilgan $\delta$ atrofda ($x \neq x_0$) qat'iy $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) tengsizlik bajarilsa, $x_0$ nuqtaga qat'iy minimum (qat'iy maksimum) nuqta deyiladi (27.1-rasm). Funktsiyaning qat'iy maksimum va minimum nuqtalari uning **ekstremum nuqtalari** deb ataladi.




27.1-rasm

Teorema. (ekstremumning zaruriy sharti). Agar $x_0$ nuqta funktsiyaning ekstremum nuqtasi bo'lib, funktsiya $x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsa, u holda yoki $f'(x_0) = 0$, yoki $f'(x_0)$ – mavjud emas.

$y = f(x)$ funktsiya aniqlanish sohasining ichki nuqtalari bo'lib, funktsiya hosilasi nolga aylanadigan yoki mavjud bo'lmaydigan nuqtalarga **kritik nuqtalar** deyiladi (27.2-rasm). Funktsiyaning ekstremum nuqtalari uning kritik nuqtalari orasidan tanlaniladi.




$f'(x_0)=$ $\qquad$ $f'(x_0)$ – мавжуд

27.2 – rasm.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ funktsiya uchun $f'(x)=\dfrac{x+2}{3\sqrt[3]{x^5}}$ bo'ladi. Demak, x=-2 da $f'(-2)=0$, x=0 da esa $f'(x)$ mavjud emas. Funktsiyaning ekstremum nuqtalari mavjud bo'lsa, bu nuqtalar x=0 va x=-2 kritik nuqtalar bo'lishi mumkin.

Funktsiyaning birinchi tartibli hosilasini 0 ga aylantiradigan kritik nuqtalariga, uning statsionar nuqtalari deyiladi.

Ekstremumning etarlilik shartlari:

1) Birinchi tartibli hosila bo'yicha tekshirish: Aytaylik, $y=f(x)$ funktsiya $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ da aniqlangan va $x_0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi shart emas, ammo uzluksiz bo'lsin. Agar $f'(x)$ hosila $(x_0-\delta,\ x_0)$ va $(x_0,\ x_0+\delta)$ intervallarda qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda $x_0$ nuqta ekstremum nuqtasi bo'ladi:

a) $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ da $f'(x)>0$ va $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsa, ya'ni $x_0$ nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, $x_0$ nuqta qat'iy maksimum nuqtasi;

b) $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ uchun $f'(x)<0$ va $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ uchun esa $f'(x)>0$ bo'lsa, ya'ni $x_0$ kritik nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, $x_0$ nuqta qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

Agar $f'(x)$ barcha $x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, $x\neq x_0$ nuqtalarda o'z ishorasini saqlab qolsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funktsiyaning ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

2) Ikkinchi tartibli hosila bo'yicha tekshirish: Aytaylik, $x_0$ nuqta statsionar nuqta bo'lib, $f'(x_0)=0$ bo'lsin. $y=f(x)$ funktsiya $x_0$ statsionar nuqta atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, u'' uzluksiz bo'lsin. U holda:

a) agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funktsiyaning qat'iy maksimum nuqtasi bo'ladi;

b) agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, $x_0$ nuqta $f(x)$ funktsiyaning qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi;

v) agar $f''(x_0)=0$ bo'lsa, $x_0$ nuqtada ekstremumning mavjudlik masalasi ochiq qoladi.

3) Yuqori tartibli hosilalar bo'yicha tekshirish. Aytaylik,

$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$, bo'lib, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lsin. U holda:

a) agar n juft bo'lib, $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsa, $x_0$ nuqta qat'iy maksimum nuqtasi, $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsa, qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi;

b) n toq bo'lsa, $x_0$ nuqta ekstremum nuqtasi bo'lmaydi.

*1-misol.* $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ funktsiya uchun x=-2 va x=0 nuqtalar kritik nuqtalar edi. Bu nuqtalar sonlar o'qini uchta intervallarga bo'ladi: (-∞, -2), (-2, 0), (0, +∞). Hosil qilingan intervallarda hosila ishorasini aniqlaymiz:

(-∞, -2) intervalda $f'(-3)>0$;

(-2, 0) intervalda $f'(-1)<0$;

(0, +∞) intervalda $f'(3)>0$.

Demak, faqat x=-2 nuqta ekstremum – maksimum nuqta bo'lib, x=0 nuqta ekstremum nuqta emas, chunki bu nuqtada funktsiya aniqlanmagan. Shunday qilib, funktsiya $f(-2)=-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ ga teng bo'lgan ekstremal maksimum qiymatga ega.

*2-misol.* $f(x)=x^3-3x^2$ funktsiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

Bu funktsiya uchun $f'(x)=3x(x-2)$ bo'ladi. x=0 va x=2 da $f'(x)=0$. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x)=6x-6$ bo'lib, $f''(0)=-6<0$ va $f''(2)=6>0$. Demak, x=0 nuqta funktsiyaning qat'iy maksimum nuqtasi, x=2 nuqta esa qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtalarda, mos ravishda, funktsiyaning qiymatlari $f(0)=0$ va $f(2)=-4$ ga teng bo'ladi.

*3-misol.* $f(x)=x^4$ funktsiyaning ekstremum nuqtalarini toping. Bu funktsiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{IV}(x)=24$ bo'ladi va $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, $f^{IV}(0)=24>0$ bajariladi. Demak, x=0 nuqta qat'iy minimum nuqtasi bo'ladi.

## 3. Funktsiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari.

$y=f(x)$ funktsiya $V\subseteq R^1$ to'plamda aniqlangan va $x_0\in V$ bo'lsin.

Agar barcha $x\in V$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0$ nuqtada $f(x)$ funktsiya V to'plamda o'zining eng katta qiymati $f(x_0)$ ni qabul qiladi va aksincha, barcha $x\in V$ uchun $f(x)\geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0$ nuqtada $f(x)$ funktsiya V to'plamda o'zining eng kichik qiymatini qabul qiladi.

Agar $f(x)$ [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda funktsiya kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Funktsiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funktsiyaning [a,b] kesmada barcha kritik nuqtalari topiladi;

b) funktsiyaning kritik nuqtalardagi va berilgan kesmaning chetki x=a va x=b nuqtalaridagi

qiymatlari hisoblanadi;
v) bu qiymatlar ichidan eng katta va eng kichigi tanlab olinadi.

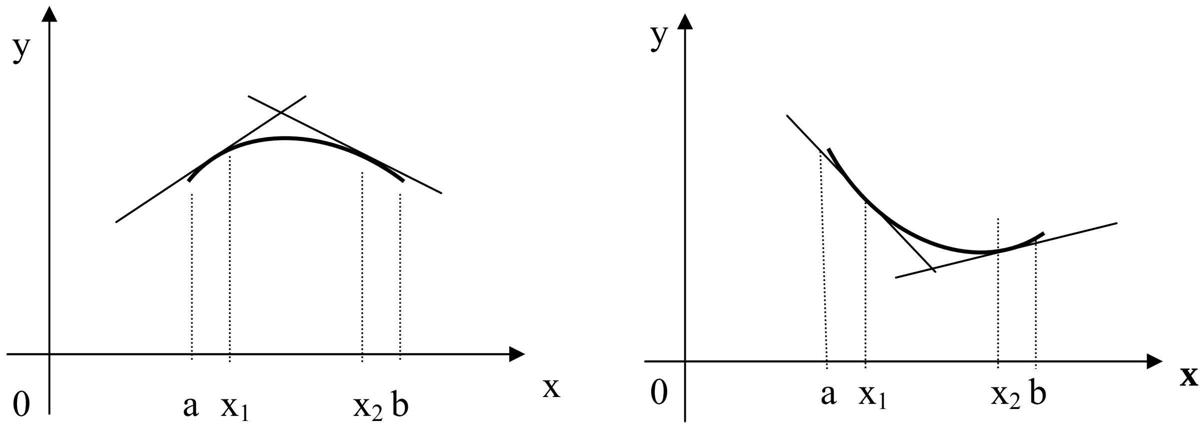
Misol. $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$ funktsiyaning [-5,-1] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Echish. a) Birinchi tartibli hosilasini topamiz: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2}$.

b) [-5,-1] kesmaga tegishli bo'lgan kritik nuqtalarni ajratib olamiz.
y'(x)=0 tenglamadan $x_1$=-2 va $x_2$=4 topiladi. x=-2 nuqta [-5,-1] kesmaga tegishli, x=4 statsionar nuqta va x=1 uzilish nuqtasi esa kesmaga kirmaydi.
v) x=-5, x=-2 va x=-1 nuqtalarda funktsiyaning qiymatlarini hisoblaymiz y(-5)=-5,5; y(-2)=-4; y(-1)=-4,5.
g) Topilgan qiymatlarni taqqoslab, funktsiya x=-2 kritik nuqtada eng katta y(-2)=-4 va x=-5 nuqtada esa eng kichik y(-5)=-5,5 qiymatga erishini aniqlaymiz.

## 4. Funktsiya grafigining qavariqligi. Egilish nuqtalari.

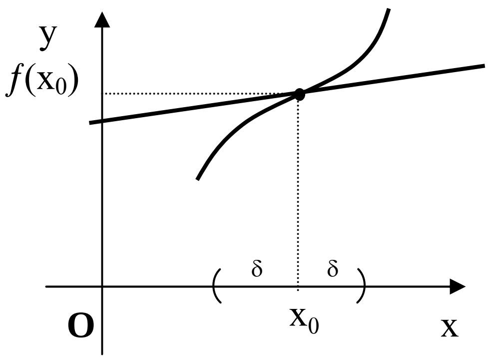
$y = f(x)$ differentsiallanuvchi funktsiya grafigi (a,b) da, agar bu interval ichidagi har bir nuqtada o'tkazilgan urinmadan quyida (yuqorida) joylashsa, **qavariqligi bilan yuqoriga (quyiga) yo'nalgan** deyiladi (27.3-rasm).




27.3-rasm.

Funktsiya grafigi qavariqligining etarlilik shartlari. $y = f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda aniqlangan va ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lsin. U holda:
a) agar (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $f''(x)<0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiyasining grafigi bu oraliqda qavariqligi bilan yuqoriga yo'nalgan;
b) agar (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida $f''(x)>0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiyaning grafigi bu oraliqda qavariqligi bilan quyiga yo'nalgan bo'ladi.

Agar $x_0$ nuqtaning shunday $\delta$ atrofi mavjud bo'lsaki, $(x_0-\delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ oraliqlarda qavariqlik turlicha yo'nalgan va $x_0$ abstsissali nuqtada urinma mavjud bo'lsa, $(x_0, f(x_0))$ nuqta $y = f(x)$ funktsiya grafigining **egilish nuqtasi** deyiladi (27.4-rasm).




27.4-rasm

$(x_0, f(x_0))$ funktsiya grafigining egilish nuqtasi bo'lsin. U holda $f''(x_0)=0$ shart yoki $f''(x_0)$ – mavjud emasligi, berilgan nuqta egilish nuqta bo'lishligining zaruriy shartlaridan iborat.

Faraz qilaylik, $(x_0, f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funktsiya grafigiga urinma o'tkazish mumkin bo'lsin va $x_0$ nuqtadan tashqari barcha $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ nuqtalarda $f''(x)$ mavjud bo'lsin. $x_0$ nuqtada esa $f''(x)=0$ yoki $f''(x)$ mavjud bo'lmasin. Agar $(x_0-\delta, x_0)$ va $(x_0, x_0+\delta)$ oraliqlarda $f''(x)$ qarama-qarshi ishoraga ega bo'lsa, u holda $(x_0, f(x_0))$ nuqta $y = f(x)$ funktsiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (egilish nuqta bo'lishligining etarlilik sharti).

## 5. Egri chiziqlarning asimptotalari.

$y = f(x)$ funktsiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funktsiya grafigining **asimptota**si deb ataladi.

a) **Vertikal asimptotalar**. Vertikal asimptota uchun $f(x)$ funktsiya cheksizlikka aylanadigan x=a qiymatni, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ni topish kerak. Shunda x=a to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Misol. $y = \dfrac{1}{x+3}$ funktsiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Echish. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{x+3} = \infty$, shuning uchun x=-3 to'g'ri chiziq berilgan funktsiya uchun vertikal asimptota bo'ladi.

b) **Og'ma asimptotalar**. Og'ma asimptota tenglamasi y=kx+b ko'rinishga ega. Bu erda k va b mos ravishda

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ ,\ b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

formulalardan topiladi.

Misol. $y=\dfrac{x^2}{x+3}$ funktsiya grafigining asimptotasini toping.

Echish. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2}{x+3}=\infty$ bo'lgani uchun x=-3 to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

y=kx+b og'ma asimptotani izlaymiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+3}=-3\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=-3.$$

Demak, y=x-3 - og'ma asimptotadir.

## 6. Funktsiya grafigini yasashning umumiy sxemasi.

Funktsiyani tekshirish va grafigini yasash quyidagi umumiy sxema bo'yicha bajariladi:

1) Funktsiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uzilish nuqtalari aniqlanadi va ularning atrofida funktsiyaning o'zini tutishi tekshiriladi.

2) Funktsiya juft ( $f(-x)=f(x)$, $\pm x\in D(f)$), toqligi ( $f(-x)=-f(x)$, $\pm x\in D(f)$) yoki juft ham emas, toq ham emasligi aniqlanadi. Agar funktsiyaning juft yoki toqligi aniqlansa, funktsiyani musbat yoki manfiy haqiqiy sonlar yarim o'qida tekshirish etarli.

Agar funktsiya juft funktsiya bo'lsa, bu funktsiyaning grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik, toq bo'lsa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Davriy yoki davriymasligi aniqlanadi. Davriy funktsiyani bir davr oralig'ida tekshirish etarli.

3) Funktsiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topiladi. Ox o'qi bilan kesishish nuqtalari $\begin{cases}y=f(x)\\ y=0\end{cases}$ sistema, Oy o'qi bilan kesishish nuqtalari esa $\begin{cases}y=f(x)\\ x=0\end{cases}$ cistemani echish bilan topiladi. Funktsiya grafigining asimptotalari quriladi.

4) Funktsiyaning o'sish va kamayish intervallari, maksimum va minimum nuqtalari topiladi. Yig'ilgan ma'lumotlar jadval ko'rinishda tuziladi.

5) Funktsiya grafigining qavariqligi va egilish nuqtalari topiladi.

6) Funktsiya grafigi yasaladi.

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Intervalda qat'iy o'suvchi va qat'iy kamayuvchi funktsiya ta'rifini bering.

2. Intervalda qat'iy bo'lmagan o'suvchi va qat'iy bo'lmagan kamayuvchi funktsiya ta'rifini ifodalang.
3. Funktsiyaning qat'iy va qat'iy bo'lmagan maksimum va minimum nuqtalarini ta'riflang.
4. Funktsiyaning ekstremum nuqtalari deb nimaga aytiladi?
5. Funktsiyaning kritik nuqtalarini ta'riflang.
6. Ekstremumning zaruriy shartini ifodalang.
7. Funktsiya ekstremumi etarlilik shartini birinchi tartibli hosila yordamida ifodalang.
8. Funktsiya ekstremumi etarlilik shartini ikkinchi tartibli hosila yordamida ta'riflang.
9. Funktsiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?
10. Funktsiya grafigining qavariqligi hamda egilish nuqtalari ta'rifini bering.
11. Funktsiyani umumiy tekshirish va grafigini yasash sxemasini bayon qiling.

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Qat'iy o'suvchi va qat'iy kamayuvchi funktsiya.
2. Qat'iy bo'lmagan o'suvchi va qat'iy bo'lmagan kamayuvchi funktsiya.
3. Qat'iy va qat'iy bo'lmagan maksimum va minimum nuqtalar.
4. Funktsiyaning ekstremum nuqtalari.
5. Funktsiyaning kritik nuqtalari.
6. Funktsiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari.
7. Funktsiya grafigining qavariqligi, egilish nuqtalari.
8. Statsionar nuqtalar.

## Mustaqil echish uchun misollar.

**27.1.** Funktsiyaning monotonlik oraliqlarini toping:

**a)** $y=x^2-4x-1$; **b)** $y=3x-x^3$;

**v)** $y=xe^{-x}$ ; **g)** $y=x-2\sin x,\quad 0\le x\le 2\pi$;

**d)** $y=(x-1)^3\cdot(2x+3)^2$; **e)** $y=\dfrac{e^x}{x}$;

**j)** $y=x^2 \ln x$; **z)** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$;

**i)** $y=(x+1)\sqrt{x^2-1}$; **k)** $y=\dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$.

**27.2.** Funktsiyalarning ekstremumlarini toping:

**a)** $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x-1$; **b)** $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

**v)** $y=\dfrac{\ln x}{x}$; **g)** $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

**d)** $y = x + \frac{1}{x}$;

**e)** $y = xe^{-2x}$;

**j)** $y = 2\sin x + \cos 2x$;

**z)** $y = \frac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$;

**i)** $y = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$;

**k)** $y = x^3 \cdot e^{-4x}$.

**27.3.** Funktsiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

**a)** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2; \frac{5}{2}]$;

**b)** $y = x^2 ln x, \quad [1; e]$;

**v)** $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}, \quad [0; 1]$;

**g)** $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, \quad [0; 1]$;

**d)** $y = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}, \quad [-1; 1]$;

**e)** $y = xe^{-x}, \quad [0; +\infty)$;

**j)** $y = 2\sin x + \sin 2x, \quad [0; \frac{3\pi}{2}]$;

**z)** $y = x - 2ln x, \quad [\frac{3}{2}; e]$;

**i)** $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2]$;

**k)** $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}, \quad [-1; 1]$.

**27.4.** Quyidagi funktsiyalar grafigining qavariqlik hamda egilish nuqtalarini toping:

**a)** $y = \frac{x}{1+x^2}$;

**b)** $y = x + x^{\frac{5}{3}}$;

**v)** $y = ln(1+x^2)$;

**g)** $y = \mathrm{arctg} x - x$;

**d)** $y = \frac{1}{1-x^2}$;

**e)** $y = x^5 - 10x^2 + 3x$.

**27.5.** Funktsiyalarni tekshiring va grafigini chizing.

**a)** $y = (x+2)(x-1)^2$;

**b)** $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

**v)** $y = x + \frac{1}{x}$;

**g)** $y = x\sqrt{1-x}$;

**d)** $y = x - \mathrm{arctg} x$;

**e)** $y = x ln x$;

**j)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

**z)** $y = \sin x \cdot \sin 3x$;

**i)** $y = e^x - x$;

**k)** $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

## §28. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI

### 1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari.

$y = f(M)$ funktsiya $M_0(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo'lsin. $M_i(x_1^0,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)$ nuqtani qaraymiz. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i}$ mavjud bo'lsa, u holda bu chekli limitga $y = f(M)$ funktsiyaning $M_0$ nuqtadagi xususiy hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $y'_{x_i}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, $\left.\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_i}\right|_{M=M_0}$, $f'_{x_i}$.

Shunday qilib, $\left.\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_i}\right|_{M=M_0} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i} =$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0) - f(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

Xususiy hosilaning ta'rifidan shu narsa kelib chiqadiki, $y = f(M)$ dan $x_i$ bo'yicha xususiy hosilani topishda $x_1$, ... , $x_{i-1}$, $x_{i+1}$, ... , $x_n$ o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qarab, $x_i$ bo'yicha oddiy hosila topilar ekan.

1-Misol. $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^5 \cdot x_3^2 - 3x_1 \cdot x_2^4 + 7x_2 - 9$

Barcha o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalarni toping.

Echish.

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1^5 \cdot x_3^2 - 3x_1 \cdot x_2^4 + 7x_2 - 9) = 10x_1^4 \cdot x_3^2 - 3x_2^4$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1^5 \cdot x_3^2 - 3x_1 \cdot x_2^4 + 7x_2 - 9) = -12x_1 \cdot x_2^3 + 7$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}(2x_1^5 \cdot x_3^2 - 3x_1 \cdot x_2^4 + 7x_2 - 9) = 4x_1^5 \cdot x_3$$

2-Misol. $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ funktsiyaning $M_0(-4;3)$ nuqtada xususiy hosilalarini toping.

Echish. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = -\frac{4}{5}; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = \frac{3}{5}$$

## 2. Ko’p o’zgaruvchili funktsiyaning to’la orttirmasi.

$y=f(M)$ funktsiya $M_0(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo’lsin. $M_\Delta(x_1^0+\Delta x_1,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)$ nuqtani qaraymiz. $y=f(M)$ funktsiyaning $M_0$ nuqtadagi to’la orttirmasi $\Delta f$ deb, ushbu $f(M_\Delta)-f(M_0)$ ayirmaga teng songa aytiladi, ya’ni

$$\Delta f=f(M_\Delta)-f(M_0)=f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0).$$

3-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ funktsiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to’la orttirmasini toping.

Echish.

$$\Delta f(M_0)=(1+\Delta x_1)^2+(-2+\Delta x_2)^2-[1^2+(-2)^2]=2\Delta x_1+1+\Delta x_1^2+4-$$
$$-4\Delta x_2+\Delta x_2^2-1-4=2\Delta x_1-4\Delta x_2+(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2$$

## 3. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi.

$y=f(M)$ funktsiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo’lsin.

Agar $y=f(M)$ funktsiyaning $\Delta f(M_0)$ to’la orttirmasi $M_0$ nuqtada $\Delta f(M_0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+...+A_n\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+...+\alpha_n\Delta x_n$ ko’rinishda ifoda etilsa, $f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi. Bu erda, $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ - $\Delta x_1$, ... , $\Delta x_n$ larga bog’liq bo’lmagan sonlar, $\alpha_i(i=\overline{1,n})$ лар $\Delta x_i\to 0$ da nolga intiluvchi cheksiz kichik funktsiyalar.

4-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ funktsiya $M_0(1;-2)$ nuqtada differentsiallanuvchi, chunki $\Delta f(M_0)=2\Delta x_1-4\Delta x_2+(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2$ ya’ni

$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2$,

bu erda $A_1=2,\ A_2=-4,\ \alpha_1=\Delta x_1,\alpha_2=\Delta x_2$ ga teng.

5-misol. n o’zgaruvchining chiziqli funktsiyasi

$$f(M)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+b,$$

$R^n$ fazoning ixtiyoriy $M\in R^n$ nuqtasida differentsiallanuvchidir.

a) Agar funktsiya biror nuqtada differentsiallanuvchi bo’lsa, u xolda bu funktsiya ushbu nuqtada uzluksiz bo’ladi;

b) Agar $f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo’lsa, u holda bu funktsiya ushbu nuqtada barcha xususiy hosilalarga ega bo’ladi, shu bilan birga

$$\Delta f=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+...+\alpha_n\Delta x_n \text{ ba}$$

jariladi. Bu erda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ лар $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ ...,\ \Delta x_n \to 0$ da nolga intiluvchi cheksiz kichik funktsiyalar;

v) Agar $f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqta atrofida barcha xususiy hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalar $M_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(M)$ funktsiya bu nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.

## 4. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differentsiali.

Agar $f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, $M_0$ nuqtada $f(M)$ funktsiya to'la orttirmasining bosh chiziqli qismiga $M_0$ nuqtada uning **differentsiali** deyiladi va $df(M_0)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n.$$

Bu erda $dx_1=\Delta x_1,\ dx_2=\Delta x_2,\ ...,\ dx_n=\Delta x_n$ deb olish mumkin. U holda

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}\cdot dx_2+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

ko'rinishda bo'ladi.

6-misol. $f(M)=x_1^3x_2+x_2^2x_3+x_3$ funktsiyaning $M_0(2;\ 1;\ -3)$ nuqtadagi differentsialini toping.

Echish. $f(M)$ ning differentsiali

$$df(M)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot dx_3$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2x_2,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^3+2x_2x_3,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}=x_2^2+1 \qquad \text{va}$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=12,\qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=2,\qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_3}=2 \qquad \text{bo'lgani uchun,}$$

$$df(M_0)=12dx_1+2dx_2+2dx_3$$

bo'ladi.

Differentsialning asosiy xossasi.

Agar $y=f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda cheksiz kichik $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ lar uchun

$$\Delta f(M_0)\approx df(M_0)$$

bajariladi, ya'ni

$$\Delta f(M_0) \approx \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n .$$

Bir necha o'zgaruvchili funktsiya uchun taqribiy hisoblash formulasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(M_\Delta) \approx f(M_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n .$$

7-misol. $1{,}02^{2,01}$ ni taqribiy hisoblang.

Echish. $z = x^y$ funktsiyani qaraymiz. Uning $M_0(1; 2)$ nuqtadagi qiymati $z(M_0) = 1^2 = 1$ ga teng.

$z = x^y$ funktsiyaning to'liq differentsialini topamiz:

$$dz = y\, x^{y-1}\, \Delta x + x^y \ln x\, \Delta y$$

$x=1$, $y=2$, $\Delta x=0{,}02$ va $\Delta y=0{,}01$ ga teng. Shuning uchun

$$dz = 2 \cdot 1^3 \cdot 0{,}02 + 1^2 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

U holda $(1{,}02)^{2,01} \approx f(M_0) + dz = 1 + 0{,}04 = 1{,}04.$

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsiyaning $x_i$ o'zgaruvchi bo'yicha orttirmasi deb nimaga aytiladi va u qanday topiladi?
2. Funktsiyaning xususiy hosilasi nima?
3. Funktsiyaning to'la orttirmasi nima va u qanday ifodalanadi?
4. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differentsiali nima?
5. Differentsiallanuvchi funktsiyaning kanday xossalarini bilasiz?
6. Nuqtada differentsiallanuvchanlikning zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Nuqtada differentsiallanuvchanlikning etarli sharti-chi?
8. Differentsialning asosiy xossasini ifodalab bering.

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. $R^n$ fazoda nuqta.
2. Xususiy hosila.
3. Funktsiyaning orttirmasi.
4. Funktsiyaning to'la orttirmasi.
5. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi.
6. Differentsial.

## Mustaqil echish uchun misollar

**28.1.** Quyidagi funktsiyalarning xususiy hosilalarini toping:

**a)** $z = x - y$; **b)** $z = x^3y - y^3x^2$;

**v)** $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$; **g)** $z = \frac{x - y}{x + y}$;

**d)** $z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; **e)** $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

**j)** $w = xyz + yzv + zvx + vxy$; **z)** $z = (2x + y)^{2x+y}$;

**i)** $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$; **k)** $u = x^{yz}$.

**28.2.** Funktsiyalarning to'la differentsialini toping:

**a)** $z = \frac{x + y}{x - y}$; **b)** $z = \arcsin\frac{x}{y}$;

**v)** $z = \sin(xy)$; **g)** $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;

**d)** $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$; **e)** $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$;

**j)** $z = ln\cos\frac{x}{y}$; **z)** $z = ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

**i)** $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$; **k)** $u = 2^{xyz}$.

**28.3.** Funktsiya to'la differentsialining qiymatini toping:

**a)** $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$;

**b)** $z = e^{xy}$, $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$;

**v)** $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$;

**g)** $z = \sqrt{y^2 - x^2}$, $x = 3$, $y = 5$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$.

**28.4.** Taqribiy hisoblang:

**a)** $1{,}04^{2{,}02}$; **b)** $ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$;

**v)** $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$; **g)** $\sqrt{5 \cdot e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$.

# §29. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI (DAVOMI)

## 1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning gradienti.

$y=f(M)$ funktsiyaning $M_0 \in R^n$ nuqtadagi **gradienti** deb, koordinatalari $M_0$ nuqtadagi $f(M)$ funktsiyaning mos xususiy hosilalar qiymatlariga teng bo'lgan n o'lchovli vektorga aytiladi va $\operatorname{grad} f\big|_{M=M_0}$ ko'rinishda yoziladi:

$$\operatorname{grad} f\big|_{M_0}=\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\right\}$$

1-misol. $f(x_1,x_2)=3x_1^2\cdot x_2-4x_1^3+2x_2^2-5$ funktsiyaning $M_0(1;-1)$ nuqtadagi gradientini toping.

Echish. $\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_1}=6x_1\cdot x_2-12x_1^2$, $\quad \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=-18$,

$\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_2}=3x_1^2+4x_2$, $\quad \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=-1$

Demak, grad $f(M_0)$=(-18, -1) ga teng bo'ladi.

Gradientning asosiy hossasi:

$y=f(M)$ funktsiya $M_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ - n o'lchovli birorta nolmas vektor bo'lsin. $M_t(x_1^0+a_1t,\ x_2^0+a_2t,\ldots,x_n^0+a_nt)$ nuqtani qaraymiz. U holda, agar:

1) ushbu skalyar ko'paytma $\operatorname{grad} f\big|_{M_0}\cdot\alpha<0$ bo'lsa, u holda shunday $T_1>0$ son mavjud bo'ladiki, barcha t, $0<t<T_1$ lar uchun $f(M_t)<f(M_0)$ tengsizlik bajariladi;

2) skalyar ko'paytma $\operatorname{grad} f\big|_{M_0}\cdot\alpha>0$ bo'lsa, u holda shunday $T_2>0$ soni mavjud bo'ladiki, barcha t, $0<t<T_2$ lar uchun $f(M_t)>f(M_0)$ tengsizlik bajariladi.

Berilgan $f(M)$ funktsiyaning $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtada erishadigan qiymatidan katta bo'ladigan nuqtani topish uchun quyidagicha ish tutamiz:

1) ko'chish yo'nalishini tanlaymiz, ya'ni shunday vektor $\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ topamizki, natijada $\operatorname{grad} f\big|_{M_0}\cdot\alpha>0$ bo'lsin;

2) $M_t(x_1^0+a_1t,\ x_2^0+a_2t,\ldots,x_n^0+a_nt)$ nuqtani qaraymiz va $t>0$ parametrni shunday tanlaymizki, $f(M_t)>f(M_0)$ bo'lsin.

2-misol. $f(M)=-3x_1^2-3x_2^2+2x_1\cdot x_2+10x_1-6x_2+2$ funktsiyaning $M_0(-1;1)$

nuqtadagi qiymatidan katta bo'ladigan nuqtani toping.

Echish. Funktsiyaning gradientini topamiz:

$\mathrm{grad}f(\mathrm{M}) = (-6x_1 + 2x_2 + 10; \ -6x_2 + 2x_1 - 6)$. $\mathrm{M}_0$ nuqtadagi qiymati

$\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{M}_0} = (18, -14)$ bo'ladi. Agar $\alpha$=(1,-1) bo'lsa, u holda $\mathrm{grad}f\big|_{\mathrm{M}_0} \cdot \alpha = 18 + 14 = 32 > 0$ bo'ladi. $\mathrm{M}_t$(-1+t; 1-t) nuqtani qaraymiz. U holda $f(\mathrm{M}_t)$=-8t$^2$+32t-22 ga teng bo'ladi va t=2 da $\frac{df(\mathrm{M}_t)}{dt} = 0$ ga teng. Demak, t=2 da $f(\mathrm{M}_t)$ funktsiya eng katta qiymatga erishadi. Agar t=2 bo'lsa, $\mathrm{M}_t$(1,-1) bo'ladi va bu nuqtada $f(\mathrm{M}_t)$=10 ga teng. $\mathrm{M}_0$ nuqtada esa $f(\mathrm{M}_0)$=-22 ga teng edi.

Bir necha o'zgaruvchi funktsiyaning ekstremumini topish gradientlar usulida gradientning asosiy xossasidan foydalaniladi.

## 2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar.

Faraz qilaylik, $\mathrm{M}_0$ nuqta va uning atrofida $f(\mathrm{M})$ funktsiya $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ xususiy hosilaga ega bo'lsin.

Birinchi tartibli xususiy hosilalardan $x_i$ o'zgaruvchilar bo'yicha $\mathrm{M}_0$ nuqtada olingan xususiy hosilalar **ikkinchi tartibli xususiy hosilalar** deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi: $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Turli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan xususiy hosilalarga **aralash xususiy hosilalar** deyiladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalar **uchinchi tartibli xususiy hosilalar** deyiladi va h.k.

3-misol. $f(\mathrm{M}) = 2x_1^5 \cdot x_2^2 - 3x_1^6 + 4x_2^3$ funktsiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Echish.

a) birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1^4 \cdot x_2^2 - 18x_1^5; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1^5 \cdot x_2 + 12 \cdot x_2^2$$

b) ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 40x_1^3 \cdot x_2^2 - 90x_1^4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 20x_1^4 \cdot x_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 4x_1^5 + 24x_2.$$

## 3. Funktsiyaning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta. Ekstremumning zaruriy sharti.

$y = f(M)$ funktsiya $M_0$ nuqta r atrofi $S_r(M_0)$ da aniqlangan bo'lsin.

Agar $M_0$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli barcha $M \in S_r(M_0)$ lar ($M \neq M_0$) uchun $f(M_0) < f(M)$ ($f(M_0) > f(M)$) munosabatlar bajarilsa, $M_0$ nuqta **lokal minimum (maksimum) nuqta** deyiladi.

Lokal maksimum va minimum nuqtalarga funktsiyaning lokal ekstremum nuqtalari deb ataladi.

Agar $M_0 \in R^n$ nuqtada $f(M)$ funktsiyaning gradienti nol vektor bo'lsa, ya'ni

$$\text{grad} f\big|_{M_0} = 0$$

u holda bu nuqta $f(M)$ funktsiyaning **statsionar nuqtasi** deyiladi.

4-misol. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 9x_2 - 5$ funktsiyaning statsionar nuqtasini toping.

Echish: Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ixtiyoriy gradienti $M \in R_2$ nuqtada

$\text{grad} f\big|_M = (2x_1 - x_2 + 6;\ -x_1 + 2x_2 - 9)$ ga teng.

$\text{gradf}\big|_M = 0$ bo'lishi uchun $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 9 = 0 \end{cases}$ bajarilishi kerak. Sistema echimi $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$,

demak $M_0(-1;4)$ statsionar nuqta.

Funktsiya ekstremumining zaruriy sharti.

Agar $y = f(M)$ differentsiallanuvchi funktsiya $M_0$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi xususiy hosilalari nolga teng bo'lish zarur:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

## 4. Ikki o'zgaruvchili funktsiya ekstremumining etarli sharti.

Ikki o'zgaruvchili $y = f(x_1, x_2)$ funktsiya uchun quyidagi belgilashlar kiritaylik:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = B \quad \text{va} \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} = C \quad \text{bo'lsin.}$$

U holda:

1) agar $V^2$-AS<0 bo'lsa, $M_0$ statsionar nuqta lokal ekstremum nuqtasi bo'lib,

   a) A<0 bo'lsa, maksimum nuqtasi;

   b) A>0 bo'lsa, minimum nuqtasi.

2) agar $V^2$-AS>0 bo'lsa, u holda $M_0$ statsionar nuqta ekstremum nuqtasi bo'lmaydi;

3) agar $V^2$-AS=0 bo'lsa, u holda bu nuqta ekstremum nuqtasi bo'lishi ham, bo'lmasligi ham

mumkin. Masala echimi qo'shimcha tekshirishni talab etadi.

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Bir necha o'zgaruvchining funktsiyasi gradienti nima?
2. Gradientning asosiy xossalarini tushuntirib bering.
3. Funktsiyaning lokal ekstremumi nimadan iborat?
4. Lokal minimum va maksimumni tushuntiring.
5. Statsionar nuqta nima?
6. Yuqori tartibli xususiy hosilani ta'riflang?
7. Aralash xususiy hosilani tushuntirib bering.
8. Ekstremumning zaruriy sharti nima?
9. Ekstremumning etarlilik sharti nimadan iborat?
10. Ikki o'zgaruvchi funktsiyasi uchun ekstremumning etarlilik shartini ayting.

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsiya gradienti.
2. Lokal ekstremum.
3. Statsionar nuqta.
4. Yuqori tartibli xususiy hosila.
5. Aralash xususiy hosila.

## Mustaqil bajarish uchun misollar

**29.1.** Quyidagi funktsiyalarning $M_0$ nuqtadagi gradientini toping:

**a)** $z = x^2 + y^2,$ $M_0(3,2)$;

**b)** $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2},$ $M_0(2,1)$;

**v)** $z = x - 3y + \sqrt{3xy},$ $M_0(3,4)$;

**g)** $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$ $M_0(x_0,y_0)$.

**29.2.** Yuqori tartibli xususiy hosilalarni toping:

**a)** $z = y\,ln x,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?;$

**b)** $z = x^2 ln(x + y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?;$

**v)** $z = \cos(x + y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?;$

**g)** $u=\dfrac{x^4-8xy^3}{x-2y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=?$;

**d)** $z=x^2y^3$, $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2\partial y^3}=\dfrac{\partial^5 z}{\partial y^3\partial x^2}$ ekanligini ko'rsating;

**e)** $z=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=?$

**j)** $z=\arcsin(xy)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

**z)** $w=e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}=?$

**i)** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=?$

**k)** $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$ funktsiya uchun $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ bajarilishini ko'rsating;

**l)** $v=\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{z-x}$ funktsiya uchun

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}\right)=0$$ bajarilishini

ko'rsating.

**29.3.** Funktsiyalarni ekstremumga tekshiring.

**a)** $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

**b)** $z=x^3+y^3-15xy$;

**v)** $z=xy^2(1-x-y)$;

**g)** $z=\dfrac{1}{2}xy+(47-x-y)(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4})$;

**d)** $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

**e)** $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

# §30. ANIQMAS INTEGRAL

## 1. Boshlang’ich funktsiya va aniqmas integral

[a, b] kesmada aniqlangan $y = f(x)$ funktsiya uchun ushbu kesmaning barcha nuqtalarida

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funktsiya shu kesmada $f(x)$ funktsiyaning **boshlang’ich funktsiyasi** deyiladi.

Masalan: $\frac{1}{3}\sin 3x$ funktsiyaning hosilasi $\cos 3x$ ga teng. Shuning uchun, $\frac{1}{3}\sin 3x$ funktsiya $\cos 3x$ funktsiyaning boshlang’ich funktsiyasi bo’ladi.

Teorema (boshlang’ich funktsiya mavjudligi haqida).

Har bir uzluksiz funktsiya, bir-biridan ixtiyoriy o’zgarmasga farq qiluvchi cheksiz ko’p boshlang’ich funktsiyalarga ega.

Boshlang’ich funktsiyaning umumiy $F(x) + C$ ko’rinishi berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning **aniqmas integrali** deyiladi, bu erda S – ixtiyoriy o’zgarmas son va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$- integral osti funktsiyasi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, $x$ - integrallash o’zgaruvchisi.

## 2. Asosiy integrallar jadvali.

Asosiy integrallar jadvali quyidagi formulalardan iborat:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$ 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$ 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$ 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$ 10. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C;$

11. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C;$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$ 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right| + C.$

## 3. Aniqmas integral xossalari.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1) Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga teng:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) Aniqmas integralning differentsiali integral belgisi ostidagi ifodaga teng:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

3) Uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funktsiya bilan ixtiyoriy o’zgarmas S ning yig’indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4) O’zgarmas A ko’paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

5) Chekli sondagi funktsiyalarning algebraik yig’indisidan olingan aniqmas integral shu funktsiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig’indisiga teng:

$$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$$

## 4. Integrallash usullari.

Integrallashning eng asosiy usullarini qarab chiqamiz: yoyish, o’zgaruvchini almashtirish va bo’laklab integrallash.

1) Yoyish usuli. Bu usul integral ostidagi funktsiyani, har biri jadval integraliga keladigan, bir nechta funktsiyalar yig’indisiga yoyishga asoslanadi.

Misollar: Integrallarni toping: a) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

a) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + \int x^{-2}dx =$

$= ln|x| - 4x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} + C = ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C$

2) Aniqmas integralda o’zgaruvchini almashtirish.

Jadvalda qatnashmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash kerak bo’lsin. x ni t erkli o’zgaruvchining biror differentsiallanuvchi funktsiyasi orqali ifodalaymiz: $x=\varphi(t)$, bunga teskari $t=\varphi(x)$ funktsiyasi mavjud bo’lsin, u holda $dx=\varphi'(t)dt$ va $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$ bo’lib, integral jadvaliga mos keladigan integral hosil qilamiz.

Misollar:

1) $\int \cos 5xdx$ ning integralini toping. O’zgaruvchini almashtiramiz:

$$x=\frac{t}{5};\quad dx=\frac{dt}{5}$$

natijada, $\int \cos 5xdx=\frac{1}{5}\int \cos tdt=\frac{1}{5}\sin t+C=\frac{1}{5}\sin 5x+C$.

2) $\int x\sqrt{x-2}dx$ ning integralini toping.

$\sqrt{x-2}=t$ belgilash kiritamiz. U holda x-2=$t^2$, x=$t^2$+2, dx=2tdt bo’ladi.

Natijada, $\int x\sqrt{x-2}dx=\int\left(t^2+2\right)t\cdot 2tdt=2\left[\int t^4dt+2\int t^2dt\right]=\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+C=$

$$=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}\frac{1}{(x-2)^2\sqrt{x-2}}+\frac{4}{3}\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-2}}+C.$$

3) Bo’laklab integrallash. Integrallash quyidagi

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

formula yordamida amalga oshiriladi. Bu erda u, v - differentsiallanuvchi funktsiyalar.

Bu formulani qo’llash uchun, integral ostidagi ifoda ikki qismga ajratiladi va birinchi qismini u, qolgan qismini esa dv deb olinadi, natijada berilgan integralga nisbatan oson integrallanadigan $\int vdu$ integral hosil bo’ladi.

Misollar: Integralni toping: $\int x^2 \mathit{ln}xdx$

u=*ln*x, dv=$x^2$dx belgilashlar kiritamiz. U xolda $du=\frac{dx}{x},\quad v=\frac{x^3}{3}$ hosil bo’ladi. Formulani qo’llash natijasida,

$$\int x^2\mathit{ln}xdx=\frac{x^3}{3}\mathit{ln}x-\int\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\mathit{ln}x-\frac{x^3}{9}+C.$$

## 5. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.

Ikki ko’phadning $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ nisbati kasr-ratsional funktsiya yoki ratsional funktsiya deyiladi. Agar m<n bo’lsa, ratsional kasr to’g’ri, m≥n bo’lsa, ratsional kasr noto’g’ri kasr bo’ladi. Ratsional kasr noto’g’ri bo’lgan hoda kasrning suratini maxrajiga, ko’phadni ko’phadga bo’lish yo’li bilan uning butun qismini ajratish kerak.

Quyidagi kasrlar:

I. $\dfrac{A}{x-a}$ ;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ (m≥2 va butun);

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (maxrajning diskriminanti $D=\dfrac{p^2}{4}-q<0$);

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ (n≥2 va butun, D<0)

bu erda A, B, p, q, a – haqiqiy sonlar.

**eng sodda ratsional kasrlar** deyiladi.

I va II turdagi sodda kasrlar integrallash jadvaliga oson keltiriladi:I. $\int\dfrac{Adx}{x-a}=A\,ln|x-a|+C$;

II. $\int\dfrac{Adx}{(x-a)^m}=-\dfrac{A}{m-1}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$.

III turdagi sodda kasrning integralini topish uchun suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratamiz:

$$(x^2+px+q)'=2x+p\,.$$

U holda $\int\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\dfrac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx=\dfrac{A}{2}\int\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}dx+$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\frac{A}{2}ln\left|x^2+px+q\right|+(B-\frac{Ap}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\text{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Endi IV turdagi integralni hisoblaymiz. Suratda maxrajning hosilasini ajratamiz:

U holda

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Birinchi integral darhol hisoblanadi:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Ikkinchi integralda $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right]^n}$ quyidagi almashtirishlar bajaramiz:

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt \quad \text{va} \quad q-\frac{p^2}{4}=\alpha^2$$

U holda $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}$ hosil bo'ladi. Demak, IV turdagi integral rekurrent formula yordamida bajariladi.

## 6. Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.

a) $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko'rinishdagi integral, bu erda R – ratsional funktsiya. Ushbu turdagi integral $tg\frac{x}{2}=z$ o'rniga qo'yish bilan z o'zgaruvchili:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \quad x=2arctgx; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

ratsional funktsiyaning integraliga almashtiriladi;

b) $R(\sin x, \cos x)$ funktsiya sinx ga nisbatan toq bo'lsa, ya'ni $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, z=cosx, dz=-sinxdx o'rniga qo'yish bilan ratsionallashtiriladi;

v) $R(\sin x, \cos x)$ funktsiya cosx ga nisbatan toq bo'lsa, z=sinx, dz=cosxdx o'rniga qo'yish bu funktsiyani ratsionallashtiradi;

g) $R(\sin x, \cos x)$ funktsiya sinx va cosx ga nisbatan juft bo'lsa, z=sinx, dz=cosxdx o'rniga qo'yish bilan ratsionallashtiriladi;

d) $\int \cos^m x \sin^n x dx$ ko'rinishdagi integral, bu erda m, n – natural sonlar.

Bu integral m va n sonlarining juft yoki toqligiga qarab:

1) Agar m yoki n toq bo'lsa, mos ravishda z=sinx va z=cosx
2) Agar m va n juft bo'lsa,

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \; \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

darajani pasaytirish formulalaridan foydalanib ratsionallashtiriladi.

Misol. Ushbu $\int \cos x \sin^2 x dx$ integralni hisoblang.

Bu misolda $R(\sin x, \cos x) = \cos x \sin^2 x$ va $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lgani uchun, ya'ni funktsiya cosx ga nisbatan toqligi uchun, z=sinx, dz=cosxdx o'rniga qo'yish bu funktsiyani ratsionallashtiradi:

$$\int \cos x \sin^2 x dx = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

e) $\int \sin nx \sin mx dx$, $\int \sin nx \cos mx dx$, $\int \cos nx \cos mx dx$

ko'rinishdagi integrallar trigonometrik funktsiyalarning ko'paytmasini yig'indiga almashtiruvchi formulalar

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

yordamida integrallar jadvaliga keltirilib hisoblanadi.

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funktsiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning asosiy xossalari nimadan iborat? Uni ifodalang.
4. Integrallashning qanday asosiy usullarini bilasiz?
5. Integrallashda yoyish usulining mohiyati nima?
6. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish usulining mazmunini aytib bering? Misol keltiring.
7. Bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
8. Asosiy integrallar jadvalini yoddan yozib bering?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Boshlang'ich funktsiya.
2. Aniqmas integral.
3. Asosiy integrallar jadvali.
4. Aniqmas integralning xossalari.
5. Integrallashning yoyish usuli.
6. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish.
7. Bo'laklab integrallash.
8. Integral osti funktsiya.

9. Integral ostidagi ifoda.
10. Integrallash o'zgaruvchisi
11. Ixtiyoriy o'zgarmasga farq qiluvchi boshlang'ich funktsiya

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**30.1.** F(x) funktsiya $f(x)$ funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya ekanligini isbotlang.

**a)** $F(x)=2x^3+\frac{3}{4}x^4+5$, $\quad f(x)=3(x+2)x^2$;

**b)** $F(x)=2x+e^{2x}$, $\quad f(x)=2(1+e^{2x})$;

**v)** $F(x)=\sin x\cos x$, $\quad f(x)=\cos 2x$;

**g)** $F(x)=x-ln(1+x^2)$, $\quad f(x)=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}$.

**30.2.** Aniqmas integrallarni toping:

**a)** $\int x\sqrt{x}dx$; $\quad$ **b)** $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x}}$;

**v)** $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$ ; $\quad$ **g)** $\int \sin(2-3x)dx$;

**d)** $\int \frac{xdx}{x^2-1}$; $\quad$ **e)** $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx$;

**j)** $\int (2x+1)^{30}dx$; $\quad$ **z)** $\int \sin(a+bx)dx$;

**i)** $\int (1-x)(2+\sqrt{x})dx$**;** $\quad$ **k)** $\int 2^x e^x dx$**;**

**l)** $\int \frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 2x}dx$; $\quad$ **m)** $\int \frac{5+2tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

**n)** $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; $\quad$ **o)** $\int \cos 7x\cos 3xdx$.

**30.3.** O'rniga qo'yish usuli bilan integrallang.

**a)** $\int \frac{dx}{16+25x^2}$; $\quad$ **b)** $\int \frac{4^x dx}{\sqrt[3]{5+4^x}}$;

**v)** $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$ ; $\quad$ **g)** $\int 5^x\cos 5^x dx$;

**d)** $\int \frac{dx}{\sin x}$; $\quad$ **e)** $\int \cos^3 xdx$.

**30.4.** Bo'laklab integrallang

**a)** $\int x\,ln x dx$; $\quad$ **b)** $\int \arcsin xdx$; $\quad$ **v)** $\int (x+1)e^x dx$;

**g)** $\int x^2 \sin x dx$; **d)** $\int \frac{x}{\cos x^2} dx$; **e)** $\int x^2 ln x dx$;

**j)** $\int ln(1+x^2)\, dx$; **z)** $\int ln^2 x dx$; **i)** $\int x \,\mathrm{arctg} x\, dx$;

**k)** $\int (1-8x^2)\cos 4x dx$; **l)** $\int \sqrt[3]{x^2}\, ln x dx$; **m)** $\int \sin ln x dx$.

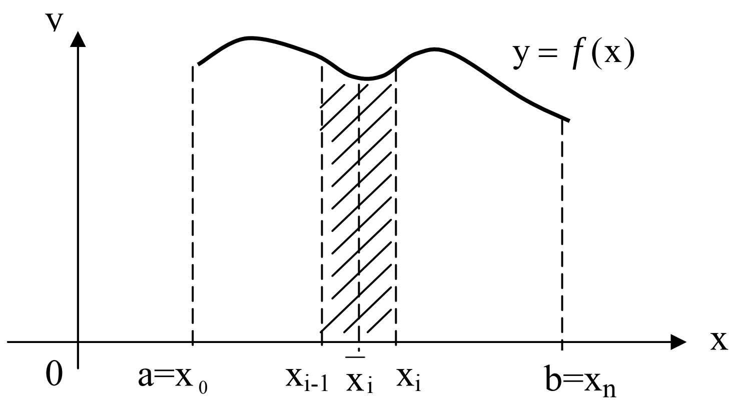
# §31. ANIQ INTEGRAL

## 1. Asosiy tushunchalar. Aniq integral.

[a,b] kesmada uzluksiz yoki bo'lakli uzluksiz $y = f(x)$ funktsiya uchun **integral yig'indi** deb,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

ifodaga aytiladi. Bu erda n - [a,b] kesma ajratilgan qismiy (kesma) intervallar soni, $\bar{x}_i$ - uzunligi $\Delta x_i$ (31.1-rasm) ga teng bo'lgan $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy nuqta.




31.1-rasm

$y = f(x)$ funktsiyaning [a,b] kesmada **aniq integrali** deb, ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

integral yig'indi eng katta qismiy kesma nolga intilgandagi limitiga aytiladi va $\int_a^в f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bu erda a va v sonlar integrallashning **quyi va yuqori chegarasi** deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralning ta'rifidan:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

## 2. Aniq integralning asosiy xossalari.

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz:

$1^0$. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$2^0$. Ixtiyoriy a, b va s sonlar uchun (a < c < b)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$3^0$. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

$4^0$. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining yig'indisiga teng.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm ... \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

$5^0$. (O'rta qiymat haqida teorema). Agar $y = f(x)$ funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa, kamida bitta shunday x=s$\in$[a,b] nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

tenglik bajariladi.

$6^0$. (Nyuton-Leybnits teoremasi). Agar F(x) funktsiya, uzluksiz $y = f(x)$ funktsiyaning biror bir boshlang'ich funktsiyasi bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nyuton-Leybnits formulasi o'rinli bo'ladi.

## 3. Aniq integralni hisoblash qoidalari.

a) **Nyuton-Leybnits formulasi.** Aniq integralni hisoblashning asosiy yagona aniq usuli integral ostidagi funktsiya uchun boshlang'ich funktsiyani aniqlash va so'ngra Nyuton –Leybnits formulasini qo'llashdir. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, aniq integralni bevosita integral yig'indi limiti sifatida emas, balki Nyuton-Leybnits formulasi bo'yicha hisoblash mumkin;

b) **Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish**. $\int_a^b f(x)dx$ integral berilgan bo'lsin. $y = f(x)$ funktsiya [a, b] intervalda uzluksiz funktsiya. x=φ(t) o'zgaruvchini almashtirish bilan integrallash o'zgaruvchisi t bo'lgan yangi aniq integralga kelamiz. Bunda $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ funktsiyalar $[\alpha, \beta]$ intervalda uzluksiz hamda $x=\varphi(t)$ funktsiya $\alpha$ va $\beta$ ni mos ravishda a va b ga o'tkazadi, ya'ni

$$\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b.$$

Bu shartlar bajarilganda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

formula o'rinli bo'ladi;

v) **Aniq integralda bo'laklab integrallash.** Faraz qilaylik, u(x) va v(x) funktsiyalar [a, b] intervalda differentsiallanuvchi funktsiyalar. Aniq integralda bo'laklab integrallash quyidagi formula

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

bo'yicha amalga oshiriladi;

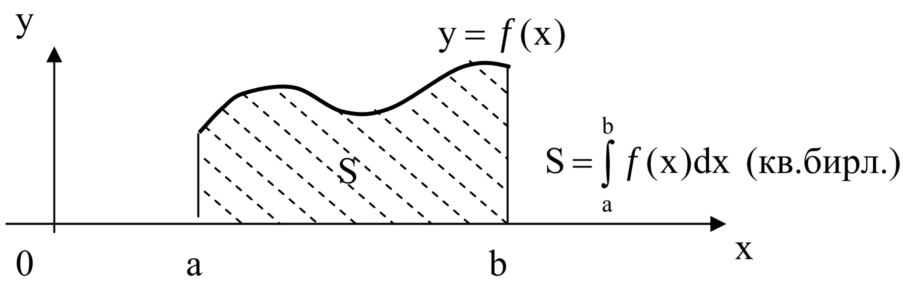
g) Agar: 1) $f(x)$ funktsiya toq bo'lsa, ya'ni $f(-x) = -f(x)$, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\ ;$$

2) $f(x)$ funktsiya juft bo'lsa, ya'ni $f(-x) = f(x)$, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx\,.$$

Aniq integralning geometrik ma'nosi quyidagicha: Aniq integral yuqoridan $y = f(x) \geq 0$ funktsiyaning grafigi, quyidan 0x o'qi, yon tomonlari esa x=a va x=b to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasiga son jihatdan teng bo'ladi. (31.2-rasm).




31.2-rasm

Misollar. Integralni hisoblang: a) $\int_0^\pi \sin x dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

a) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$

## 4. Aniq integralni taqribiy hisoblash.

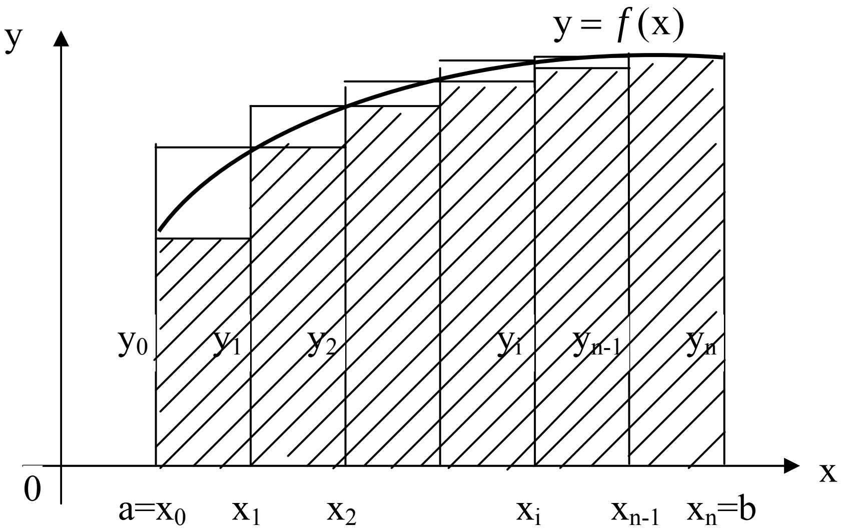
Ko'p hollarda berilgan funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasini elementar funktsiyalarda ifoda etish mumkin bo'lavermaydi. Bunday hollarda aniq integralni hisoblash uchun taqribiy formulalardan foydalaniladi. [a,b] integrallash kesmasi n ta teng va har birining uzunligi $h=\frac{b-a}{n}$ ga teng bo'laklarga bo'linadi.

1. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi (31.3-rasm).

$$\int_a^b ydx \approx h(y_0 + y_1 + ...... + y_{n-1})$$

2. Trapetsiya formulasi (31.4-rasm).

$$\int_a^b ydx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ....... + y_{n-1}),$$

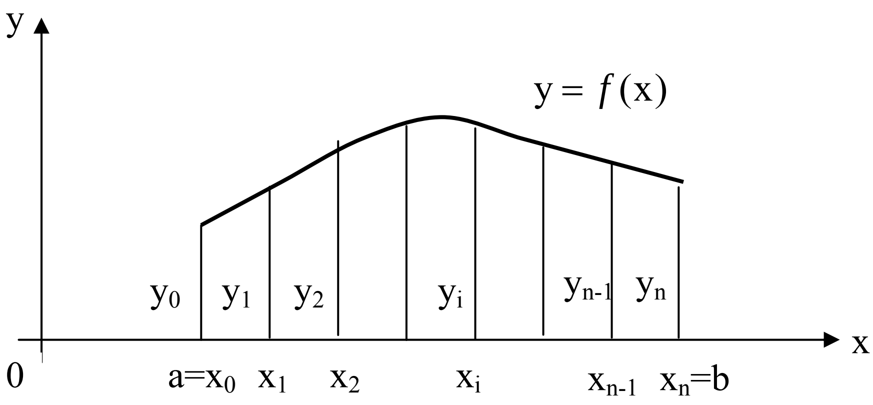



31.3-rasm

3. Parabola formulasi (Simpson formulasi)

n - juft deb olingan hol. Integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_a^в ydx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + .... + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$




31.4-rasm

## 5. Aniq integralning geometrik tadbiqi.

a) **Yassi shaklning yuzlarini hisoblash.**

$y = f(x)$ funktsiya grafigi, x=a, x=b ikkita to'g'ri chiziq va 0x o'q bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

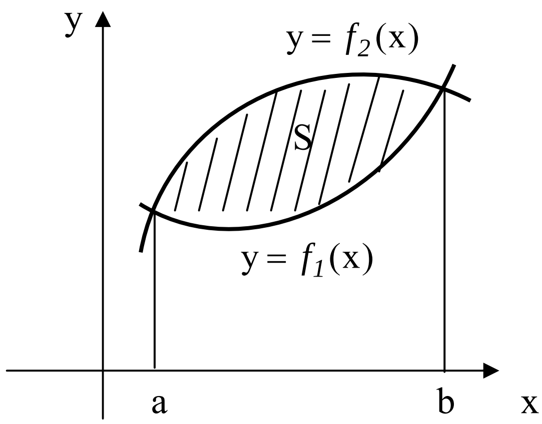
$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo'yicha hisoblanadi (31.2-rasm).

$y = f_2(x)$ va $y = f_1(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasi

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bilan topiladi. Bu erda, a va b chiziqlar kesishish nuqtalarining abstsissalari, [a,b] da $f_2(x) \geq f_1(x)$ (31.5-rasm).




31.5-rasm

b) **Aylanish jismlarining hajmini hisoblash.**

$y = f(x)$ uzluksiz egri chiziq, abstsissalar o'qi hamda x=a, x=b (a<b) to'g'ri chiziqlar bilan

chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning 0x o’q atrofida aylanishdan hosil bo’lgan jismning hajmi

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \quad \text{(kub. birl.)}$$

formula bo’yicha hisoblanadi.

Xuddi shunga o’xshash, uzluksiz x=φ(y) egri chiziq, ordinatalar o’qi va y=c hamda y=d (c<d) to’g’ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning 0y o’q atrofida aylanishdan hosil bo’lgan jismning hajmi

$$V = \pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy \quad \text{(kub. birl.)}$$

formula bo’yicha hisoblanadi.

v) **Yassi egri chiziq yoylari uzunliklarini hisoblash.**

$y = f(x)$ funktsiya [a,b] kesmada silliq bo’lsa, u holda bu egri chiziqning x=a, x=b to’g’ri chiziqlari bilan chegaralangan yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{(birl.)}$$

formula bo’yicha hisoblanadi.

g) **Aylanish jismlari sirtining yuzini hisoblash.**

x=a, x=b to’g’ri chiziqlari bilan chegaralangan $y = f(x)$ egri chiziqning 0x o’q atrofida aylanishdan hosil bo’lgan sirt yuzi $S_x$

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo’yicha topiladi.

Xuddi shunga o’xshash, y=c, y=d to’g’ri chiziqlari bilan chegaralangan uzluksiz x=φ(y) egri chiziqning 0y o’q atrofida aylanishdan hosil bo’lgan sirt yuzi $S_y$

$$S_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\, dy \quad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo’yicha topiladi.

## O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Integral yig’indi nima?
2. Qismiy kesmalar nimadan iborat?
3. Aniq integralni ta’riflang?
4. Berilgan kesmada berilgan funktsiyaning aniq integralini ta’riflang?
5. Integrallash chegaralari nima?
6. Aniq integralning eng sodda xossalari nimadan iborat va ularni ifodalang?
7. Aniq integralning $y = f(x) \geq 0$ bo’lganda geometrik ma’nosi nima?
8. O’rta qiymat haqida teoremani ifodalang? Uning geometrik ma’nosini aytib bering?

9. Nyuton-Leybnits formulasini ifodalang?
10. Aniq integralni taqribiy hisoblash deganda nimani tushunasiz? Taqribiy hisoblashning qaysi usullarini bilasiz?
11. Taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar usulini ifodalang? Geometrik ma'nosini bering?
12. Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar usulini ifodalang? Geometrik ma'nosini bering?
13. Simpson usuli yoki parabola usulining mazmunini ifodalang va uning geometrik ma'nosiga to'xtaling?

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Integral yig'indi.
2. Qismiy kesma.
3. Aniq integral.
4. Integrallash chegaralari.
5. O'rta qiymat.
6. Nyuton-Leybnits formulasi.
7. Taqribiy hisob.
8. Taqribiy integrallash qadami.
9. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.
10. Trapetsiyalar formulasi.
11. Parabola (Simpson) formulasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**31.1.** Quyida aniq integrallarni integral yig'indi limiti sifatida hisoblang.

**a)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; **b)** $\int\limits_0^x \cos t dt$;

**v)** $\int\limits_0^1 e^x dx$; **g)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

**31.2.** Nuqtaning tezligi $v=9{,}8t-0{,}003t^2$ qonun bo'yicha o'zgaradi. t=0 dan t=5 gacha bo'lgan vaqt oralig'ida nuqta o'tgan yo'lni toping. Bu nuqtaning yo'lning oxiridagi (ya'ni t=5 dagi) tezlanishini toping.

**31.3.** Aniq integralni hisoblang

**a)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; **b)** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+ln^2 x)}$;

**v)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$; **g)** $\int_1^e \frac{ln^2 x}{x} dx$;

**d)** $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$; **e)** $\int_1^3 \frac{x dx}{1 + x^4}$;

**j)** $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$; **z)** $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$;

**k)** $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1 + x^8}$; **l)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} dx$;

**m)** $\int_0^{\pi} x \sin x dx$; **n)** $\int_1^e \sqrt[4]{x}\, ln x dx$;

**o)** $\int_1^e ln^2 x dx$; **p)** $\int_{-1}^0 \arccos x\, dx$;

**r)** $\int_0^1 x \mathrm{arctg} x\, dx$; **s)** $\int_{-1}^0 (2x + 3)e^{-x} dx$.

**31.4.** Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

**a)** $y = \cos x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2}$; **b)** $y = \sin x; \quad y = 0; \quad 0 \le x \le \pi$;

**v)** $y = 2x - x^2, \ y = 0$; **g)** $y = \frac{1}{x^2}; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = 2$;

**d)** $y = \sqrt{x}; \quad y = 0; \quad x = 4$; **e)** $y = x^2; \quad y = \sqrt[3]{x}$;

**j)** $y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{4 - 3x}; \quad y = 0$; **z)** $y=5-x^2$; $y=x-1$.

**31.5.** I chorakda yotuvchi $x^2+y^2=16$ aylana yoyi va $x=1$, $x=3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning 0x o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

**31.6.** $y^2=9x$ parabola va $y=x$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan shaklning 0y o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

**31.7.** Quyida berilgan aniq integrallarni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang. Qismiy kesmalar soni n qavs ichida berilgan:

**a)** $\int_0^1 \sqrt{1 - x^3} dx, \quad (n = 10)$; **b)** $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} dx, \quad (n = 10)$;

**v)** $\int_2^5 \frac{dx}{ln x}, \quad (n = 6)$; **g)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (n = 10)$.

# §32. XOSMAS INTEGRALLAR

## 1. 1-tur xosmas integral.

$y = f(x)$ funktsiya [a,+∞) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin (32.1-rasm). $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaraymiz.

[a,+∞) oralikda $f(x)$ funktsiyaning **1-tur xosmas integrali** deb, quyidagi

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

limitga aytiladi va $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

(32.1)

Agar limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda xosmas $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral **yaqinlashuvchi** deyiladi. Bu limit integralning qiymati sifatida qabul qilinadi.

Agar limit mavjud bo'lmasa yoki xususan cheksiz bo'lsa, xosmas integral **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Xuddi shuningdek, 1-tur xosmas integral (-∞,b] oraliq uchun $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ kabi aniqlanadi (32.2-rasm).

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya (-∞;+∞) oraliqda aniqlangan va uzluksiz hamda s∈(-∞;+∞) bo'lsin. U xolda xosmas integrallar:

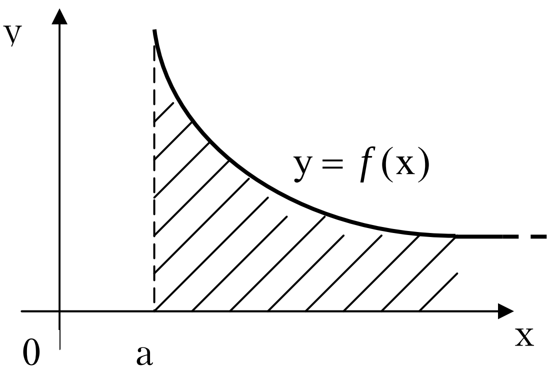
$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

yig'indisi $f(x)$ funktsiyaning (-∞;+∞) oraliqdagi 1-tur xosmas integrali deb ataladi va $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi.

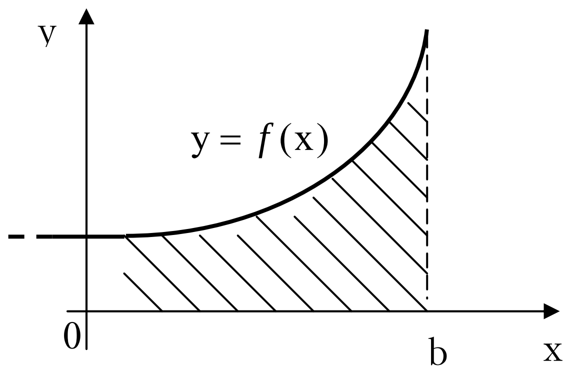
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \qquad (32.2)$$

Shunday qilib, (32.2) yig'indidagi har bir xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda (32.2) yig'indi s nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi.

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b}-2\sqrt{1})=2\lim_{b\to+\infty}(\sqrt{b}-1)=+\infty.$$




32.1-rasm




32.2-rasm

Demak, ushbu integral uzoqlashuvchi ekan.

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\operatorname{arctg}x\Big|_a^b=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi ekan.

## 2. 2-tur xosmas integral.

$f(x)$ funktsiya [a,b) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, x=b nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lsin (32.3-rasm). U holda

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

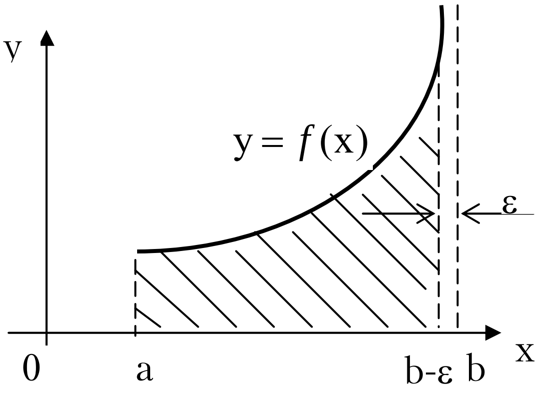
limitga [a,b) oraliqda $f(x)$ funktsiyasining **2-tur xosmas integrali** deyiladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx \qquad (32.3)$$

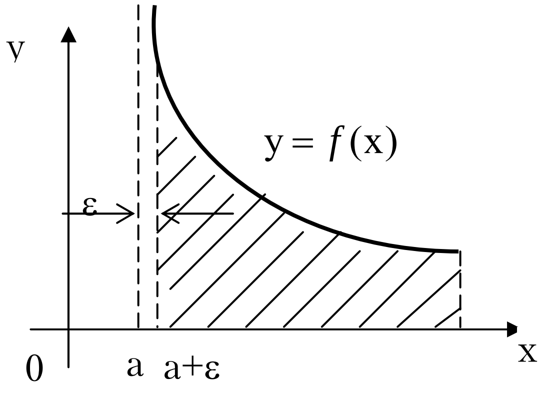
Agar (32.3) limit mavjud va chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Agar limit mavjud bo'lmasa yoki cheksizga teng bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi. (a,b] oraliqda aniqlangan, uzluksiz va x=a nuqta atrofida chegaralanmagan funktsiya uchun xosmas integral xuddi shuningdek aniqlanadi (32.4-rasm):

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$$

$f(x)$ funktsiya [a, b] oraliqning c∈[a,b] nuqtasidan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz bo'lib, x=s nuqtaning atrofida chegara-




32.3-rasm

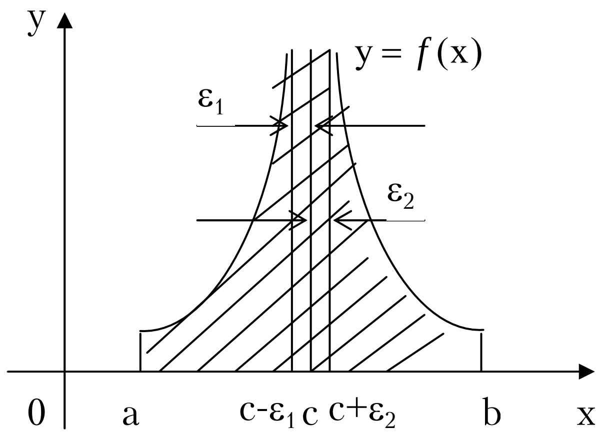



32.4- rasm

lanmagan bo'lsin (32.5-rasm). U holda bu funktsiyaning [a, b] kesmadagi 2-tur xosmas integrali xosmas integrallarning yig'indisi kabi aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(32.5)




32.5-rasm

Agar (32.5) formulaning o'ng tarafidagi har bir xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $f(x)$ funktsiyadan [a,b] oraliqda olingan xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misollar:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ xosmas integralni hisoblang. Integral ostidagi $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funktsiya x=1 nuqtada uzilishga ega. Demak,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to+0}(\sqrt{1-1+\varepsilon}-\sqrt{1-0}) =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to+0}(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{1}) = 2$$

2) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$ xosmas integralni hisoblang.

Integral ostidagi $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ funktsiya $x=1\in[0,2]$ nuqtada 2-tur uzilishga ega. Demak,

$$\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{0}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_{0}^{1-\varepsilon_1}-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon_2}^{2}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}+1\right)-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty$$

Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan.

## O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Xosmas integral deb nimaga aytiladi?
2. Xosmas integralning turlarini ayting?
3. 1-tur xosmas integralni ta’riflang?
4. 2-tur xosmas integral deb nimaga aytiladi?
5. Yaqinlashuvchi xosmas integralni ta’riflang?
6. Uzoqlashuvchi xosmas integralni ifodalang?

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Xosmas integral.
2. 1-tur xosmas integral.
3. 2-tur xosmas integral.
4. Yaqinlashuvchi xosmas integral.
5. Uzoqlashuvchi xosmas integral.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**32.1.** 1 - tur xosmas integrallarni hisoblang. Yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

**a)** $\int_{0}^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$; **b)** $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$;

**v)** $\int_{1}^{+\infty}\frac{ln(1+x)}{x}dx$; **g)** $\int_{1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$;

**d)** $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; **e)** $\int_{1}^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$;

**j)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

**Z)** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$;

**i)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

**k)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{ln(x^2+1)}{x}dx$;

**l)** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{lnx}{x}dx$;

**m)** $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}dx$;

**n)** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;

**o)** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

**p)** $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(lnx)^{\frac{3}{2}}}$;

**r)** $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin xdx$;

**s)** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$;

**t)** $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

**32.2.** 2 - tur xosmas integrallarni hisoblang. Yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

**a)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

**b)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$;

**v)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

**g)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

**d)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

**e)** $\int\limits_{0}^{1} x\ln^2 xdx$;

**j)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

**z)** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

**i)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

**k)** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{xlnx}$;

**l)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;

**m)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

**n)** $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$;

**o)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$;

**p)** $\int\limits_{0}^{1} xln^2xdx$;

**r)** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

## §33. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

### 1. Differentsial tenglamalarga keltiriladigan masalalar

a) Dehqon kuzda kartoshka hosilini yig'ishtirib oldi. Keyingi hosilni etishtirgunga qadar hosil hajmi ko'paymaydi. Dehqon har haftada kartoshkani bozorga chiqarib sota boshlaydi. Mavjud hosil zahirasida haftalik taklif hajmi kelayotgan haftada kutilayotgan tovar narxi va keyingi haftalardagi baho o'zgarishiga bog'liq. Agar kelayotgan haftada narxning kamayishi, keyingi haftalarda esa o'sishi kutilayotgan bo'lsa va agar kutilayotgan narxning o'sishi hosilni saqlab turishga qilinayotgan xarajatdan ko'p bo'lsa, kartoshkani bozorga chiqarib sotish to'xtatib turiladi. Keyingi haftalarda narxning o'sishi qancha ko'p bo'lsa, yaqinlashib kelayotgan haftada taklif hajmi shuncha kam bo'ladi. Va aksincha, kelayotgan haftada narxning o'sishi, hamda keyingi haftalarda uning kamayib ketishi taklif hajmining ortishiga olib keladi. Aytaylik, kelayotgan haftadagi mahsulot narxini $\rho$, narxning vaqtga nisbatan o'zgarish tezligini $\frac{dp}{dt}$ deb belgilasak, u holda mavjud hosil zahirasi uchun taklif hajmi kelayotgan haftada kuyidagicha ifoda etiladi:

$$x = f\left(\rho, \frac{dp}{dt}\right) \qquad (33.1)$$

(1)taklif hajmining dinamik funktsiyasi deyiladi. (33.1) ni narx $\rho$ ga nisbatan echish talab etiladi.

b)Cho'llarda erning sho'rini yuvish uchun yaxob suvi beriladi. Er maydoniga suv qancha tezlikda uzluksiz kiritilsa, shuncha tezlikda suv uzluksiz chiqarib turiladi. Agar er maydonining suv bilan to'ldirilgan hajmi $a$ litr, er maydoniga kiritilayotgan suv tezligi b litr/soat va erdagi tuz miqdori $A$ kg bo'lsa, t vaqtdan so'ng er qancha miqdor tuzdan tozalanadi?

*Echish*: Erdagi tuzning t vaqtdagi miqdorini $A$(t) bilan belgilaymiz. Bu paytdagi suv va tuzdan hosil bo'lgan eritmaning kontsentratsiyasi o'zgarmas va $\frac{A(t)}{a}$ ga teng deb hisoblaymiz. Er maydonidan vaqt birligi ichida $\frac{bA(t)}{a}$ tuz chiqib ketadi. Shuning uchun erdagi tuz miqdorining o'zgarish tezligi

$$A'(t) = -\frac{b}{a}A(t) \qquad (33.2)$$

formuladan topiladi. Minus ishora er maydonidagi tuz miqdorining kamayishini ifodalaydi. (33.2) ni $A(t) = Ae^{-\frac{b}{a}t}$ echim qanoatlantiradi. Va, demak, er maydonidan chiqib ketgan tuz miqdori quyidagidan

$$x = A - Ae^{-\frac{b}{a}t} = A(1 - e^{-\frac{b}{a}t})$$

iborat bo'ladi.

Keltirilgan masalalar ko'rsatib turibdiki, natija sifatida biz (33.1) va (33.2) ko'rinishdagi differentsial tenglamalar oldik. Endi differentsial tenglama va unga oid asosiy tushunchalarni bayon etishga o'tamiz.

## 2.Differentsial tenglama haqida tushuncha.

Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funktsiya va uning hosilalari yoki differentsiallarini bog'lovchi tenglamaga **differentsial tenglama** deyiladi. Differentsial tenglamalar oddiy differentsial tenglama yoki xususiy hosilali differentsial tenglamalarga ajratiladi.

Agar noma'lum funktsiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'lik bo'lsa oddiy, ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, **xususiy hosilali differentsial tenglama** deyiladi.

**Differentsial tenglamaning tartibi** deb, differentsial tenglamada ishtirok qilayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

n – tartibli oddiy differentsial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (33.3)$$

Bu erda x – erkli o'zgaruvchi, u – noma'lum funktsiya, $y', ..., y^{(n)}$ - noma'lum funktsiyaning hosilalaridir.

Quyidagi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (33.4)$$

ko'rinishdagi n – tartibli differentsial tenglamaga yuqori tartibli hosilaga nisbatan ifoda etilgan differentsial tenglama deyiladi.

n – tartibli **differentsial tenglamaning echimi** deb, *x* ning chekli yoki cheksiz intervalda aniqlangan, n – tartibgacha (n - tartib ham kiradi) hosilaga ega bo'lgan va bu funktsiya va uning hosilalarini differentsial tenglamaga keltirib qo'yganda uni ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x)$ funktsiyaga aytiladi. Differentsial tenglamaning echimini topish jarayoniga, differentsial tenglamani integrallash deyiladi.

Agar n – tartibli tenglama uchun biror $x = x_0$ nuqtada izlanayotgan *u* funktsiyaning qiymati va uning n - 1 – tartibgacha barcha hosilalarning qiymati berilgan bo'lsa, ya'ni

$$y\big|_{x=x_0} = y_0', \; y'\big|_{x=x_0} = y_0', ..., \quad y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (33.5)$$

bunga n – tartibli differentsial tenglama uchun **boshlang'ich shartlar** deyiladi.

(33.3) yoki (33.4) tenglamaning (33.5) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi echimini topish masalasiga **Koshi masalasi** deyiladi.

## 3. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar
## Birinchi tartibli differentsial tenglama

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (33.6)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu erda x – erkli o'zgaruvchi, u – izlanayotgan funktsiya, $y'$ - uning hosilasi.

Agar (33.6) tenglama $y'$ hosilaga nisbatan ifoda etilgan bo'lsa, ya'ni

$$y' = f(x,y) \qquad (33.7)$$

u holda (33.7) ni hosilaga nisbatan ifoda etilgan differentsial tenglama deb aytiladi.

a)O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.

Differentsal tenglamaning eng sodda turi **o'zgaruvchilarga ajralgan tenglama**dir:

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \qquad (33.8)$$

(33.8) da dx ning oldidagi ko'paytuvchi faqat x ga, dy ning oldidagi ko'paytuvchi esa faqat u ga bog'liq funktsiyadir. Bu tenglamani hadma-had integrallash orqali umumiy integralini hosil qilamiz:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

1-misol. Quyida o'zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglama berilgan:

$$x^2dx + y^2dy = 0 \qquad (33.9)$$

Umumiy integral topilsin.

Echish:(33.9) ni hadma-had integrallab, $\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} = \overline{C}$ ni topamiz. $3\overline{C} = C$ deb belgilaymiz, $x^3 + y^3 = C$ ni hosil qilamiz.

Ushbu

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (33.10)$$

ko'rinishdagi differentsial tenglamaga **o'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglama** deyiladi. (33.10) tenglamani $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$ ifodaga bo'lib, o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

tenglama hosil qilamiz va uning umumiy integralini yuqorida ko'rsatilgani kabi hadma-had integrallab topamiz:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

2-misol. $\sin^2 x\,ln y dy + ydx = 0$ tenglamani umumiy echimini toping.

Echish: Berilgan differentsial tenglamaning har ikkala qismini $y \sin x \neq 0$ ifodaga bo'lib, $\frac{ln y}{y}dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglama hosil qilamiz.

Hadma-had integrallab, $\frac{ln^2 y}{2} = ctgx + C$ ko'rinishdagi umumiy integralini topamiz.

b) Bir jinsli differentsial tenglama.

Ta'rif. Agar $f(x,y)$ funktsiyada x va u mos ravishda tx va ty o'zgaruvchilarga almashtirganda (t – ixtiyoriy parametr) $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funktsiya n o'lchovli **bir jinsli funktsiya** deyiladi.

Misollar: 1. $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$ funktsiya ikki o'lchovli bir jinsli funktsiyadir, chunki $f(tx,ty)=\sqrt{t^4x^4+t^4y^4}=t^2\sqrt{x^4+y^4}=t^2\cdot f(x,y)$

2. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ funktsiya nol o'lchovli bir jinsli funktsiya bo'ladi, chunki $f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{tx-ty}=\dfrac{x+y}{x-y}=f(x,y)$, ya'ni $f(tx,ty)=t^{\circ}\cdot f(x,y)$ bajariladi.

Ushbu

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{33.11}$$

ko'rinishdagi tenglama **bir jinsli differentsial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli tenglama $y=u\cdot x$ almashtirish orqali o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi. $y=u\cdot x$ ni differentsiallab,

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\frac{du}{dx}+u$$

topamiz. u va $\dfrac{dy}{dx}$ larning ifodalarini (33.11) ga qo'yib, quyidagini $x\cdot\dfrac{du}{dx}+u=f(u)$ ni hosil qilamiz. Bu erdan esa $\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ o'zgaruvchilari ajralgan tenglamani topamiz. Integrallagandan so'ng, $\displaystyle\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C$ u o'rniga $\dfrac{y}{x}$ nisbatni qo'yib, (33.11) differentsial tenglamaning umumiy echimini topamiz.

3-misol. Ushbu

$$y'=1+\frac{y}{x} \tag{33.12}$$

tenglamaning umumiy integralini toping.

Echish: Bu tenglamani echish uchun $u=\dfrac{y}{x}$ funktsiya kiritamiz. U holda $y=u\cdot x$ va $y'=\dfrac{du}{dx}\cdot x+u$ bo'ladi. O'rniga qo'yib, $x\cdot\dfrac{du}{dx}+u=1+u$ o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama olamiz. O'xshash hadlar ixchamlangandan keyin $du=\dfrac{dx}{x}$ yoki integrallab, topamiz: $u=ln|x|+ln|C|$, bu erdan $y=x\cdot ln|Cx|$ umumiy integralini topamiz.

v) Chiziqli differentsial tenglamalar.

Ushbu

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (33.13)$$

ko'rinishdagi tenglama chiziqli differentsial tenglama deyiladi.

Chiziqli tenglama $y = u \cdot v$ almashtirish bilan o'zgaruvchilari ajraladigan ikkita tenglamaga keltiriladi. Ko'paytmaning hosilasi qoidasiga ko'ra

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

va (13) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v\right] = Q(x) \qquad (33.14)$$

Yordamchi o'zgaruvchilardan birini, masalan, v ixtiyoriy tanlab olinganidan foydalanib, qavs ichidagi ifodani nolga tenglab olamiz va v sifatida o'zgaruvchilari ajraladigan $\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0$ tenglamaning xususiy echimlaridan biri $v = v(x)$ ni olamiz. Uni (33.14) ga qo'yib, u ga nisbatan $v\frac{du}{dx} = Q(x)$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Bu tenglamaning umumiy echimi $u = u(x, C)$ ni topib, (33.13) ning umumiy echimi $y = u(x, C) \cdot v(x)$ ni hosil qilamiz.

4-misol. Quyidagi

$$y' - ytgx = \sin x$$

tenglamaning umumiy echimini toping.

Echish: $y = u(x) \cdot v(x)$ bo'lsin, u holda $y' = u'v + uv'$ va berilgan tenglama $u'v + uv' - u \cdot v \cdot tgx = \sin x$ yoki $u'v + u(v' - v \cdot tgx) = \sin x$ (33.15) ko'rinishni oladi. Qavs ichidagini $v' - v \cdot tgx = 0$ deb olib, uning xususiy echimini topamiz: $\frac{dv}{dx} = v \cdot tgx$, $\frac{dv}{v} = tgxdx$; $ln|v| = -ln|\cos x|$, bu erdan $v = \frac{1}{\cos x}$ (33.15) ga v ni qo'yib, ushbu $u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \sin x$ tenglamani hosil qilamiz. Bu erdan u ni topamiz: $u = \frac{\sin^2 x}{2} + C$. Demak, izlanayotgan umumiy echim quyidagicha

$$y = u \cdot v = \left(\frac{\sin^2 x}{2} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

bo'ladi.

## O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Differentsial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differentsial tenglamaning tartibi deb-chi?
3. Differentsial tenglamaning echimi deb nimaga aytiladi?
4. Differentsial tenglama uchun boshlang’ich shart nimadan iborat?
5. Koshi masalasini tushuntirib bering?
6. Birinchi tartibli differentsial tenglama nimadan iborat?
7. O’zgaruchilari ajralgan differentsial tenglama qanday ko’rinishga ega?
8. O’zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamaga ta’rif bering va uni integrallash usulini ko’rsating.
9. Bir jinsli funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
10. Bir jinsli differentsial tenglama deb nimaga aytiladi va u qanday echiladi?
11. Qanday birinchi tartibli differentsial tenglama chiziqli differentsial tenglama deyiladi. Uni echish usulini tushuntiring.

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Differentsial tenglama.
2. Oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalar.
3. Differentsial tenglama tartibi.
4. Differentsial tenglama echimi.
5. Boshlang’ich shartlar.
6. Birinchi tartibli differentsial tenglama.
7. n - tartibli differentsial tenglama.
8. Koshi masalasi.
9. O’zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglama.
10. Bir jinsli funktsiya.
11. Bir jinsli differentsial tenglama.
12. Chiziqli differentsial tenglama.

## Mustaqil ishlash uchun misollar.

**33.1.** Quyida keltirilgan y(x,c) funktsiyalar (s – ixtiyoriy o’zgarmas son) mos ravishda berilgan differentsial tenglamalar echimi bo’lishi yoki bo’lmasligini tekshiring.

**a)** $y = x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}})$, $x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$;

**b)** $y = ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;

**v)** $y = (c_1 + c_2x)e^x$, $y'' - 2y' + y = 0$.

**33.2.** Differentsial tenglamaning umumiy echimini toping.

**a)** $(1+x^2)y'+1+y^2=0$; **b)**; $y'=tgx*tgy$

**v)** $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$; **g)**; $x(y^2-4)dx+ydy=0$

**v)** $y'=tgx\,tgy$ **g)** **d)** $\frac{yy'}{x}+e^y=0$.

**33.3.** Koshi masalasini eching.

a) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx, y(0)=0;$

b) $y/y`=\ln, y(2)=1$

v) $y`=2^{x-y}, y(-3)=-5$

g) $dx/x(y-1)+dy/y(x+2)=0, y(1)=1$

33.4. Bir jinsli differentsial tenglamalarni eching.

a) $xy`\sin(x/y)=y\sin(y/x)-x$;

b) $xy+y^2=(2x^2+xy)y`$;

v) $xyy`=y^2+2x^2$;

g) $y`=x+y/x-y$

**33.5.** Chiziqli differentsial tenglamalarni eching.

**a)** $xy'-y=x^2\cos x$; **b)** $y'\cos x+y=1-\sin x$;

**v)** $(1+x^2)y'+y=\mathrm{arctg}x$; **g)** $y'(x+y^2)=y$.

# §34. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR (DAVOMI)

## 1. Bernulli tenglamasi.

Ba’zi bir birinchi tartibli chiziqli bo’lmagan differentsial tenglamalar almashtirish orqali chiziqli differentsial tenglamaga keltiriladi. Bunday tenglamalardan biri quyidagi

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (34.1)$$

ko’rinishdagi tenglamadir. Bu erda P va Q lar x ning uzluksiz funktsiyalari. Bu tenglama **Bernulli tenglamasi** deb ataladi. (34.1) dan n=1 bo’lganda o’zgaruvchilari ajraladigan, n=0 bo’lganda esa chiziqli tenglama hosil bo’ladi. Agar $n\neq0$ va $n\neq1$ bo’lsa, $z=y^{1-n}$ almashtirish bajarib, z ga nisbatan chiziqli differentsial tenglama olamiz.

(34.1) tenglamaning har ikkala qismini $u^n$ ga bo’lamiz. U holda

$$y^{-n}y'+Py^{-n+1}=Q \qquad (34.2)$$

hosil bo’ladi. $z=u^{-n+1}$ almashtirishdan foydalanib, $z'=(-n+1)y^{-n}y'$ ni olamiz.

Bulardan foydalanib, (2) ni quyidagi

$$z'+(-n+1)Pz=(-n+1)Q$$

chiziqli tenglamaga keltiramiz. Buning umumiy echimini topib, z o’rniga bajarilgan almashtirishni qo’yib, Bernulli tenglamasining umumiy echimini topamiz.

Umuman aytganda Bernulli tenglamasini $y=u\cdot v$ o’rniga qo’yish yordamida ham echish mumkin.

1-misol. Quyidagi differentsial tenglamaning

$$y'-2xy=2x^3y^2$$

echimini toping.

Echish. Berilgan tenglamaning barcha hadlarini $u^2$ ga bo’lamiz.

$$u^{-2}u'-2xu^{-1}=2x^3$$

Endi $z=y^{-1}$ almashtirish kiritamiz va $z'=-y^{-2}y'$ ekanligini e’tiborga olib, o’rniga keltirib qo’yib, keyin (-1) ga ko’paytirgandan so’ng $z'+2xz=-2x^3$ ko’rinishdagi chiziqli tenglamani olamiz. Buni integrallab $z=ce^{-x^2}+1-x^2$

umumiy integralini topamiz. $z=y^{-1}=\frac{1}{y}$ almashtirishni keltirib qo’yib, berilgan tenglamaning $y=\dfrac{1}{ce^{-x^2}+1-x^2}$ ko’rinishdagi umumiy echimini topamiz.

## 2. To'la differentsialli tenglama.

Quyidagi

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (34.3)$$

tenglama **to'la differentsialli tenglama** deyiladi, agar (34.3) ning chap qismi birorta F(x,y) funktsiyaning to'la differentsiali bo'lsa, ya'ni

$$dF(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \qquad (34.4)$$

(34.3) tenglama to'la diffrentsialli bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (34.5)$$

shart bajarilishi kerak. (34.4) ning umumiy echimini F(x,y)=c ko'rinishda yozish mumkin, bu erda s - ixtiyoriy o'zgarmas son.

2-misol. Tenglamani eching.

$$2xydx+(x^2-y^2)dy=0$$

Echish. (34.5) shartni tekshiramiz: $\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,\quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)=2x.$ Demak, berilgan tenglama to'la differentsialli tenglama ekan. To'la differentsiali

$$dF=F'_x dx+F'_y dy$$

bo'ladigan, F(x,y) funktsiyani topamiz, ya'ni

$$F'_x=2xy,\quad F'_y=x^2-y^2 \qquad (34.6)$$

(34.6) ning birinchi tenglamasini u o'zgarmas deb qarab, x bo'yicha integrallaymiz:

$$F=\int 2xydx=x^2y+\varphi(y)$$

Bu ifodani (34.6) ning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, $(x^2y+\varphi(y))'_y=x^2-y^2,$ $x^2+\varphi'(y)=x^2-y^2,\ \varphi'(y)=-y^2,\ \varphi(y)=-\frac{y^3}{3}+const$ ni hosil qilamiz. U holda F(x,y) funktsiya $F(x,y)=x^2y-\frac{1}{3}y^3$ ko'rinishga keladi va umumiy echim $3x^2u-u^3+s$ bo'ladi.

## 3. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar.

Quyidagi

$$y''+py'+qy=0 \qquad (34.7)$$

differentsial tenglamaning umumiy echimini topish talab qilinsin. Bu erda p va q - o'zgarmas sonlar. (34.7) tenglamaga **o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglama** deyiladi. Uning umumiy echimi.

$$u=c_1y_1+c_2y_2$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $u_1$ va $u_2$ - tenglamaning ikkita chiziqli erkli xususiy echimlari; $s_1$, $s_2$ – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(34.7) ning xususiy echimlari $u_1$ va $u_2$ larni topish uchun quyidagi ishni amalga oshiramiz. Faraz qilaylik, $u=e^{kx}$, bu erda k- o'zgarmas son, (34.7) ning echimi bo'lsin. k ning qanday qiymatlarida bu ko'rsatkichli funktsiya (34.7) ning echimi bo'lishini qarab chiqamiz. Buning uchun $u'=ke^{kx}$ va $u''=k^2e^{kx}$, hamda $u=e^{kx}$ larni (34.7) ning chap qismiga qo'yamiz. Natijada

$$e^{kx}(k^2+rk+q)=0$$

ni hosil qilamiz. Bu erda $e^{kx}\neq 0$ bo'lgani uchun $e^{kx}$ ga qisqartirib, quyidagi

$$k^2+rk+q=0 \qquad (34.8)$$

tenglamani hosil qilamiz. Demak, k soni (34.8) tenglamaning ildizi bo'lgandagina u funktsiya (34.7) ning echimi bo'ladi. (34.8) ga (34.7) ning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi.

Xarakteristik tenglamani echishda uchta hol bo'lishi mumkin: ildizlar haqiqiy va har xil; ildizlar haqiqiy va o'zaro teng; ildizlar kompleks qo'shma bo'lgan hol. Har bir holni alohida qaraymiz.

1-hol. (34.8) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil sonlardan iborat, ya'ni $k_1\neq k_2$. Bu holda $y_1=e^{k_1x}$ va $y_2=e^{k_2x}$ xususiy echimlar chiziqli erkli echimlar bo'ladi, chunki

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq \text{const}$$

bo'ladi. Demak, (34.7) ning umumiy echimi

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$$

ko’rinishni oladi.

2-hol. (34.8) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va o’zaro teng, ya’ni $k_1=k_2=\alpha$.

Bu holda (34.7) faqat bitta $u_1=e^{\alpha x}$ echimi mavjud. Umumiy echimni topish uchun yana bitta xususiy echim $u_2$ ni topish talab qilinadi.

Buni topish uchun (34.7) dagi r va q larni $\alpha$ orqali ifoda etamiz. Viet teoremasiga ko’ra:

$$r=-(k_1+k_2)=-2\alpha, \qquad q=k_1\cdot k_2=\alpha^2$$

U holda (34.7) quyidagi

$$y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=0 \tag{34.9}$$

ko’rinishni oladi. Echimni $u_2=u(x)\cdot v(x)$ ko’rinishda izlaymiz. U holda

$$y_2'=u'\cdot v+u\cdot v'; \quad y_2''=u''\cdot v+2u'\cdot v'+u\cdot v''$$

Bularni (34.9) ga qo’yib, soddalashtirgandan so’ng.

$$v[u''-2\alpha u'+\alpha^2 u]+2v'(u'-\alpha u)+uv''=0 \tag{34.10}$$

hosil qilamiz. u(x) ni shunday tanlaymizki, natijada $u'-\alpha u=0$ bo’lsin. Bu tenglamani echib, $u=e^{\alpha x}$ ni olamiz. U holda $u'=\alpha e^{\alpha x}$, $u''=\alpha^2 e^{\alpha x}$ va $u=e^{\alpha x}$ larni (34.10) ga qo’yib, $uv''=0$ hosil qilamiz. Bu tenglamani echsak, $v'=A$ va $v=Ax+B$ hosil bo’ladi. Soddalik uchun A=1 va B=0 deylik. U holda $v=x$, $y_2=u\cdot v$ bo’lgani uchun $u_2=xe^{\alpha x}$ bo’ladi. Natijada (34.7) ning umumiy echimi

$$u=s_1e^{\alpha x}+s_2xe^{\alpha x}$$

ko’rinishini oladi.

3-hol. (34.8) xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar, ya’ni $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$ . r va q parametrlarni Viet teoremasiga ko’ra $\alpha$ va $\beta$ orqali ifodalaymiz.

$$r=-(k_1+k_2)=-2\alpha, \quad q=k_1\cdot k_2=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$$

U holda (34.7) tenglama

$$y''-2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y=0$$

ko’rinishiga keladi. Yuqoridagi kabi echimni $y=u\cdot v$ ko’rinishda izlaymiz. Amallarni bajarib, guruhlagandan so’ng

$$v[u''-2\alpha u'+\alpha^2 u]+2v'(u'-\alpha u)+u(v''+\beta^2 v)=0 \tag{34.11}$$

hosil qilamiz. u ni $u'-\alpha u$ tenglamani qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Natijada $u=e^{\alpha x}$ hosil bo’ladi. u, $u'$ va $u''$ ni (34.11) ga qo’yib, $v''+\beta^2 v=0$ tenglama olamiz. Bevosita tekshirish bilan $v_1=\cos\beta x$ va $v_2=\sin\beta x$ echimlar oxirgi tenglamani qanoatlantirishga ishonch hosil qilamiz. U holda

$$u_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$$

va ikkita chiziqli erkli echimlar bo'ladi va (34.7) ning umumiy echimini $u=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ hosil qilamiz.

1-misol. Ushbu tenglamani

$$y''+2y'-15y=0$$

eching.

Echish. Xarakteristik tenglamasini tuzamiz: $k^2+2k-15=0$

Buning echimi $k_1=-5$ va $k_2=3$ bo'ladi va demak 1-holga asosan umumiy echim $u=s_1e^{-5x}+s_2e^{3x}$ bo'ladi.

2-misol. Ushbu $y''-10y'+25=0$ tenglamani eching.

Echish. Xarakteristik tenglamasi $k^2-10k+25=0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning echimi $k_1=k_2=5$ bo'ladi. Bu 2-holga to'g'ri keladi va unga asosan umumiy echim $u=s_1e^{5x}+s_2xe^{5x}=(s_1+s_2x)e^{5x}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

3-misol. Ushbu $y''-4y'+13=0$ tenglamani eching.

Echish. Xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2-4k+13=0$$

Uning echimlari $k_1=2+3i$ va $k_2=2-3i$ bo'ladi. $\alpha=2$ va $\beta=3$ deb olib, 3-holga asosan

$$u=e^{2x}(s_1\text{sos}3x+c_2\sin 3x)$$

ko'rinishdagi umumiy echimni yozamiz.

## 4. Differentsial tenglamalar sistemasi haqida tushuncha.

Hosilaga nisbatan ifoda etilgan n ta noma'lum funktsiyali, n ta birinchi tartibli differentsial tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (34.12)$$

ko'rinishga ega. Bu erda x - erkli o'zgaruvchi, $u_1, u_2, ..., u_n$ - noma'lum funktsiyalar.

(34.12) sistemaning echimi deb, x o'zgaradigan chekli yoki cheksiz intervalda aniqlangan, birinchi tartibli hosilaga ega va (34.12) ni ayniyatga aylantiradigan har qanday funktsiyalar sistemasiga aytiladi.

(34.12) sistemaning $y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0, ..., y_n(x_0)=y_n^0$ boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x)$, ..., $y_n=\varphi_n(x)$ echimlarni aniqlash Koshi masalasini tashkil etadi. Bu erda $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ - berilgan sonlar.

## O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday ko'rinishdagi differentsial tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi va u qanday echiladi?
2. Bernulli tenglamasini chiziqli differentsial tenglamaga keltirish usulini bayon qiling.
3. To'la differentsialli tenglama deb qanday differentsial tenglamaga aytiladi va echish usulini bayon eting.
4. Differentsial tenglama to'la differentsialli bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
5. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglama deb qanday differentsial tenglamaga aytiladi?
6. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?
7. Xarakteristik tenglamani echishdan hosil bo'ladigan uchta holni bayon qiling. Har bir hol uchun umumiy echimni yozib bering.
8. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar sistemasi nimadan iborat?
9. Differentsial tenglamalar sistemasi echimi va Koshi masalasini ayting.

## Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Bernulli tenglamasi.
2. To'la differentsialli tenglama.
3. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglama.
4. Xarakteristik tenglama.
5. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar sistemasi.
6. Differentsial tenglamalar sistemasi echimi.
7. Koshi masalasi.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**34.1.** Bernulli tenglamasini eching.

**a)** $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$; **b)** $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{y}$;

**v)** $y'=y^4\cos x+y\,tgx$; **g)** $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y^2$.

**34.2.** Quyidagi keltirilgan differentsial tenglamalar to'la differentsialli ekanligini tekshiring va eching.

**a)** $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;

**b)** $3x^2(1+\ln y)dx=(2y-\frac{x^3}{y})dy$;

**v)** $2xydx(x^2-y^2)dy=0$;

**g)** $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$;

**d)** $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$;

**e)** $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$.

**34.3.** Differentsial tenglamalarning umumiy echimini toping.

**a)** $y''-4y'+4y=0$; **b)** $y''+4y'+3y=0$;

**v)** $y''+4y'+8y=0$; **g)** $y''-2y'=0$;

**d)** $y''-4y'+5y=0$; **e)** $2y''-5y'+2y=0$;

**j)** $y''+y'-2y=0$; **z)** $y''+y=0$.

**34.4.** Koshi masalasini eching.

**a)** $y''+4y'+29y=0;\quad y\big|_{x=0}=0,\ y'\big|_{x=0}=15$;

**b)** $y''-2y'+2=0;\quad y\big|_{x=2}=1,\ y'\big|_{x=2}=-2$;

**v)** $4y''+4y'+y=0;\quad y\big|_{x=0}=2,\ y'\big|_{x=0}=0$;

**g)** $y''-4y'+3y=0;\quad y\big|_{x=0}=6,\ y'\big|_{x=0}=10$.

# §35. SONLI QATORLAR

## 1. Sonli qator tushunchasi.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (35.1)$$

ifodaga **sonli qator** deyiladi. Bu erda $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ haqiqiy sonlar bo'lib, qatorning hadlari, $a_n$ – had qatorning n-chi hadi yoki **umumiy hadi** deb ataladi. Har bir (35.1) sonli qator uchun

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

qismiy yig'indilar $S_n$ qurish mumkin.

Misol. Ushbu

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

sonli qator uchun qismiy yig'indilar:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}; \quad \dots,$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

bo'ladi.

Agar (35.1) qatorning qismiy yig'indilari ketma-ketligi chekli limit S ga ega bo'lsa, bu songa **qatorning yig'indisi** deb ataladi:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (35.2)$$

Agar (35.2) chekli limitga ega bo'lsa, qator yaqinlashuvchi, S - uning yig'indisi deyiladi.

Misol. Yuqorida keltirilgan misol uchun:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Demak, berilgan sonli qator chekli limitga ega ekan. Qator yaqinlashuvchi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, qator uzoqlashuvchi deb ataladi.

$r_n = S - S_n$ songa qatorning qoldig'i deyiladi. Yaqinlashuvchi sonli qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ bo'ladi va demak etarlicha katta n lar uchun $S \approx S_n$ o'rinli bo'ladi.

Misollar:

1) Ushbu geometrik progressiyaning hadlaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$ $(b_1 \neq 0)$ sonli qator $|q| < 1$ bo'lsa yaqinlashuvchi, yig'indisi $S = \frac{b_1}{1-q}$ bo'ladi, $|q| \geq 1$ bo'lsa, uzoqlashuvchidir;

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ sonli qator **garmonik qator** deyiladi va u uzoqlashuvchi qatordir.

3) Umumlashgan garmonik qator deb,

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

sonli qatorga aytiladi va bu sonli qator $p \leq 1$ da uzoqlashuvchi, $p > 1$ da yaqinlashuvchidir.

## 2. Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning asosiy xossalari.

Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning quyidagi asosiy xossalarini keltiramiz:

$1^0$. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda istalgan chekli sonlardagi hadlarni tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi hadlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

$2^0$. Yaqinlashuvchi sonli qatorning har bir hadi, bir xil $\lambda$ soniga ko'paytirilsa, u holda yig'indi $\lambda$ soniga ko'paytiriladi; ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \cdot S$$

$3^0$. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indilari mos ravishda A va V ga teng bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ sonli yig'indisi ham yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $A \pm V$ ga teng.

$4^0$. (Yaqinlashuvchanlikning zaruriy alomati)

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning umumiy hadi uchun $S_n = \lim_{n \to \infty} a_n = 0$ shart bajariladi. Lekin bu alomat etarli alomat bo'la olmaydi.

Agar $S_n = \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ bo'lsa, u holda berilgan sonli qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misollar.

1) Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+3}$ sonli qator uzoqlashuvchidir, chunki

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n+3} = \frac{2}{5} \neq 0$$

2) Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + \ldots$$

sonli qator uzoqlashuvchi qator bo'ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$$

mavjud emas.

### 3. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining alomatlari.

Musbat hadli sonli qatorlar uchun quyidagi yaqinlashish va uzoqlashish alomatlarini keltiramiz.

1) Taqqoslash alomati. Musbat hadli ikkita

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{35.3}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{35.4}$$

sonli qator uchun, biror N nomerdan boshlab $a_n \leq b_n$ tengsizlik bajarilsa, u holda:

a) (35.4) qatorning yaqinlashishidan (35.3) qatorning ham yaqinlashishi;

(35.3) qatorning uzoqlashishidan (35.4) qatorning ham uzoqlashishi kelib chiqadi.

b) (35.3) va (35.4) sonli qatorlarning umumiy hadlari uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ mavjud va $0<k<+\infty$ bo'lsa, u holda (35.3) va (35.4) sonli qatorlar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Echish. Berilgan qatorni uzoqlashuvchi garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bilan taqqoslaymiz. Buning uchun $k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{7}{5n}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{7}{5}$ va $k\in(0;+\infty)$ ekanligini topamiz. Bundan berilgan qator uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

2) Koshi alomati. Agar musbat hadli (35.3) qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ mavjud bo'lsa, bu qator k<1 bo'lganda yaqinlashadi, k>1 da esa uzoqlashadi, k=1 da qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

Misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^n}$ sonli qatorni Koshi alomati yordamida yaqinlashishga tekshiring.

Echish. Koshi alomatiga ko'ra,

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$$

Demak, k<1 bo'lgani uchun berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

3) Dalamber alomati. Agar musbat hadli (35.3) qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$$

mavjud bo'lsa, u holda bu qator: d<1 da yaqinlashadi, d>1 da uzoqlashadi va d=1 da qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

Misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n}$ sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Echish. Dalamber alomatiga ko'ra,

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$$

bo'lgani uchun berilgan sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) Koshining integral alomati. Agar (35.3) sonli qatorning hadlari musbat va o'smaydigan bo'lib, $x\geq 1$ bo'lganda aniqlangan, uzluksiz, musbat va o'smaydigan funktsiya uchun $a_n=f(n),\ \ n=1,2,\ldots$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

1-tur xosmas integral yaqinlashsa, berilgan qator ham yaqinlashadi, xosmas integral uzoqlashsa, sonli qator ham uzoqlashadi.

Umumlashgan garmonik qator ushbu alomat yordamida tekshiriladi.

Misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Echish. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+...+\frac{1}{1+n^2}+...$ sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ funktsiya $x \ge 1$ bo'lganda musbat, uzluksiz va o'smaydi hamda uning uchun quyidagi 1-tur xosmas integral

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

bo'ladi.

## 4. Sonli qatorlarning absolyut va shartli yaqinlashishi.

O'zgaruvchi ishorali sonli kator

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (35.5)$$

berilgan bo'lsin. (35.5) sonli qator hadlarining absolyut qiymatlaridan yangi sonli qator

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+... \qquad (35.6)$$

tuzamiz.

Agar (35.6) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (35.5) sonli qator absolyut **yaqinlashuvchi qator** deyiladi.

Agar (35.6) qator uzoqlashuvchi bo'lib, (35.5) qatorning o'zi yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (35.5) sonli qator **shartli yaqinlashuvchi qator** deyiladi. Absolyut yaqinlashuvchi sonli qator hamma vaqt yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ushbu

$$s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + ... (-1)^{n-1}s_n + ... \qquad (35.7)$$

sonli qatorga **ishoralari almashinuvi qator** deb ataladi. Bunday qatorlarni tekshirish uchun Leybnits teoremasidan foydalaniladi.

Leybnits teoremasi. Agar ishoralari almashinuvchi (35.7) qatorning hadlari uchun:

1. $s_1 > s_2 > s_3 > ...$
2. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

o'rinli bo'lsa, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi musbat bo'lib, birinchi haddan katta bo'lmaydi.

Ishorasi almashinuvchi qator qoldigi $|r_n| \le c_{n-1}$ tengsizlik bilan baholanadi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...$$

sonli qatorning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

Echish. Leybnits teoremasi shartlarining yuqorida berilgan ishorasi almashinuvchi qator uchun bajarilishini ko'ramiz, ya'ni

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>.....$$

va

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi bo'lar ekan. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari:

1. Absolyut yaqinlashuvchi qatorda o'rinlarini almashtirishdan tuzilgan yangi qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va yig'indisi berilgan qator yig'indisi bilan bir xil bo'ladi.

2. Shartli yaqinlashuvchi qatorda, b soni ixtiyoriy son bo'lishdan qat'iy nazar, hadlar o'rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada olingan yangi sonli qator yig'indisi b ga teng bo'ladi.

3. Shartli yaqinlashuvchi sonli qatorda hadlar o'rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada uzoqlashuvchi yangi qator olinadi.

**O'z-o'zini tekshirish uchun savollar**

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
2. Sonli qatorning qismiy yig'indisi nimadan iborat?
3. Yaqinlashuvchi sonli qator uchun qanday shart bajarilishi kerak?
4. Garmonik qator nima?
5. Yaqinlashuvchi sonli qatorning asosiy xossalarini bayon qiling.
6. Musbat hadli sonli qator deb nimaga aytiladi?
7. Musbat hadli sonli qatorning yaqinlashuvchanligini tekshirishning taqqoslash alomatini bayon qiling.
8. Musbat hadli sonli qator uchun Koshi alomatini bayon qiling.
9. Musbat hadli sonli qator uchun Dalamber alomatini aytib bering.
10. Koshining integral alomati nimadan iborat?
11. O'zgaruvchi ishorali sonli qator deb qanday sonli qatorga aytiladi?
12. Leybnits teoremasini ifodalang.
13. Absolyut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?
14. Shartli yaqinlashuvchi qator nimadan iborat.
15. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini bayon qiling.

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Sonli qator.
2. Qismiy yig’indi.
3. Qator qoldig’i.
4. Garmonik qator.
5. Yaqinlashuvchi qator.
6. Uzoqlashuvchi qator.
7. Musbat hadli sonli qator.
8. O’zgaruvchi ishorali sonli qator.
9. Absolyut yaqinlashuvchi sonli qator.
10. Shartli yaqinlashuvchi sonli qator.
11. Taqqoslash alomati.
12. Koshi alomati.
13. Dalamber alomati.
14. Koshining integral alomati.

## Mustaqil ishlash uchun misollar

**35.1.** Sonli qatorning umumiy hadi $u_n = \dfrac{n}{10^n + 1}$ berilgan. Dastlabki beshta hadini yozing.

**35.2.** Quyidagi sonli qatorning umumiy hadini yozing.

**a)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dfrac{7}{2^4} + \ldots$ ;

**b)** $\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{11}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{15}\right)^4 + \ldots$ ;

**v)** $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$ ;

**g)** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} + \ldots$ .

**35.3.** Taqqoslash alomatini qo’llab, berilgan sonli qatorlarning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

**a)** $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} + \ldots$ ;

**b)** $1 + \dfrac{1+2}{1+2^2} + \ldots + \dfrac{1+n}{1+n^2} + \ldots$ .

**35.4.** Quyidagi sonli qatorlar yaqinlashuvchanligini Koshi alomati yordamida tekshiring.

**a)** $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$ ;

**b)** $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$ ;

**v)** $\frac{1}{ln2}+\frac{1}{ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{ln^n(n+1)}+\ldots$ .

**35.5.** Sonli qatorlar yaqinlashuvchanligini Dalamber alomati yordamida tekshiring.

**a)** $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$ ; **b)** $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$ ;

**v)** $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$ .

**35.6.** Koshining integral alomati yordamida quyidagi sonli qatorlar yaqinlashishini tekshiring.

**a)** $\frac{1}{2ln2}+\frac{1}{3ln3}+\ldots+\frac{1}{nlnn}+\ldots$ ;

**b)** $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$ .

# §36. FUNKTSIONAL QATORLAR

## 1. Funktsional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashuvchi funktsional qatorlar.

Ushbu

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (36.1)$$

ifodaga **funktsional qator** deb ataladi. Bu erda $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ D to'plamda aniqlangan funktsiyalar. x ning (36.1) qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha qiymatlar to'plami $\Omega$ ($\Omega \subseteq D$) funtsional qatorning **yaqinlashish sohasi** deb ataladi.

$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ yig'indi funktsional qatorning **n-qismiy yig'indisi** deb ataladi. Agar

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x\in\Omega,$$

bo'lsa, S(x) (36.1) qator yig'indisi, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ ayirma esa **qator qoldig'i** deyiladi.

Agar S(x), $x\in L$, $(L\subseteq\Omega)$ funktsiya (36.1) qatorning yig'indisi bo'lsa, u holda (36.1) funtsional qator L to'plamda S(x) funktsiyaga yaqinlashadi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday N nomer topilsaki, $n\geq N$ bo'lganda barcha $x\in L$ uchun

$$|R_n(x)|<\varepsilon$$

bajarilsa, (36.1) funktsional qator L to'plamda S(x) funktsiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Agar funktsional qator L to'plamda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator bu to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas, ammo L to'plamning biror bir to'plam ostida yaqinlashishi tekis bo'lishi mumkin.

Funktsional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo'lishining Veyershtrass alomati.

Agar (36.1) funktsional qator uchun hadlari musbat shunday yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qator mavjud bo'lib, L to'plamda

$$|f_n(x)|\leq c_n$$

bo'lsa, u holda funktsional kator L to'plamda tekis yaqinlashadi.

Misol. Ushbu

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$$

funktsional qator $L=(-\infty;+\infty)$ to'plamda tekis yaqinlashadi, chunki $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ va $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchidir.

## 2. Funktsional qator yig'indisining funktsional xossalari.

Funktsional qator yig'indisining quyidagi funktsional xossalarini keltiramiz:

1) Agar $f_n(\text{x})$ funktsiyalar [a,b] da uzluksiz bo'lib, bu funktsiyalardan tuzilgan ushbu

$$f_1(\text{x})+f_2(\text{x})+\ldots+f_n(\text{x})+\ldots$$

funktsional qator bu oraliqda $f(\text{x})$ funktsiyaga tekis yaqinlashsa:

a) $f(\text{x})$ funktsiya [a,b] oraliqda uzluksiz;

b) [a,b] oraliqda funktsional qatorni hadma-had integrallash mumkin bo'ladi:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_a^b \mathrm{f}_1(x)dx + \int_a^b \mathrm{f}_2(x)dx + \ldots + \int_a^b \mathrm{f}_n(x)dx + \ldots$$

Misol. Ushbu

$$1 + \text{x} + \text{x}^2 + \ldots + \text{x}^{\text{n-1}} + \ldots$$

funktsional qator [0, $\frac{1}{2}$ ] oraliqda $\frac{1}{1-\text{x}}$ funktsiyaga tekis yaqinlashadi. Demak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1\cdot dx + \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \ldots + \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}dx + \ldots = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$$

yoki

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot 2} + \frac{1}{2^3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2^{\text{n}}\cdot \text{n}} + \ldots = \ln 2$$

2) Agar $f_n(\text{x})$ funktsiyalar [a,b] oraliqda uzluksiz hosilalarga ega va bu oraliqda:

a) ushbu

$$f_1(\text{x}) + f_2(\text{x}) + \ldots + f_n(\text{x}) + \ldots$$

funktsional qator $f(\text{x})$ funktsiyaga yaqinlashsa;

b) ushbu

$$\mathrm{f}_1'(x) + \mathrm{f}_2'(x) + \ldots + \mathrm{f}_n'(x) + \ldots$$

funktsional qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda [a,b] intervalda $f(\text{x})$ funktsiya uzluksiz hosilaga ega bo'ladi:

$$f'(\text{x}) = f_1'(\text{x}) + f_2'(\text{x}) + \ldots + f_n'(\text{x}) + \ldots$$

## 3. Darajali qatorlar.

Ushbu

$$\text{a}_0 + \text{a}_1(\text{x}-\text{c}) + \text{a}_2(\text{x}-\text{c})^2 + \ldots + \text{a}_{\text{n}}(\text{x}-\text{c})^{\text{n}} + \ldots = \sum_{\text{n}=0}^{\infty} \text{a}_{\text{n}}(\text{x}-\text{c})^{\text{n}} \qquad (36.2)$$

ko'rinishdagi funktsional qator markazi c nuqtada bo'lgan **darajali qator** deyiladi.

Bu erda $\text{a}_0$, $\text{a}_1$, ..., $\text{a}_{\text{n}}$, ... va c – o'zgarmas sonlar bo'lib, darajali qatorning koeffitsientlari va markazi deyiladi.

Quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

1) (36.2) darajali qator faqat x=s da yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi deyiladi.

2) (36.2) darajali qator x ning har bir qiymatida yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi deyiladi va u absolyut yaqinlashadi.

3) Shunday R>0 soni mavjudki, (36.2) qator $|x-c|<R$ da absolyut yaqinlashuvchi va $|x-c|>R$ da esa uzoqlashuvchi bo'ladi. R qatorning **yaqinlashish radiusi** deyiladi. R=0 barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi va R=$\infty$ barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi qatorning yaqinlashish radiusini ifodalaydi. R>0 da (c-R, c+R) intervalni (36.2) qatorning yaqinlashish intervali deyiladi. Shuning bilan birga intervalning chetki nuqtalarida darajali qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.

Misol. Quyidagi

$$\frac{x^1}{1\cdot 3^1}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$$

darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Echish. Dalamber alomatiga ko'ra tekshiramiz:

$$|u_{n+1}(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\right|,\quad |u_n(x)|=\left|\frac{x^n}{n\cdot 3^n}\right|$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\dfrac{|x|^n}{n\cdot 3^n}}=\frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|}{3}$$

d<1 bo'lganda qator yaqinlashadi :

$\frac{|x|}{3}<1$, $|x|<3$ , $x\in(-3;3)$ va demak R=3.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz:

1) x=-3 bo'lganda qator

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$$

yaqinlashuvchi sonli qatorga aylanadi. Aniqrog'i shartli yaqinlashadi.

2) x=3 da

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

uzoqlashadi. Demak, yaqinlashish sohasi [-3;3) ni tashkil etadi.

Darajali qator quyidagi xossalarga ega:

$1^0$. Agar darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo'lmasa, u holda uning yig'indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'ladi.

$2^0$. Agar $x \in \Omega$ da

$$a_0 + a_1(x-s) + a_2(x-s)^2 + ... + a_n(x-s)^n + ... = f(x),$$

bo'lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had integrallash mumkin:

$$a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + ... + a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + ... = \int_c^x f(x)dx$$

$3^0$. Agar $x \in$ (s-R, c+R) , R>0 da

$$a_0 + a_1(x-s) + a_2(x-s)^2 + ... + a_n(x-s)^n + ... = f(x),$$

bo'lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had differentsiallash mumkin, ya'ni

$$a_1 + 2a_2(x-c) + ... + na_n(x-c)^{n-1} + ... = f'(x), \; x \in (s-R, c+R)$$

$4^0$. Agar ushbu

$$a_0 + a_1(x-s) + a_2(x-s)^2 + ... + a_n(x-s)^n + ...$$

darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo'lmasa, u holda buning yig'indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida barcha yuqori tartibli hosilalarga ega bo'ladi. Shu bilan birga:

$$a_0 = f(c), \; a_1 = f'(c), \; a_2 = \frac{f''(c)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, ... \quad \text{bo'ladi.}$$

## 4. Funktsiyani darajali qatorga yoyish.

Agar $f(x)$ funktsiya x=s da barcha yuqori tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiya uchun

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + ... \qquad (36.3)$$

darajali qator **Teylor qatori** deb ataladi. c=0 bo'lgan holda (36.3) qatorni **Makloren qatori** deb ataladi.

(36.3) darajali qator $f(x)$ funktsiyaga yaqinlashishining zaruriy va etarli sharti bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

xizmat qiladi. Bu erda

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[c + \theta(x-c)], \quad 0 < \theta < 1$$

Ba'zi funktsiyalarni darajali qatorga yoyish jadvali.

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty$$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty$

4. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \quad |x| \le 1$

5. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ..., \quad -1 < x \le 1$

6. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} x^n + ..., \quad |x| < 1$

## O’z-o’zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsional qator deb nimaga aytiladi?
2. Funktsional qatorning yaqinlashish sohasi nimadan iborat?
3. Funktsional qatorning qismiy yig’indisi nimadan iborat?
4. Funktsional qator qoldig’i deb nimaga aytiladi?
5. Funktsional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo’lishining Veyershtrass alomatini bayon qiling.
6. Funktsional qator xossalarini ta’riflang.
7. Darajali qator deb qanday qatorga aytiladi?
8. Darajali qatorning xossalarini ifodalang.
9. Teylor qatori nimadan iborat?
10. Makloren qatori-chi?
11. Ba’zi funktsiyalarning darajali qatorga yoyish formulasini yozib be ring.

## Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsional qator.
2. Yaqinlashish sohasi.
3. Qismiy yig’indi.
4. Qator qoldigi.
5. Tekis yaqinlashish.
6. Veyershtrass alomati.
7. Darajali qator.
8. Teylor qatori.
9. Makloren qatori.

### Mustaqil ishlash uchun misollar

**36.1.** Quyidagi funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi toping.

**a)** $1+e^{-x}+e^{-2x}+...+e^{-(n-1)x}+...;$

**b)** $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+...+\frac{1}{n^x}+...;$

**v)** $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}+\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+...+\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}+...;$

**g)** $x\,tg\frac{x}{2}+x^2tg\frac{x}{2^2}+...+x^ntg\frac{x}{2^n}+...;$

**d)** $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+...+\frac{1}{1+x^n}+...$ .

**36.2.** Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini toping

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!};$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1};$

**v)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1};$ **g)** $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n;$

**d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2};$ **e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}.$

**36.2.** Quyidagi funktsiyalarni

**a)** $f(x)=\sin^2 x;$ **b)** $y=e^{-x^2};$

**v)** $f(x)=3^x;$ **g)** $f(x)=ln(x+a),\quad a>0.$

x ning darajalari bo'yicha yoying.

**36.3.** $y=ln x$ funktsiyani x=1 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

**36.4.** $y=\frac{1}{x}$ funktsiyani x=3 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

**36.5.** Quyidagi funktsiyalarni Makloren qatoriga yoying.

**a)** $y=ln(1+e^x);$ **b)** $y=e^{\cos x};$

**v)** $y=-ln\cos x;$ **g)** $y=x^2e^x.$

# ADABIYOTLAR

## Asosiy adabiyotlar:

1. Adigamova E.B., Isaeva G., Mo'minova R. Oliy matematikadan masalalar to'plami. – I, Toshkent: TMI, 2002.
2. Visshaya matematika dlya ekonomistov pod red. S.V. Kremera. M., «Visshaya shkola», 1998 g.
3. Danko P.E. i dr. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. I, II. M., «Visshaya shkola», 1998 g.
4. Jo'raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. Toshkent, «O'zbekiston», 1995 y.
5. Zamkov O.O. i dr. Matematicheskie metodi dlya ekonomistov. M., 1994 g.
6. Karimov M., Abdikarimov R. Oliy matematika fanidan ma'ruza matnlari to'plami. I, II qism. Toshkent: TMI, 2002, 2003.
7. Latipov X. va boshqalar. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'zbekiston», 1995 y.
8. Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to'plami. Toshkent, «O'qituvchi», 1988 y. va keyingi nashrlar.
9. Rajabov F., Nurmetov A. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, «O'qituvchi», 1990 y.
10. Sa'dullaev A. va boshqalar. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami. I. Toshkent, «O'zbekiston», 1993 y.
11. Soatov U. Oliy matematika kursi. III – tom. Toshkent, «O'qituvchi», 1999 y.

## Qo'shimcha adabiyotlar:

12. Bugrov A.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. M., «Nauka», 1989 g.
13. Vashchenko T.V. Matematika finansovogo menedjmenta, M., «Perspektiva», 1996 g.
14. Zaytsev I.A. Visshaya matematika. M., «Visshaya shkola», 1991 g.
15. Kochovich E. Finansovaya matematika. M., «Statistika», 1994 g.
16. Masagutova R.V. Matematika dlya ekonomistov. Tashkent, «O'qituvchi», 1996 g.
17. Spravochnik po matematike dlya ekonomistov pod red. V.I. Ermakova. M., «Visshaya shkola», 1987 g.
18. Tojiev Sh. Oliy matematikadan masalalar echish. – T. O'zbekiston, 2002.
19. Shipachyov V.S. Visshaya matematika. M., «Visshaya shkola», 1999 g.
20. Shodiev T. Analitik geometriya va chiziќli algebra. Toshkent, «O'ќituvchi», 1988 y.

## Mundarija


**§1. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI ..................................................... 3**
1. 2-tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari ............................................... 3
2. 3-tartibli determinantlar ............................................................................................................ 3
3. n - tartibli determinantlar ........................................................................................................... 5
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 6
**§2. DETERMINANTLARNING XOSSALARI ........................................................................ 9**
1.Minor va algebraik to'ldiruvchilar haqida tushuncha .............................................................. 9
2. Determinantlarning xossalari ...................................................................................................... 9
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 12
**§3. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR ......................................................... 13**
1.Matritsa haqida tushuncha ............................................................................................................ 13
2. Matritsalar ustida amallar............................................................................................................ 13
3. Kvadrat matritsa determinanti. Matritsa normasi. ................................................................ 15
4. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari. ..................................................................................... 15
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 18
**§4. TESKARI MATRITSA VA UNI QURISS ........................................................................ 20**
1. Teskari matritsa haqida tushuncha. ............................................................................................ 20
2. Teskari matritsa qurish algoritmlari. .......................................................................................... 20
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 23
**§5. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI ...................................................................... 24**
1. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Sistemaning echimi................................................................ 24
2. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimi mavjudligi va yagonaligi haqida teoremalar. .... 25
3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas echimlari mavjudlik shartlari. ............. 27
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 29
**§6. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISh USULLARI ............................ 31**
1. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida echish. .......................................... 31
2. Sistemaning umumiy echimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi. 32
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 36
**§7. ARIFMETIK VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR .................................... 39**
1. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazo. Arifmetik vektor haqida tushuncha. ............................. 39
2. Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar va ularning xossalari.......................................... 39
3. Arifmetik vektorlarning skalyar ko'paytmasi. Vektor uzunligi. Skalyar ko'paytma xossalari.40
4. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Vektorlar orasidagi burchak.
Uchburchak tengsizligi. .................................................................................................................. 40
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 41
**§8. VEKTORLAR SISTEMASI .................................................................................................. 43**
1. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor tenglama shaklida yozish. ................................................................................................................................. 43
2. Vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha yoyish............................................................ 44
3. Chiziqli bog'liq va chiziqli erkli vektorlar sistemalari. ........................................................... 44
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 47
**§9. VEKTORLAR SISTEMASINING BAZISI VA RANGI. KANONIK BAZIS ................ 48**
1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi. ..................................................................................... 48
2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari. ........................................................... 48
3. $R_n$ fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis. ......................................................... 50
Mustaqil ishlash uchun misollar .................................................................................................... 52

**§10. BIR JINSLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINING FUNDAMENTAL ECHIMLARI TIZIMI. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI UMUMIY ECHIMI VEKTOR SHAKLI ........ 53**
1. Vektor ko'rinishda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik shartlari........ 53
2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari tizimi. ........ 53
3. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi umumiy echimi vektor shakli. ........ 54
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 56
**§11. CHIZIQLI ALGEBRA USULLARINING BA'ZI CHIZIQLI IQTISODIY MODELLARNING TAHLILIDA QO'LLANILIShI ........ 57**
1. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Rejalashtirishning asosiy masalasi. ........ 57
2. Bilvosita xarajatlar haqida tushuncha. To'la xarajatlar haqida tushuncha........ 59
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 60
**§12. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYa ELEMENTLARI. ........ 62**
**TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQ ........ 62**
1. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalari........ 62
2. Berilgan bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari........ 64
3. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofa. ........ 65
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 67
**§13. IKKINChI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR........ 69**
1. Ikkinchi tartibli egri CHIZIQlar haqida tushuncha. Ellips va uning kanonik tenglamasi. ........ 69
2. Giperbola va uning kanonik tenglamasi........ 71
3. Parabola va uning kanonik tenglamasi........ 72
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 74
**§14. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI. FAZODA TEKISLIK ........ 76**
1. Fazoda tekislikning turli ko'rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi........ 76
2. Berilgan uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari........ 78
3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofa. ........ 79
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 80
**§15. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ........ 82**
1. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari. ........ 82
2. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to'g'ri CHIZIQning turli ko'rinishdagi tenglamalari. ........ 84
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 86
**§16. CHIZIQLI FAZO. EVKLID FAZO........ 88**
1. Chiziqli fazo va uning o'lchovi. n o'lchovli fazoda bazis va koordinatalar. ........ 88
2. Evklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matritsa. ........ 89
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 92
**§17. CHIZIQLI OPERATORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR ........ 93**
1. Chiziqli operator va uning matritsasi. ........ 93
2. Chiziqli operatorlar ustida amallar........ 93
3. Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati. ........ 94
4. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko'rinishga keltirish........ 95
Mustaqil ishlash uchun misollar ........ 98
**§18. KVADRATIK SHAKLLAR VA ULARNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH ........ 99**
1. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish........ 99

2. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini tekshirish. .......... 100
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 104
**§19. $R_N$ FAZODA NUQTALAR TO'PLAMI .......... 105**
1. n o'lchovli haqiqiy arifmetik fazoda nuqta atrofi. $R_n$ fazoda chegaralangan to'plam. .......... 105
2. To'plamning ichki va chegaraviy nuqtalari, uning quyuqlanish nuqtasi. Yopiq va ochiq to'plamlar. Ixcham to'plam. .......... 105
3. $R_n$ fazoda nuqtalarning qavariq to'plami va qavariq chiziqli kombinatsiyasi. Qavariq to'plamning chetki nuqtalari. .......... 107
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 109
**§20. $R_N$ FAZODA YAQINLASHISh .......... 111**
1. n o'lchovli haqiqiy fazoda nuqtalar ketma-ketligi haqida tushuncha. Sonli ketma – ketlik. 111
2. $R_n$ fazoda nuqtalar ketma–ketligining limiti. Sonli ketma–ketlik limiti. .......... 111
3. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma–ketliklar. Yaqinlashuvchi sonli ketma – ketliklar limitlarining arifmetik xossalari. .......... 113
4. Monoton sonli ketma–ketliklar. e soni. .......... 114
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 116
**§21. BIR VA KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA. .......... 118**
1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiya haqida tushuncha. Funktsiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami. .......... 118
2. Bir o'zgaruvchili funktsiya umumiy xossalari va grafigi. Teskari funktsiya. .......... 119
3. Chegaralangan funktsiya. Qavariq va botiq funktsiyalar haqida tushuncha. .......... 121
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 123
**§22. BIR VA KO'P O'ZGARUVChILI FUNKTSIYA LIMITI. .......... 126**
1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiya limiti haqida tushuncha. Ajoyib limitlar. Yaqinlashuvchi funktsiya xossalari .......... 126
2. Bir o'zgaruvchili funktsiya uchun bir tomonlama va $x \to \infty$ dagi limitlar. .......... 127
3. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Cheksiz kichik va cheksiz katta funktsiyalar. .......... 129
4. Ekvivalent cheksiz kichik funktsiyalar. Funktsiyalarni taqqoslash. .......... 131
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 132
**§23. BIR VA KO'P O'ZGARUVChILI FUNKTSIYA UZLUKSIZLIGI. .......... 135**
1. Bir va ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi. .......... 135
2. Uzluksiz funktsiyalar xossalari. To'plamda uzluksizlik. .......... 136
3. Bir tomonlama uzluksizlik. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning uzilish nuqtalari. .......... 137
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 139
**§24. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA HOSILASI VA DIFFERENTSIALI .......... 140**
1. Hosila haqida tushuncha. Funktsiya differentsiali. .......... 140
2. Hosila va differentsialning geometrik va fizik ma'nolari. .......... 141
3. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari. .......... 143
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 144
**§25. HOSILA VA DIFFERENTSIALNI HISOBLASH QOIDALARI. .......... 147**
**YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENTSIALLAR .......... 147**
1. Differentsiallanuvchi funktsiyalar haqida teoremalar. Elementar funktsiyalar hosilalari jadvali. .......... 147
2. Murakkab funktsiya hosilasi va differentsiali. .......... 148
3. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar. .......... 149
4. Teskari funktsiya hosilalari. .......... 150
Mustaqil ishlash uchun misollar .......... 151
**§26. DIFFERENTSIALLANUVCHI FUNKTSIYA UChUN O'RTA QIYMAT HAQIDA TEOREMALAR. TEYLOR FORMULASI. LOPITAL QOIDASI. .......... 154**
1. Differentsiallanuvchi funktsiya uchun o'rta qiymat haqida Roll va Lagranj teoremalari. .. 154

2. Teylor – Makloren formulalari va ularning qo'llanilishi. 155
3. Aniqmasliklarni ochish Lopital qoidasi. 156
Mustaqil ishlash uchun misollar 158
**§27. FUNKTSIYANI HOSILA YORDAMIDA TO'LA TEKShIRISh VA UNING GRAFIGINI CHIZISH. 160**
1. Funktsiyaning o'sish va kamayish shartlari. 160
2. Funktsiyaning ekstremum nuqtalari. 160
3. Funktsiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari. 162
4. Funktsiya grafigining qavariqligi. Egilish nuqtalari. 163
5. Egri chiziqlarning asimptotalari. 164
6. Funktsiya grafigini yasashning umumiy sxemasi. 165
Mustaqil echish uchun misollar. 166
**§28. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI 169**
1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalari. 169
2. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning to'la orttirmasi. 170
3. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi. 170
4. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differentsiali. 171
Mustaqil echish uchun misollar 173
**§29. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI (DAVOMI) 174**
1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning gradienti. 174
2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar. 175
3. Funktsiyaning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta. Ekstremumning zaruriy sharti. 176
4. Ikki o'zgaruvchili funktsiya ekstremumining etarli sharti. 176
Mustaqil bajarish uchun misollar **177**
**§30. ANIQMAS INTEGRAL 179**
1. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral. 179
2. Asosiy integrallar jadvali. 179
3. Aniqmas integral xossalari. 180
4. Integrallash usullari. 180
5. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash. 181
6. Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash. 183
Mustaqil ishlash uchun misollar **185**
**§31. ANIQ INTEGRAL 187**
1. Asosiy tushunchalar. Aniq integral. 187
2. Aniq integralning asosiy xossalari. 187
3. Aniq integralni hisoblash qoidalari. 188
4. Aniq integralni taqribiy hisoblash. 190
5. Aniq integralning geometrik tadbiqi. 191
Mustaqil ishlash uchun misollar 193
**§32. XOSMAS INTEGRALLAR 195**
1. 1-tur xosmas integral. 195
2. 2-tur xosmas integral. 196
Mustaqil ishlash uchun misollar 198
**§33. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR 200**
1. Differentsial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. 200
2. Differentsial tenglama haqida tushuncha. 201
3. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar 201
Mustaqil ishlash uchun misollar. 205

**§34. ODDIY DIFFERENTsIAL TENGLAMALAR (DAVOMI)........................................ 207**
1. Bernulli tenglamasi. ........................................................................................ 207
2. To'la differentsialli tenglama.......................................................................... 208
3. O'zgarmas koeffitsientli CHIZIQli bir jinsli differentsial tenglamalar. ............................ 209
4. Differentsial tenglamalar sistemasi haqida tushuncha. ........................................... 211
Mustaqil ishlash uchun misollar ........................................................................... 212
**§35. SONLI QATORLAR......................................................................................... 214**
1. Sonli qator tushunchasi. .................................................................................... 214
2. Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning asosiy xossalari. ............................................ 215
3. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining alomatlari. .................................... 216
4. Sonli qatorlarning absolyut va shartli yaqinlashishi. ........................................... 218
Mustaqil ishlash uchun misollar ........................................................................... 220
**§36. FUNKTSIONAL QATORLAR ........................................................................ 222**
1. Funktsional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashuvchi funktsional qatorlar. .................... 222
2. Funktsional qator yig'indisining funktsional xossalari. ....................................... 223
3. Darajali qatorlar. ............................................................................................ 223
4. Funktsiyani darajali qatorga yoyish. ................................................................. 225
Mustaqil ishlash uchun misollar ........................................................................... 227
**ADABIYOTLAR.................................................................................................. 228**

KARIMOV MUROD BOBOQULOVICH

**ABDIKARIMOV RUSTAMXON ALIMXONOVICH**

# OLIY MATEMATIKA

(o'quv qo'llanma)

Muharrir: Bozorov E.

Bosishga ruxsat etildi 01. 03. 2004 y. Bichimi 30x42 $^{1}/_{8}$
Nashr hisob tabog'i 16.9 b.t. Adadi 500. Buyurtma № 24.
Bahosi shartnoma asosida.

Toshkent Moliya instituti bosmaxonasida "RISO" usulida bosildi.

700084, Toshkent, H. Asomov kqchasi, 7.